517.956

©2016 р. **Т. О. Дерев'янко, М. О. Середяк**

Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НАПІВЛІНІЙНОЮ ГІПЕРБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ І НЕСКІНЧЕННИМ ГОРИЗОНТОМ ПЛАНУВАННЯ

Шляхом використання результатів абстрактної теорії оптимального керування та теорії гіперболічних систем напівлінійних рівнянь, виведено необхідні умови оптимальності задачі оптимального керування напівлінійною гіперболічною системою з нелокальними крайовими умовами і нескінченним горизонтом планування.

By using the results of the abstract optimal control theory and the theory of semilinear hyperbolic equations we establish necessary conditions for optimality in the problem of optimal control of semilinear hyperbolic system with nonlocal boundary conditions and infinite planning horizon.

1. Вступ. Серед всієї різноманітності моделей біологічних популяцій важливе місце займають моделі, структуровані за віком або розміром своїх індивідуумів. Таким моделям притаманні використання теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та інтегральних рівнянь, які використовуються для відображення залежності між параметрами популяції, такими як народжуваність і смертність, вік, чисельність, стадія розвитку індивідуумів. Однією з таких моделей є лінійна модель Мак Кендріка або вікова модель Лотка-Фоерстера, еволюційне рівняння яких має вигляд [1,2]

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau} = -\mu(t,\tau)x(t,\tau),$$
$$t \in [0,+\infty),\ \tau \in [0,A],$$

де $x(t,\tau)$ – щільність популяції, розподіленої за віком, що представляє кількість індивідуумів популяції віку τ в момент часу t, $\mu(t,\tau)$ – рівень смертності осіб віку τ в момент часу t, A – максимально можливий вік індивідуума. Початковий розподіл осіб популяції за віком вважається відомим

$$x(0,\tau) = \phi(\tau),\ \tau \in [0,A].$$

а загальна кількість новонароджених в момент часу t визначається співвідношеннями

$$x(t,0) = \int_0^A m(t,\tau)x(t,\tau)d\tau,\ t \in [A,+\infty),$$

$$x(t,0) = \int_{t-A}^{0} m(t,t-\tau)\phi(t-\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t m(t,\tau)x(t,\tau)d\tau,\ t \in [0,A],$$

де через $m(t,\tau)$ позначено коефіцієнт народжуваності, який відображає середню кількість новонароджених від одного індивідуума віку τ в момент часу t. Особи, які дають потомство в момент часу t розбиваються на дві групи: особи, які приходять в популяцію з "доісторичного періоду" $[t-A,0]$ з своїм розподілом $\phi(\tau)$ і тих осіб, які народжуються в період часу $[0,t]$.

Варто зазначити, що усі параметри в аналогічних до вище описаних моделей є нелінійними, а залежності складними. Для прикладу, наведемо вигляд еволюційного рівняння у випадку моделі з віковою структурою і внутрішньовидовою конкуренцією

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau} =$$
$$= -\left[\mu(t,\tau) + \int\limits_0^A b(\tau,s)x(t,s)ds\right] x(t,\tau),$$
$$t \in [0,+\infty),\ \tau \in [0,A],$$

тут $b(\tau,s)$ – смертність особин віку τ, яка спричинена особами віку ξ (інтенсивність внутрішньовидової конкуренції).

Теорія оптимального керування і оптимізації тісно пов'язана з моделюванням біологічних популяцій. Функції керування вводяться в популяційних моделях для вирішення деяких прикладних задач, таких, як раціональне використання ресурсів, підбір видів, збору, модифікація сільськогосподарських культур, захист видів тощо. Елементи керування можуть бути структуровані за віком або розміром, залежати від часу, бути одно- або багатовимірними. Прикладом задачі оптимального керування для згаданих вище моделей структурованих за віком є наступна задача оптимального керування з керованою смертністю

$$\max_{u,p,x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-rt}\left(\int\limits_0^A c(t,\tau)u(t,\tau)d\tau - k(t)p(t)\right)dt,$$

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau} = -\mu(t,\tau)x(t,\tau) - u(t,\tau),$$
$$0 \leqslant u(t,\tau) \leqslant u_{max}, 0 \leqslant p(t) \leqslant p_{max}, x(t,\tau) \geqslant 0,$$
$$x(0,\tau) = x_0(\tau),\ \tau \in [0,A],$$
$$x(t,0) = p(t),\ t \in [0,+\infty),$$

де r – рівень дисконтування, $c(t,\tau)$ – ринкова вартість однієї одиниці впливу на смертність, $p(t)$ – вартість введення в популяцію одного нового індивідуума. Відзначимо, крайовоі умови в задачах оптимального керування може бути більш складними, наприклад, крайова умова може бути не локальною (інтегральною), як у моделі Мак Кендріка. Дослідження задач оптимального керування для популяційних моделей не зводиться до лінійних задач оптимального керування. Прикладом цього є структурована за розміром узагальнена нелінійна модель Гартіна – Мак Камі

$$\max_{w,p,x,E}\int\limits_0^{+\infty} e^{-rt}\left(\int\limits_{l_0}^{l_m} c(t,l)w(t,l)x(t,l)dl - k(t)p(t)\right)dt,$$

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + \frac{\partial [g(E(t),l)x(t,l)]}{\partial l} =$$
$$= -\mu(E(t),l)x(t,l) - w(t,l),$$

$$E(t) = \int\limits_{l_0}^{l_m} \chi(l)x(t,l)dl,$$

$$0 \leqslant w(t,\tau) \leqslant w_{max},\ 0 \leqslant p(t) \leqslant p_{max},$$
$$x(0,l) = x_0(l),\ \tau \in [l_0,l_m],$$
$$g(E(t),l_0)x(t,l_0) = p(t),\ t \in [0,+\infty).$$

Нелінійність параметрів біологічних популяцій та складність нелінійних зв'язків не дозволяє побудувати загальну модель для дослідження питання керованості популяцією з віковою структурою чи популяцією структурованою за розміром її індивідуумів.

Об'єктом дослідження цієї роботи є задачі оптимального керування для напівлінійних гіперболічних систем першого порядку з нелокальними крайовими умовами, що певним чином узагальнює вищенаведені моделі. Керування еволюційним процесом, що описується напівлінійною системою гіперболічних рівнянь відбувається в крайових і початкових умовах, що цілком відповідає можливості керувати рівнем народжуваності чи початковим розподілом за віком індивідуумів в моделі Мак Кендріка.

У роботі використано нестандартну слабку варіацію, яка дозволяє уникнути накладання додаткових нелінійних алгебраїчних обмежень на керування і стан системи. Шляхом використання результатів абстрактної теорії оптимального керування одержано необхідні умови оптимальності. Для яких можна використати чисельні методи наведені в роботі [1].

2. Формулювання задачі. Еволюція деякого n-вимірного процесу $y = y(x,t)$ в необмеженій півсмузі $(x,t) \in \Pi = (0,l) \times (0,+\infty)$ описується виродженою напівлінійною системою гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \\ = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_1}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_3}, \tag{3}$$

$$z_i(x,t;y) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} g_i(y(s,t), x, t, s)ds, \tag{4}$$

$$i \in I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3},$$

де $card(I_{m_j}) = m_j$ $(j = 1,2,3)$, $y : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функція розв'язку, $\lambda_i : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}^{2n} \times \Pi \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \mathbb{R}, z_i : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}$ – нелінійні функції. Без обмеження загальності, припустимо, що для всіх $i \in I_{m_1}$ функції $\lambda_i = \lambda_i(x,t)$ приймають додатні або від'ємні значення.

Розглянемо множини: $I = I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3}$, $I_0 = \{i \in I_{m_1} | \lambda_i(x,t) > 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\}$, $I_l = \{i \in I_{m_1} | \lambda_i(x,t) < 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\}$, де $card(I) = n$, $card(I_0) = m_0$, $card(I_l) = m_1 - m_0$. Тобто, без обмеження загальності, для (1) будемо вважати, що перші m_0 функцій $\lambda_i(x,t)$ є додатніми, а інші $(m_1 - m_0)$ – від'ємні.

Позначимо через $\mathcal{U}$ – простір керувань, який складається з неперервно-диференційовних на $[0,l]$ вектор-функцій $u = (u^{(0)}(x), u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), u^{(3)}(t))$, таких, що для компактів U^k $(k \in \{1,2,3\})$: $u^{(k)} : \mathbb{R}_+ \to U^k,\ U^k \subset \mathbb{R}^{r_k}, r_k \in \mathbb{N}$, $u^{(0)} : [0,l] \to U^0,\ U^0 \subset \mathbb{R}^{r_0}, r_0 \in \mathbb{N}$.

Для системи (1)–(3) задамо нелінійні початкові та нелокальні крайові умови:

$$y_i(x,0) = y_i^0(u^{(0)}(x), x),\ x \in [0,l],\ i \notin I_{m_3}, \tag{5}$$

$$y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(1)}(s), s, t)ds, \tag{6}$$

$$t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_0,$$

$$y_i(l,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^l(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(2)}(s), s, t)ds, \tag{7}$$

$$t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_l,$$

$$y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(3)}(s), s, t)ds, \tag{8}$$

$$t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_{m_3}.$$

Тут $u \in \mathcal{U}$; $y_i^0 : U^{(0)} \times [0,l] \to \mathbb{R}^n (i \notin I_{m_3}), \gamma_i^0 : \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$ $(i \in I_0)$, $\gamma_i^l : \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$ $(i \in I_l)$, $\gamma_i^0 : \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$ $(i \in I_{m_3})$; $s_i^1, s_i^2 \in C[0;+\infty)$ – функції, що задовольняють умову: $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $0 \le s_i^1(t) < s_i^2(t) \le l$ $\forall i \in I$.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u) = \iint\limits_{\Pi} G(y(x,t), x, t)dxdt, \tag{9}$$

де $G : \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$, причому ця функція є вимірною на $[0,+\infty)$ для довільної функції y з простору $\mathcal{Q}$, який введено нижче. Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u), \tag{10}$$

де мінімум береться по тих $u \in \mathcal{U}$, для яких існує єдиний узгоджений розв'язок задачі (1)–(5) в сенсі наведеного нижче означення.

3. Існування та єдиність розв'язку задачі (1) – (5)**.** Нехай виконуються умови:

A1) $\lambda_i \in C(\overline{\Pi}) \cap Lip_x(\overline{\Pi})$ $\forall i \in I_{m_1}$, $\sup\limits_{\substack{i \in I_{m_1}, \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)| < +\infty$;

A2) $f_i \in C(\mathbb{R}^{2n} \times \overline{\Pi}) \cap Lip_{y,z}(\mathbb{R}^{2n} \times \overline{\Pi})$ $\forall i \in I$, $\sup\limits_{\substack{i \in I, \\ (y,z,x,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \Pi}} |f_i(y,z,x,t)|\, e^{-at} < +\infty$;

A3) $y_i^0 \in C(U^0 \times [0,l]) \; \forall i \notin I_{m_3}$;

A4) $\gamma_i^0 \in C(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi}) \cap Lip_y(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi})$ $i \in I_0$,
$$\sup_{\substack{i\in I_0,\\ (y,u^{(1)},x,t)\in\mathbb{R}^{n-m_3}\times U^1\times\overline{\Pi}}} \left|\gamma_i^0(y,u^{(1)},t)\right| e^{-at} < +\infty,$$
$\gamma_i^l \in C(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi}) \cap Lip_y(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi})$ $i \in I_l$,
$$\sup_{\substack{i\in I_l,\\ (y,u^{(2)},x,t)\in\mathbb{R}^{n-m_3}\times U^2\times\overline{\Pi}}} \left|\gamma_i^l(y,u^{(2)},t)\right| e^{-at} < +\infty;$$
$\gamma_i^0 \in C(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi}) \cap Lip_y(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi})$ $i \in I_{m_3}$,
$$\sup_{\substack{i\in I_{m_3},\\ (y,u^{(3)},x,t)\in\mathbb{R}^{n}\times U^3\times\overline{\Pi}}} \left|\gamma_i^0(y,u^{(3)},t)\right| e^{-at} < +\infty;$$

A5) $u^{(k)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_k}, k \in \{1,2,3\}$,
$u^{(0)} \in (C[0,l])^{r_0}$.

Розглянемо простір $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$, елементами якого є набори керувань $u \in \mathcal{U}$, що задовольняють умови:
$$u^{(k)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_k} \;\; (k \in \{1,2,3\}),$$
$$u^{(0)} \in (C[0,l])^{r_0};$$

$$\forall i \in I_0 : y_i^0(u^{(0)}(0),0) =$$
$$= \int\limits_{s_i^1(0)}^{s_i^2(0)} \gamma_i^0(y_j^0(u^{(0)}(s),s)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(1)}(s), s, 0)ds;$$

$$\forall i \in I_l : y_i^0(u^{(0)}(l),l) =$$
$$= \int\limits_{s_i^1(0)}^{s_i^2(0)} \gamma_i^0(y_j^0(u^{(0)}(s),s)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(2)}(s), s, 0)ds;$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \;\; u^{(k)}(t) \in U^k \;\; (k \in \{1,2,3\}),$$
$$\forall x \in [0,l] : \;\; u^{(0)}(x) \in U^0$$
де $y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$.

Для довільного елемента $u \in \mathcal{U}_{ad}$, позначимо:
$$y_i^0(u^{(0)}(x),x) = \tilde{y}_i^0(x), \;\; x \in [0,l], \;\; i \notin I_{m_3};$$

$$\gamma_i^0(y_j(x,t)_{j\notin I_{m3}}, u^{(1)}(x), x, t) =$$
$$= \tilde{\gamma}_i^0(y_j(x,t)_{j\notin I_{m3}}, x, t), \;\; i \in I_0;$$

$$\gamma_i^l(y_j(x,t)_{j\notin I_{m3}}, u^{(2)}(x), x, t) =$$
$$= \tilde{\gamma}_i^l(y_j(x,t)_{j\notin I_{m3}}, x, t), \;\; i \in I_l;$$

$$\gamma_i^0(y_j(x,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(3)}(x), x, t) =$$
$$= \tilde{\gamma}_i^0(y_j(x,t)_{j\notin I_{m_3}}, x, t), \;\; i \in I_{m_3}.$$

Нехай L узагальнена стала Ліпшиця для усіх вихідних даних за змінною y, тоді, наприклад, для функції $f_i = f_i(y,x,t)$ – це означатиме виконання умови
$$|f_i(y^1,x,t) - f_i(y^2,x,t)| \leqslant L \max_{j\in I} |y_j^1 - y_j^2|,$$
$$\forall y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n \; \forall (x,t) \in \overline{\Pi},$$
а Λ стала, що обмежує власні значення характеристичної матриці системи (1) за абсолютною величиною
$$\Lambda = \sup_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|\,.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для $i \in I$ визначимо функції
$$\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) = \begin{cases} e^{-px-at}, & i \in I_0 \cup I_{m_2}, \\ e^{p(l-x)-at}, & i \in I_l, \\ \varepsilon e^{-px-at}, & i \in I_{m_3}; \end{cases}$$
з вибраними параметрами a, p та ε:
$$p = 16L;$$
$$\varepsilon = \frac{1}{L}\min\left\{\frac{1}{4L+3}, \frac{1}{8lL(1+\frac{1}{p})}, \frac{1}{8Le^{2p}}\right\};$$
$$a = \max\left\{p\Lambda, \frac{32e^{\frac{pl^2}{2}}L^3}{\varepsilon}, \frac{32e^{\frac{pl}{2}}L^3}{\varepsilon}\right\}.$$

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau;x,t)$ розв'язоки задач Коші
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau), \;\; \xi\big|_{\tau=t} = x, \;\; i \in I_{m_1}$$
та
$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0, \;\; \xi\big|_{\tau=t} = x, \;\; i \in I_{m_2},$$

які називатимемо характеристиками системи (1)–(2).

Для (3) відповідна характеристика $\tau = t$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{d\tau}{ds} = 0, \ \tau\big|_{\xi=x} = t, \ i \in I_{m_3}.$$

Нехай $\chi_i(x,t)$, $\nu_i(x,t)$ точки перетину характеристик системи (1)–(3) з межею області Π, причому $\chi_i(x,t) \leqslant \nu_i(x,t), \ i \in I$. Зазначимо, що $\nu_i(x,t) \equiv +\infty$ для $i \in I_{m_2}$.

Для зручності введемо позначення, для значення розв'язку на характеристиці $y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)$ і функції залежної від розв'язку на характеристиці $f(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)$ наступним чином $y[\varphi_i(\tau)]$ та $f[y[\varphi_i(\tau)]]$, відповідно.

Уведемо області:

$$\Pi^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \ \chi_i(x,t) = 0\right\}, \ i \notin I_{m_3};$$

$$\Pi_0^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = 0\right\}, \ i \in I_0;$$

$$\Pi_l^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = l\right\}, \ i \in I_l.$$

Проінтегрувавши (1)–(3) вздовж характеристик, одержимо систему інтегро-операторних рівнянь

$$y_i(x,t) = \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t) + \tag{11}$$

$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y_j[\varphi_i(\tau)], z[\varphi_i(\tau)], \varphi_i(\tau), \tau)d\tau, i \notin I_{m_3},$$

$$y_i(x,t) = \tilde{\gamma}_i^0(t) + \tag{12}$$

$$+ \int\limits_0^x f_i(y(s,t), z(s,t), s, t)ds, \ i \in I_{m_3},$$

де, $\mathfrak{R}_i[y](x,t) = y_i^0(\varphi(0;x,t))$, $(x,t) \in \Pi^i$ для всіх $i \notin I_{m_3}$; аналогічно $\mathfrak{R}_i[y](x,t) = \int\limits_{s_i^1(\chi_i(x,t))}^{s_i^2(\chi_i(x,t))} \gamma_i^0(y_j(s,\chi_i(x,t))_{j\notin I_{m3}}, s, \chi_i(x,t))ds,$ $(x,t) \in \Pi_0^i$ для $i \in I_0$; $\mathfrak{R}_i[y](x,t) = \int\limits_{s_i^1(\chi_i(x,t))}^{s_i^2(\chi_i(x,t))} \gamma_i^l(y_j(s,\chi_i(x,t))_{j\notin I_{m3}}, s, \chi_i(x,t))ds,$ $(x,t) \in \Pi_l^i$ для $i \in I_l$.

Розглянемо метричний простір

$$\mathcal{Q} = \left\{y \in \left(C(\overline{\Pi})\right)^n \cap \left(B(\overline{\Pi})\right)^n | \right.$$
$$y_i(\varphi_i(\cdot;x,t),\cdot) \in AC\left[\chi_i(x,t),\nu_i(x,t)\right],$$
$$\left. i \in I, \ (x,t) \in \overline{\Pi}\right\},$$

де $B(\overline{\Pi})$ – простір обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}$ за нормою простору $\mathcal{Q}$, а через $AC\left[\chi_i(x,t),\nu_i(x,t)\right\rangle$ позначатимемо простір абсолютно неперервних функцій на множині $[\chi_i(x,t),\nu_i(x,t)\rangle$ (тут під $\rangle$ розумітимемо $)$ або $]$ відповідно до того, приймає чи не приймає ν_i значення $+\infty$).

Означення. *Під узагальненим розв'язком задачі* (1)–(5)*, що відповідає набору керувань* $u \in \mathcal{U}_{ad}$*, будемо розуміти вектор-функцію* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{Q}$*, компоненти якої задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь* (11)–(12) *в* $\overline{\Pi}$.

Щоб підкреслити залежність розв'язку задачі від незалежних змінних будемо вживати позначення $y = y(x,t;u)$, або $y = y(u)$, коли потрібно підкреслити залежність тільки від керування.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови:*

1) ***A1)*** *-* ***A5)****;*

2) умови погодження нульового порядку

$$\int\limits_{s_i^1(0)}^{s_i^2(0)} \gamma_i^0(y^0(u^{(0)}(s),s), u^{(1)}(s), s, 0)ds =$$
$$= y_i^0(u^{(0)}(0),0) \ i \in I_0,$$

$$\int\limits_{s_i^1(0)}^{s_i^2(0)} \gamma_i^0(y^0(u^{(0)}(s),s), u^{(1)}(s), s, 0)ds =$$
$$= y_i^0(u^{(0)}(l),l) \ i \in I_l.$$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).

Доведення. На елементах простору $\mathcal{Q}$ визначимо метрику $\rho_\alpha(y^1,y^2) = \|y^1 - y^2\|_\alpha$, яка породжена нормою

$$\|y\|_\alpha = \sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$$

та нелінійний вектор-оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ такий, що

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t) + \\ + \int_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i[y[\varphi_i(\tau)], z[\varphi_i(\tau)]]d\tau, i \notin I_{m_3},$$

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \tilde{\gamma}_i^0(t) + \\ + \int_0^x f_i(y(s,t), z(s,t), s, t)ds,\ i \in I_{m_3}.$$

Зазначимо, що введений простір $\mathcal{Q}$ є повний, доведення повноти цього простору з незначними змінами повторює доведення повноти простору неперервних і обмежених функцій на необмеженій множині з рівномірною метрикою, яке в свою чергу є узагальненням повноти простору неперервних функцій на обмеженій множині з рівномірною метрикою.

Отже відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)–(5) зводиться до відшукання нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$. Використовуючи теорему Банаха про стискуюче відображення, встановимо існування та єдиність нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$.

Візьмемо довільні два різні елементи y^1, y^2 з простору $\mathcal{Q}$. Тоді в даному просторі, для всіх допустимих i, x, t справджується

$$\left|y_i^1(x,t) - y_i^2(x,t)\right| \leqslant \rho_\alpha(y^1, y^2)\alpha_i^{-1}(x,t;a,p,\varepsilon).$$

З визначення $\chi_i(x,t)$, легко отримати оцінки [2]:

$$\begin{array}{ll} \chi_i(x,t) \leqslant t - x/\Lambda, & i \in I_0; \\ \chi_i(x,t) \leqslant t - (l-x)/\Lambda, & i \in I_l. \end{array}$$

Для всіх $i \notin I_{m_3}$, справедлива оцінка:

$$\left|\mathfrak{R}_i[y^1](x,t) - \mathfrak{R}_i[y^2](x,t)\right| \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant L \max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \notin I_{m_3}}} \left\{ \int_{s_i^1(\chi_i(x,t))}^{s_i^2(\chi_i(x,t))} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} ds \right\} \times \\ \times \rho_\alpha(y^1, y^2);$$

Враховуючи попередню оцінку, для компонент оператора $\mathcal{A}$ маємо

$$\left|\mathcal{A}_i[y^1](x,t) - \mathcal{A}_i[y^2](x,t)\right| \alpha_i(x,t;a,p) \leqslant \\ \leqslant L \left(\max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \notin I_{m_3}}} \int_{s_i^1(\chi_i(x,t))}^{s_i^2(\chi_i(x,t))} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} ds + \right. \\ + \max_{\substack{i \in I_{m_3}, \\ j \notin I_{m_3}}} \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(s,t;a,p)} ds + \\ + \int_0^t \max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \in I, \\ s,x \in [0,l]}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma + \\ + \int_0^t \int_{s_i^1(\sigma)}^{s_i^2(\sigma)} \max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \in I, \\ s,x \in [0,l]}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} ds d\sigma + \\ + \int_0^x \max_{\substack{i \in I_{m_3}, \\ j \in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} ds + \\ \left. + \int_0^x \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \max_{\substack{i \in I_{m_3}, \\ j \in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,t;a,p,\varepsilon)} ds ds \right) \rho_\alpha(y^1, y^2).$$

Дослідимо на максимум функції в коефіцієнті стиску оператора $\mathcal{A}$. З вибору параметрів a та p справедлива нерівність

$$p\Lambda \max\{1, l\} < a,$$

з якої для всіх $(x,t) \in \Pi$

$$\max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \notin I_{m_3}}} \int_{s_i^1(\chi_i(x,t))}^{s_i^2(\chi_i(x,t))} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} ds < \frac{1}{p},$$

та

$$\max_{\substack{i \in I_{m_3}, \\ j \notin I_{m_3}}} \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,t;a,p,\varepsilon)} ds < \frac{\varepsilon e^{pl}}{p},$$

$$\int_0^t \max_{\substack{i \notin I_{m_3}, \\ j \in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma < \frac{e^{pl \max\{1,l\}/2}}{a\varepsilon},$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{s_i^1(\sigma)}^{s_i^2(\sigma)} \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} ds d\sigma < \frac{e^{pl\max\{1,l\}/2}}{a\varepsilon},$$

$$\int\limits_0^x \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} ds < \varepsilon e^{2p} + \frac{1}{p},$$

$$\int\limits_0^x \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,t;a,p,\varepsilon)} dsds < \varepsilon l(1+\frac{1}{p}).$$

Звідси, для вибраних параметрів a, p, ε, отримаємо

$$\rho(\mathcal{A}[y^1], \mathcal{A}[y^2]) \leqslant \frac{1}{2}\rho_\alpha(y^1, y^2).$$

Отже оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах повного метричного простору $\mathcal{Q}$ з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$ та параметрами a, p.

Тому, за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в метричному просторі $\mathcal{Q}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (1)–(5) при довільному $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

Зауваження. *Справедливою є формула інтегрування частинами для елементів простору $\mathcal{Q}$ вздовж відповідних сімей характеристик. Доведення цього випливає із подібного факту в [5].*

4. Задача лінеризації. Додатково вимагатимемо, щоб:

B1) $\lambda_i \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi}),\ i \in I_{m_1}$;

B2) $f_i \in C^{1,1,0,0}_{y,z,x,t}(\mathbb{R}^{2n} \times \overline{\Pi})$;

B3) $g_i \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}),\ i \in I$;

B4) $y_i^0 \in C^{1,0}_{u,x}(U \times [0,l]),\ i \notin I_{m_3}$;

B5) $\gamma_i^0 \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(1)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi}),\ i \in I_0$;

B6) $\gamma_i^0 \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(3)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi}),\ i \in I_3$;

B7) $\gamma_i^l \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(2)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi}),\ i \in I_l$;

B8) $G \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})$.

Розглянемо випадок коли керування системою (1)–(3) здійснюємо тільки за допомогою керуючого впливу в початкових умовах.

Нехай маємо два допустимі процеси $\{y, u\}$ та $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$, де $\widetilde{y} = y + \Delta y$, $\widetilde{u} = u + \Delta u$. Тоді $\Delta y = \widetilde{y} - y$ та $\Delta u = \widetilde{u} - u$ задовольняють таку крайову задачу для гіперболічної системи

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} = \Delta_y f(y, z(y), x, t),\ i \in I_{m_1}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} = \Delta_y f_i(y, z(y), x, t),\ i \in I_{m_2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} = \Delta_y f_i(y, z(y), x, t), i \in I_{m_3}, \tag{15}$$

$$\Delta_y z_i(x,t;y) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \Delta_y g_i(y(s,t), x, t, s) ds, \tag{16}$$

$$i \in I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3},$$

$$\Delta y_i(x,0) = \Delta_u \tilde{y}_i^0(u(x), x), \tag{17}$$
$$x \in [0,l],\ i \notin I_{m_3},$$

$$\Delta y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \Delta_y \tilde{\gamma}_i^0(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, s, t) ds, \tag{18}$$

$$i \in I_0, t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Delta y_i(l,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \Delta_y \tilde{\gamma}_i^l(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, s, t) ds, \tag{19}$$

$$i \in I_l, t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Delta y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \Delta_y \tilde{\gamma}_i^0(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, s, t) ds, \tag{20}$$

$$i \in I_{m_3}, t \in \mathbb{R}_+,$$

де, наприклад, $\Delta_y f(y, z(y), x, t) = f(\widetilde{y}, z(\widetilde{y}), x, t) - f(y, z(y), x, t)$.

Приріст цільового функціоналу (5) має вигляд

$$\Delta_{u^{(0)}}J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \\ = \iint\limits_{\Pi} \Delta_y G(y(x,t),x,t)dxdt,$$

який, з урахуванням (13)–(15), можна представити як

$$\Delta J(u) = \iint\limits_{\Pi} \Delta_y G(y(x,t),x,t)dxdt+ \quad (21)$$
$$+\iint\limits_{\Pi} \sum_{i\in I_{m1}} \psi_i(x,t)\left(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+\lambda_i(x,t)\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x}-\Delta_y f_i(y,z(y),x,t)\right)dxdt+$$
$$+\iint\limits_{\Pi} \sum_{i\in I_{m2}} \psi_i(x,t)\Big(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t}-$$
$$-\Delta_y f_i(y,z(y),x,t)\Big)dxdt+$$
$$+\iint\limits_{\Pi} \sum_{i\in I_{m3}} \psi_i(x,t)\Big(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x}-$$
$$-\Delta_y f_i(y,z(y),x,t)\Big)dxdt,$$

де $\psi = \psi(x,t)$ – вектор-функція з простору $\mathcal{Q}$.

Уведемо функції

$$H(\psi,y,z,x,t) = \sum_{i\in I} \psi_i(x,t) f_i(y,z,x,t)- \\ -G(y,x,t),$$

$$h(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x) = \\ = \sum_{i\notin I_{m_3}} \psi(x,0) y^0(u^{(0)}(x),x),$$

$$h^1(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(1)}(t), s, t) = \\ =\sum_{i\in I_0} \psi_i(0,t)\lambda_i(0,t)\gamma_i^0(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(1)}(t),t)\mathbb{I}_i,$$

$$h^2(\psi_j(l,t)_{j\in I_l}, y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(2)}(t), s, t) = \\ =\sum_{i\in I_l} \psi_i(l,t)\lambda_i(l,t)\gamma_i^l(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(2)}(t),t)\mathbb{I}_i.$$

$$h^3(\psi_j(0,t)_{j\in I_{m_3}}, y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(3)}(t), s, t) = \\ = \sum_{i\in I_{m_3}} \psi_i(0,t)\gamma_i^0(y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(3)}(t), s,t)\mathbb{I}_i.$$

де, функція $\mathbb{I}_i = \mathbb{I}_i(x,t)$ має вигляд

$$\mathbb{I}_i(x,t) = \begin{cases} 1, & x\in[s_i^1(t), s_i^2(t)]; \\ 0, & x\notin[s_i^1(t), s_i^2(t)]. \end{cases}$$

Використавши формулу Тейлора для функції G, g та f, із застосуванням зауваження розділу 3 до останнього доданка в (21), лінеаризувавши крайові умови (2)–(5), одержимо наступне представлення приросту цільового функціоналу

$$\Delta_{u^{(0)}}J(u) = \iint\limits_{\Pi}\left[\sum_{i\in I}\frac{\partial H(\psi,y,x,t)}{\partial y_i}\Delta y_i(x,t)+\right.$$
$$+\sum_{i\in I_{m_1}}\left(\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x}\lambda_i(x,t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial \lambda_i(x,t)}{\partial x}\psi_i(x,t)\right)\Delta y_i(x,t)+$$
$$+\sum_{i\in I_{m_2}}\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x}\Delta y_i(x,t)+$$
$$\left.+\sum_{i\in I_{m_3}}\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t}\Delta y_i(x,t)\right]+$$
$$+\int_0^l \sum_{i\notin I_{m_3}} \lim_{t\to+\infty} \psi_i(x,t)\Delta y_i(x,t)dx+$$
$$+\int_0^l \sum_{i\in I_0} \psi_i(l,t)\lambda_i(l,t)\Delta y_i(l,t)dt-$$
$$-\int_0^l \Delta_u h(\psi(x,0),u(x),x)dx+$$
$$+\int_0^\infty \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \sum_{k\notin I_{m_3}} \frac{\partial(h^2-h^1)}{\partial y_k}\Delta y_k(s,t)ds-$$
$$-\int_0^\infty \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \sum_{k\notin I_{m_3}} \frac{\partial h^3}{\partial y_k}\Delta y_k(s,t)ds+$$

$$+\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i\in I_0}\psi_i(l,t)\lambda_i(l,t)\Delta y_i(l,t)-\right.$$
$$-\sum_{i\in I_l}\psi_i(0,t)\lambda_i(0,t)\Delta y_i(0,t)+$$
$$\left.+\sum_{i\in I_{m_3}}\psi_i(l,t)\Delta y_i(l,t)\right]dt+\eta,$$

де, наприклад, $\|\Delta y(x,t)\| = \max_{i\in I}|y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$, через η позначемо суму $\iint\limits_{\Pi} o_H(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt$ і $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} o_{h^2}(||\Delta y(s,t)||) - o_{h^1}(||\Delta y(s,t)||) - o_{h^3}(||\Delta y(s,t)||)dsdt$.

Одержані перетворення дозволяють сформулювати спряжену задачу для задачі оптимального керування:

$$\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}+ \tag{22}$$
$$+\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\psi_i(x,t)=-H_{y_i}(\psi,y,x,t)+$$
$$+\frac{\partial(h^2-h^1-h^3)}{\partial y_i},\ i\in I_{m_1},$$

$$\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}=-H_{y_i}(\psi,y,x,t)+ \tag{23}$$
$$+\frac{\partial(h^2-h^1-h^3)}{\partial y_i},\ i\in I_{m_2},$$

$$\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}=-H_{y_i}(\psi,y,x,t),\ i\in I_{m_3}, \tag{24}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\psi_i(x,t)e^{at}=0,\ x\in[0,1],\ i\notin I_{m_3} \tag{25}$$

і для всіх $t\in\mathbb{R}_+$

$$\psi_i(l,t)=0,\ i\in(I_0\cup I_{m_3}), \tag{26}$$

$$\psi_i(0,t)=0,\ i\in I_l, \tag{27}$$

для якої повинен існувати узагальнений розв'язок.

З урахуванням умов (22)–(27) приріст цільового функціоналу набуде вигляду

$$\Delta_{u^{(0)}}J(u^{(0)})= \tag{28}$$
$$=-\int_0^l\Delta_{u^{(0)}}h(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}},u^{(0)}(x),x)dx+\eta=$$
$$=-\int_0^l\Delta_{u^{(0)}}hdx+\eta.$$

Задача лінеаризації у випадку крайових керуючих впливів, з незначними змінами, повторює описаний вище процес. Аналогічно можна показати, що коли $\psi_i(x,t)-$ розв'язок задачі (16)-(21), то

$$\Delta_{u^{(i)}}J(u^{(i)})= \tag{29}$$
$$=-\int_0^{+\infty}\int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)}\Delta_{u^{(i)}}h^idsdt+\eta_i,\ i\in\{1,2,3\},$$

де $\eta_i\sim o(||\triangle u^{(i)}||)$.

5. Розв'язність спряженої задачі. Нехай виконуються умови:

C1) $\lambda_i\in C_x^1(\overline{\Pi})\ i\in I_{m_1}$,
$$\sup_{\substack{i\in I_{m_1},\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}\left\{\pm|\lambda_i(x,t)|,\left|\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\right|\right\}<+\infty;$$

C2) $f_i\in C^{1,1,0,0}_{y,z,x,t}(\mathbb{R}^{2n}\times\overline{\Pi})\ i\in I$,
$\sup\limits_{\substack{i,j\in I,\\(y,z,x,t)\in\mathbb{R}^{2n}\times\overline{\Pi}}}\left|\frac{\partial f_j(y,z,x,t)}{\partial y_i}\right|<+\infty$,
$\sup\limits_{\substack{i,j\in I,\\(y,z,x,t)\in\mathbb{R}^{2n}\times\overline{\Pi}}}\left|\frac{\partial f_j(y,z,x,t)}{\partial z_i}\right|<+\infty$ і похідні є вимірними за t;

C3) $g_i\in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})\ i\in I$,
$\sup\limits_{\substack{i,j\in I,\\(y,x,t)\in\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi}}}\left|\frac{\partial g_j(y,x,t)}{\partial y_i}\right|<+\infty$ і похідна є вимірною за t;

C4) $\forall\ (w,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_3}\times U^1\times\mathbb{R}_+$,
$\frac{\partial\gamma_j^0(w,u^{(1)},s_i^k(t),t)}{\partial w_i}=0\ i\notin I_{m_3}$,
$j\in I_0,\ k=1,2$;

$\forall\ (w,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_3}\times U^2\times\mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial \gamma_j^l(w, u^{(2)}, s_i^k(t), t)}{\partial w_i} = 0 \ i \notin I_{m_3},$$
$$j \in I_l, \ k = 1, 2;$$

$$\forall \ (w, u^{(3)}, t) \in \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \mathbb{R}_+,$$
$$\frac{\partial \gamma_j^0(w, u^{(3)}, s_i^k(t), t)}{\partial w_i} = 0 \ i \notin I_{m_3},$$
$$j \in I_{m_3}, \ k = 1, 2;$$

C5) $G \in C_y^1(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})$,
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\partial G\,(y, x, t)}{\partial y_i} e^{at} = 0 \ \forall i \in I;$$

C6) $\gamma_i^0 \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(1)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi}), \ i \in I_0,$
$$\sup_{\substack{i \notin I_{m_3}, j \in I_0,\\ (y,u^{(1)},x,t) \in \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^1 \times \overline{\Pi}}} \left| \frac{\partial \gamma_j^0(y,u^{(1)},x,t)}{\partial y_i} \right| < +\infty,$$
$$\gamma_i^l \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(2)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi}), \ i \in I_l,$$
$$\sup_{\substack{i \notin I_{m_3}, j \in I_l,\\ (y,u^{(1)},x,t) \in \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^2 \times \overline{\Pi}}} \left| \frac{\partial \gamma_j^l(y,u^{(2)},x,t)}{\partial y_i} \right| < +\infty,$$
$$\gamma_i^0 \in C^{1,1,0,0}_{y,u^{(3)},x,t}(\mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi}), \ i \in I_{m_3},$$
$$\sup_{\substack{i \notin I_{m_3}, j \in I_0,\\ (y,u^{(3)},x,t) \in \mathbb{R}^{n-m_3} \times U^3 \times \overline{\Pi}}} \left| \frac{\partial \gamma_j^0(y,u^{(3)},x,t)}{\partial y_i} \right| < +\infty.$$

Використовуючи результати роботи [3], сформулюємо теорему

Теорема 2. *Якщо виконуються умови:*

1) ***C1****)-****C6****)*

2) $y \in \mathcal{Q}$*;*

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (22)-(25) *(як неперервний розв'язок відповідної системи інтегральних рівнянь).*

Доведення. Умови 1) – 6) гарантують виконання умов [3, Теорема 2], тому для спряженої задачі (22)–(25) існує і єдиний узагальнений розв'язок.

6. Необхідні умови оптимальності. Варіаційний аналіз досліджуваної задачі (8) заснований на використанні некласичних варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань [1]. Варійоване керування побудовано за правилом
$$u^{(0)}_{\varepsilon,\delta}(x) = u^{(0)}(x + \varepsilon\delta^{(0)}(x)), \ x \in [0, l], \quad (30)$$
$$\delta^{(0)}(0) = \delta^{(0)}(l) = 0,$$
де $\varepsilon \in [0, 1)$ - параметр, який характеризує малість варіації, $\delta^{(0)}(x)$ - неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє умову
$$0 \leqslant x + \delta^{(0)}(x) \leqslant l, \ x \in [0, l].$$
Відповідна варіація керування матиме вигляд $\Delta u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x) = u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x) - u^{(0)}(x)$, детальніше властивості такого типу варіації описано в роботах [1, 2].

Вибираючи варійоване керування за правилом (30) і використовуючи представлення
$$\Delta u^{(0)}(x) = \dot{u}^{(0)}(x)\varepsilon\delta^{(0)}(x) + o(\varepsilon),$$
перепишемо формулу приросту цільового функціоналу (8) так
$$\Delta J(u^{(0)}) = -\int_0^l h_{u^{(0)}} \dot{u}^{(0)}(x)\varepsilon\delta^{(0)}(x)dx + \quad (31)$$
$$+\eta.$$

Рівняння (31) можнв подати у вигляді
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{J(u^{(0)} + \varepsilon\delta^{(0)}) - J(u^{(0)})}{\varepsilon} = \quad (32)$$
$$= -\int_0^l h_{u^{(0)}} \dot{u}^{(0)}(x)\delta^{(0)}(x)dx,$$
оскільки решта доданків в (31) представлені у вигляді добутку величини порядку $o(\varepsilon)$ та збіжного інтегралу.

Аналогічно, як для керування в початкових умовах, побудуємо варійовані крайові керування
$$\Delta u^{(k)}(t) = \dot{u}^{(k)}(t)\varepsilon\delta^{(k)}(t) + o(\varepsilon),$$
$$\delta^{(k)}(0) = 0, \ k \in \{1, 2, 3\}.$$

Тоді для крайових керуючих впливів, з урахуванням умови (29), одержимо
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{J(u^{(j)} + \varepsilon\delta^{(j)}) - J(u^{(j)})}{\varepsilon} =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}_+} \int_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} h^j_{u^{(j)}} \dot{u}^{(j)}(t)\delta^{(j)}(t)dsdt, \ j \in \{1, 2, 3\}.$$

Нехай виконуються усі зроблені вище припущення. Тоді, оскільки, $\delta^{(0)} = \delta^{(0)}(x)$, $\delta^{(j)} = \delta^{(j)}(t)$, $j \in \{1,2,3\}$ – довільні функції, то можна сформулювати необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування (1.8) у вигляді наступної теореми.

Теорема 3. *Якщо процес* $\{y, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$ *є оптимальним в задачі* (8), *то виконуються умови*

$$h_{u^{(0)}}\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x\right) u_x^{(0)}(x) = 0, \quad x \in [0,l],$$

$$\int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} h^1_{u^{(1)}}\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(1)}(t), s, t\right) ds \times u_t^{(1)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} h^2_{u^{(2)}}\left(\psi_j(l,t)_{j\in I_l}, y_j(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(2)}(t), s, t\right) ds \times u_t^{(2)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} h^3_{u^{(3)}}\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_{m_3}}, y(s,t)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(3)}(t), s, t\right) ds \times u_t^{(3)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

де $y = y(x,t)$ *узагальнений розв'язок задачі* (1)–(5), $\psi = \psi(x,t)$ - *узагальнений розв'язок спряженої задачі при* $y = y(x,t)$, $u^{(0)} = u^{(0)}(x)$, $u^{(j)} = u^{(j)}(t)$, $j \in \{1,2,3\}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. / *А. В. Аргучинцев* - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 168 с.
2. *Derev'yanko T. O.* Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning / T. O. Derev'yanko, V. M. Kyrylych // Ukrainian Math. Journal. – 2015. – Vol. 67 – N 2. – P. 211–229.
3. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування виродженою напівлінійною гіперболічною системою з нескінченним горизонтом планування / Т. О. Дерев'янко// Наук. вісник Ужгород ун-ту. – 2011. Вип. 23. – С. 4–118
4. *Natali Hritoneko* Mathematical modeling in economics, ecology and the environment./ *N. Hritoneko, Y. Yatsenko* - Springer, No. 2, 2013.- 296 p.
5. *Матвеев Г. И., Якубович В. А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. – Изд-во С.–Петербург, 2003. – 540 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. II. – 800 с.