

## ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ЛІНІЙНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглядається вироджена система, яка зводиться до центральної канонічної форми, і при цьому відповідна однорідна не вироджена система експоненціально-дихотомічна на півосях. Отримано необхідну у достатню умову існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

We consider a degenerate system which can be reduced to the central canonical form and such that the corresponding homogeneous nondegenerate system is exponentially dichotomous on the semiaxes. We obtain a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a solution bounded on the whole axis of degenerate system of differential equations with impulse action at fixed points of time.

При складанні математичних моделей багатьох практичних задач, які виникають у теорії електричних кіл, теорії керування, автоматичному регулюванні, робототехніці, радіофізиці, математичній економіці тощо, дослідники приходять до задач, які описуються диференціальними рівняннями

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

з виродженою матрицею при похідній.

Важливий внесок у розвиток теорії вироджених систем внесли американські математики С.Кемпбелл і Л.Петцольд [1], які ввели поняття центральної канонічної форми (ЦКФ) і показали що розв'язок виродженої системи має найпростішу структуру, якщо вона зводиться до ЦКФ. Розвитку загальної теорії цих систем присвячено значну кількість праць російських математиків: Бояринцева Ю.Е., Чистякова В.Ф., Данилова В.О., Логінова О.О. [2]. В подальших дослідженнях А.М.Самойленка, М.І.Шкіля, В.П.Яковця [3], було знайдено достатні умови звідності виродженої системи до ЦКФ. Беручи до уваги ці результати та результати [4-6], з'ясуємо питання існування і єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи з імпульсною дією, у припущенні що вона зведена до центральної канонічної форми

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(t), \quad (1)$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i x_1 + b_i; \quad (2)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = \text{col}(x_1, x_2)$ , де  $x_1(t), x_2(t) - n - s$  і  $s$ -вимірні вектори,  $M(t), f(t)$  - неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при  $t = \tau_i$ ) обмежені при всіх  $t \in \mathbb{R}$  відповідно матрична і векторна функції;  $f = \text{col}(f_1, f_2)$ ,  $f_1(t) \in \mathbb{R}^{n-s}$ ,  $f_2(t) \in \mathbb{R}^s$ ,  $f_2(t) \in \mathbb{C}^{s-1}(\mathbb{R})$ ;  $E_s$  - одинична матриця порядку  $s$ ;  $B_i$  і  $b_i$  - сталі матриці і вектори, які відповідно рівномірно відносно  $i \in \mathbb{Z}$  обмежені  $\det(E_{n-s} + B_i) \neq 0$  для будь-яких  $t = \tau_i$ . Послідовність моментів  $\tau_i$  занумерована множиною цілих чисел так, що  $\tau_i \rightarrow -\infty$  при  $i \rightarrow -\infty$  і  $\tau_i \rightarrow +\infty$  при  $i \rightarrow +\infty$ . Крім того, припускається, що

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p < \infty \quad (3)$$

рівномірно відносно  $t \in \mathbb{R}$ . Ця умова рівносильна тому, що можна вказати такі числа  $l$  і натуральне  $q$ , що будь-який проміжок числової осі довжини  $l$  містить не більше  $q$  точок послідовності  $\{\tau_i\}$ .

Як показано в [2], система (1) може бути

розщеплена на два незалежних рівняння:

$$\frac{dx_1}{dt} = M(t)x_1 + f_1(t), \quad (4)$$

$$I \frac{dx_2}{dt} = x_2 + f_2(t), \quad (5)$$

Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x_1(t) = X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f_1(s)ds. \quad (6)$$

де  $c$  —  $(n-s)$ -вимірний сталий вектор,  $X(t)$  — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_1}{dt} = M(t)x_1. \quad (7)$$

Розв'язок рівняння (5) можемо записати у вигляді

$$x_2(t) = r(t) = - \sum_{k=0}^{s-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} f_2(t), \quad (8)$$

Тоді об'єднавши (6) і (8) отримаємо загальний розв'язок системи (1) без імпульсів

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f_1(s)ds \\ - \sum_{k=0}^{s-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} f_2(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Знайдемо умови існування розв'язку системи (1) обмеженого на всій осі в припущенні, що система (7) задовольняє експоненціальній дихотомії на півосях, тобто існують проєктори  $U$  та  $V$  ( $U^2 = U, V^2 = V$ ) і константи  $K_i \geq 1, \alpha_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) такі, що виконуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} \|\Omega^+(t, s)\| &\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\tilde{\Omega}^+(t, s)\| &\leq K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad s \geq t, \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \\ \|\Omega^-(t, s)\| &\leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\tilde{\Omega}^-(t, s)\| &\leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad s \geq t, \quad t, s \in \mathbb{R}_-, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \|\Omega^+(t, s)\| &= \|X(t)UX^{-1}(s)\|, \\ \|\tilde{\Omega}^+(t, s)\| &= \|X(t)(I-U)X^{-1}(s)\|, \\ \|\Omega^-(t, s)\| &= \|X(t)VX^{-1}(s)\|, \\ \|\tilde{\Omega}^-(t, s)\| &= \|X(t)(I-V)X^{-1}(s)\|. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок системи (1) обмежений на півосі має вигляд

$$x(t, \xi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t, 0)\xi + \int_0^t \Omega^+(t, s)f_1(s)ds - \int_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t, s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t, 0)\xi + \int_{-\infty}^t \Omega^-(t, s)f_1(s)ds - \int_t^\infty \tilde{\Omega}^-(t, s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Покажемо, що цей розв'язок обмежений. Дійсно

$$\|\Omega^+(t, 0)\xi\| \leq \|\Omega^+(t, 0)\| \|\xi\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} \|\xi\|,$$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \Omega^+(t, s)f_1(s)ds \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t \|\Omega^+(t, s)\| \|f_1(s)\| ds \leq \\ &\leq \frac{K_1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 t}) \|f_1\|. \end{aligned}$$

Обмеженість інших інтегралів доводитьсь аналогічним чином. Вираз (11) визначає обмежені розв'язки на всій дійсній осі тоді і тільки тоді, коли

$$x(0+, \xi) - x(0-, \xi) = 0, \quad (12)$$

Тобто, розв'язок (11) буде обмеженим на  $\mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли сталий вектор  $\xi \in \mathbb{R}^{n-s}$  є розв'язком алгебраїчної системи:

$$D\xi = \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s)f_1(s)ds + \int_0^\infty \tilde{\Omega}^+(0, s)f_1(s)ds, \quad (13)$$

де  $D = U - (I - V)$  —  $(n-s) \times (n-s)$ -вимірна матриця. Ця алгебраїчна система розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D^*} \left\{ \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s)f_1(s)ds + \int_0^\infty \tilde{\Omega}^+(0, s)f_1(s)ds \right\} = 0$$

де  $P_{D^*}$  -  $(n-s) \times (n-s)$ -вимірний ортопроектор. В цьому випадку, загальний розв'язок системи (1) обмежений на  $\mathbb{R}$  має форму (11), де константа  $\xi \in \mathbb{R}^{n-s}$  визначається з системи (13) наступним чином:

$$\xi = P_{D^*}c + D^+\Theta,$$

$$\Theta = \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s)f_1(s)ds + \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, s)f_1(s)ds, \quad (14)$$

де  $c \in \mathbb{R}^{n-s}$ ;  $D^+$  - псевдообернена по Муру-Пенроузу матриця до матриці  $D$ . Оскільки  $P_{D^*}D = 0$ , тоді  $P_{D^*}V = P_{D^*}(I-U)$ . Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку системи (1) має вигляд

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0, s)f_1(s)ds = 0. \quad (15)$$

Якщо підставимо константу  $\xi$  в (11), ми отримаємо загальний розв'язок системи (1) обмежений на всій дійсній осі у вигляді

$$x(t, c) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t, 0)P_{D^*}c + \Omega^+(t, 0)D^+\Theta + \\ + \int_0^t \Omega^+(t, s)f_1(s)ds - \\ - \int_t^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t, s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t, 0)P_{D^*}c + \tilde{\Omega}^-(t, 0)D^+\Theta + \\ + \int_{-\infty}^t \Omega^-(t, s)f_1(s)ds - \\ - \int_t^0 \tilde{\Omega}^-(t, s)f_1(s)ds \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Розглянемо питання існування обмежених на всій осі розв'язків диференціально-алгебраїчної системи з імпульсною дією в фіксовані моменти часу (1), (2). Для цього припустимо, що відповідна однорідна імпульсна система

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= M(t)x_1, \\ \Delta x_1|_{t=\tau_i} &= B_i x_1 \end{aligned} \quad (17)$$

експоненціально-дихотомічна на півосях, тобто існують проектори  $U$  та  $V(U^2 =$

$U, V^2 = V$ ) і константи  $K_i \geq 1, \alpha_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) такі, що виконуються нерівності (10), де  $X(t)$  - фундаментальна матриця системи (17). Справедливою є наступна теорема.

**Теорема 1.** Припустимо, що лінійна однорідна імпульсна система (17) експоненціально-дихотомічна на півосях  $R_- = (-\infty, 0]$  і  $R_+ = [0, \infty)$  з проекторами  $U$  та  $V$  відповідно, функція  $f_2(t) \in \mathbb{C}^{s-1}(\mathbb{R})$ , а також виконується нерівність (3), тоді справедливі наступні твердження:

1. для існування обмеженого на всій дійсній осі розв'язку диференціально-алгебраїчної системи (1), (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0, s)f_1(s)ds + \\ & + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_{D^*}\Omega^-(0, \tau_i)b_i + b_0 = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

2. за умови (18), розв'язок системи (1), (2) обмежений на всій осі має вигляд

$$x(t, c) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t, 0)P_{D^*}c + \\ + \Omega^+(t, 0)D^+\Theta + \\ + \int_0^t \Omega^+(t, s)f_1(s)ds - \\ - \int_t^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t, s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=1}^j \Omega^+(t, \tau_i)b_i - \\ - \sum_{i=j+1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t, \tau_i)b_i \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t, 0)P_{D^*}c + \\ + \tilde{\Omega}^-(t, 0)D^+\Theta + \\ + \int_{-\infty}^t \Omega^-(t, s)f_1(s)ds - \\ - \int_t^0 \tilde{\Omega}^-(t, s)f_1(s)ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{-(j+1)} \Omega^-(t, \tau_i)b_i - \\ - \sum_{i=-j}^{-1} \tilde{\Omega}^-(t, s)b_i \\ r(t) \end{bmatrix}, & t \leq 0. \end{cases} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \Theta = & \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s) f_1(s) ds + \\ & + \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, s) f_1(s) ds + \\ & + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^-(0, \tau_i) b_i + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, \tau_i) b_i + b_0 \end{aligned}$$

**Доведення.** Аналогічно як для диференціально-алгебраїчної системи без імпульсів, запишемо загальний розв'язок системи (1), (2) обмежений на півосях у вигляді

$$x(t, \xi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega^+(t, 0) \xi + \\ + \int_0^t \Omega^+(t, s) f_1(s) ds - \\ - \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t, s) f_1(s) ds + \\ + \sum_{i=1}^j \Omega^+(t, \tau_i) b_i - \\ - \sum_{i=j+1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(t, \tau_i) b_i, \\ r(t) \end{bmatrix} & t \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^-(t, 0) \xi + \\ + \int_{-\infty}^t \Omega^-(t, s) f_1(s) ds - \\ - \int_t^{\infty} \tilde{\Omega}^-(t, s) f_1(s) ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{-(j+1)} \Omega^-(t, \tau_i) b_i - \\ - \sum_{i=-j}^{-1} \tilde{\Omega}^-(t, \tau_i) b_i, \\ r(t) \end{bmatrix} & t \leq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Припускаємо, що розв'язок неперервний у точці  $t = 0$

$$x(0+, \xi) - x(0-, \xi) = b_0,$$

тобто розв'язок (20) буде обмежений на  $\mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли вектор  $\xi \in \mathbb{R}^n$  задовольняє умову

$$\begin{aligned} D\xi = & \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s) f_1(s) ds + \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, s) f_1(s) ds + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, \tau_i) b_i + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^-(0, \tau_i) b_i + b_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ця система, в свою чергу, розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\begin{aligned} P_D^* \left\{ \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s) f_1(s) ds + \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, s) f_1(s) ds + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, \tau_i) b_i + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^-(0, \tau_i) b_i + b_0 \right\} = 0. \end{aligned}$$

В цьому випадку, розв'язок системи (1), (2) обмежений на  $\mathbb{R}$  буде мати вигляд (20), де сталий вектор  $\xi$  визначається з системи (21) наступним чином:

$$\begin{aligned} \xi = P_D c + D^+ \left\{ \int_{-\infty}^0 \Omega^-(0, s) f_1(s) ds + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, s) f_1(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}^+(0, \tau_i) b_i + \right. \\ \left. + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Omega^-(0, \tau_i) b_i + b_0 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Оскільки  $P_D^* D = 0$ , отримаємо  $P_D^* V = P_D^* (I - U)$ . Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку (1), (2) має вигляд

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} P_D^* \Omega^-(0, s) f_1(s) ds + \\ & + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_D^* \Omega^-(0, \tau_i) b_i + b_0 = 0. \end{aligned}$$

Покажемо, що розв'язок (19) обмежений. Розглянемо перші  $n - s$  рядків цього розв'язку у випадку коли  $t > 0$  і доведемо збіжність відповідних інтегралів і сум.

$$\|\Omega^+(t, 0) P_D c\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} P_D c = K_3 e^{-\alpha_1 t},$$

$$\begin{aligned} & \|\Omega^+(t, 0) D^+ \Theta\| \leq \\ & \leq K_1 e^{-\alpha_1 t} D^+ \left\{ \int_{-\infty}^0 K_2 e^{\alpha_2 s} \|f_1(s)\| ds + \right. \\ & + \int_0^{\infty} K_1 e^{-\alpha_1 s} \|f_1(s)\| ds + \\ & + \sum_{i=-\infty}^{-1} K_2 e^{\alpha_2 \tau_i} \|b_i\| + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} K_1 e^{-\alpha_1 \tau_i} \|b_i\| + \|b_0\| \left. \right\} \leq \\ & \leq K_4 e^{-\alpha_1 t} \left\{ \left[ \frac{K_2}{\alpha_2} + \frac{K_1}{\alpha_1} \right] \|f_1(t)\| + \right. \\ & + \left[ \frac{K_2}{1-e^{\alpha_2}} + \frac{K_1}{1-e^{-\alpha_1}} \right] \|b_i\| + \|b_0\| \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \Omega^+(t,s) f_1(s) ds - \int_t^\infty \tilde{\Omega}^+(t,s) f_1(s) ds \right\| &\leq \\ &\leq \int_0^t K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \|f_1(s)\| ds + \\ &+ \int_t^\infty K_1 e^{-\alpha_1(s-t)} \|f_1(s)\| ds \leq \frac{2K_1}{\alpha_1} \|f_1(t)\| \end{aligned}$$

В силу (3), будь-який проміжок осі  $t$  довжини  $l$  містить не більше як  $q$  точок послідовності  $\{\tau_i\}$ . Тоді для  $j \geq i$  маємо

$$\begin{aligned} j - i + 1 &\leq q \left( \left\lceil \frac{\tau_j - \tau_i}{l} \right\rceil + 1 \right) \leq \\ &\leq q \left( \frac{\tau_j - \tau_i}{l} + 1 \right), \end{aligned}$$

звідки

$$\tau_j - \tau_i \leq l \left( \frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{1}{q}(j - i).$$

Тому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^j \Omega^+(t, \tau_i) b_i - \sum_{i=j+1}^\infty \tilde{\Omega}^+(t, \tau_i) b_i \right\| &\leq \\ &\leq K_1 \left\{ \sum_{\tau_i \leq t} e^{-\alpha_1(t-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > t} e^{\alpha_1(t-\tau_i)} \right\} \|b_i\| \leq \\ &\leq K_1 \left\{ \sum_{\tau_i \leq \tau_j} e^{-\alpha_1(\tau_j - \tau_i)} + \sum_{\tau_i > \tau_j} e^{\alpha_1(\tau_j - \tau_i)} \right\} \|b_i\| \leq \\ &\leq 2K_1 e^{\alpha_1 l (1 - \frac{1}{q})} \sum_{m=0}^\infty e^{-\frac{\alpha_1 l m}{q}} \|b_i\| = \\ &= \frac{2K_1 e^{\alpha_1 l (1 - \frac{1}{q})}}{1 - e^{-\frac{\alpha_1 l}{q}}} \|b_i\| \end{aligned}$$

Обмеженість інших  $s$  рядків впливає з умов накладених на функцію  $f_2(t)$ . Аналогічним чином доводиться збіжність інтегралів і сум для випадку коли  $t < 0$ . Теорему доведено.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Campbell, S., Petzold, L.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1983, Volume 4, 517-521 pp.
2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. - К.: Вища шк., 2000. - 294 с.
3. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. - 223с.
4. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. - Новосибирск: Наука, 2003 - 320с.

5. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary value problems. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317p.

6. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К.: Вища шк., 1987. - 228 с.