УДК 517.938

©2016 р. **І.М. Грод, В.Л. Кулик**

Тернопільський національний педагогічний університет ім.В. Гнатюка, Тернопіль
Сілезький технічний університет, м. Глівіце, Польща

ДЕЯКІ КЛАСИ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Отримано нові класи лінійних розширень динамічних систем на торі, для яких існує єдина функція Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тороїдальні многовиди.

We find new classes of linear extensions of dynamic systems on the torus for which there is a unique Green-Samoilenko function for the problem on invariant toroidal manifolds.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \qquad (1)$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, $x \in R^n$, а вектор-функція $a(\varphi)$ визначена, неперервна і 2π-періодична за кожною із змінних φ_j, $j = \overline{1,m}$, тобто задана на m-мірному торі $\mathcal{T}_m$ ($\varphi \in \mathcal{T}_m$). Матриця $A(\varphi)$ – $n \times n$-вимірною, елементи її є дійсні функції, неперервні за сукупністю всіх змінних $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ і 2π-періодичні по кожній змінній φ_j, $j = \overline{1,m}$. Додатково припускаємо, що задача Коші $\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi), \varphi|_{t=0} = \varphi_0$ має єдиний розв'язок $\varphi(t;\varphi_0)$ при кожному фіксованому $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. Для цього достатньо вимагати, щоб вектор-функція $f(\varphi)$ задовольняла умову Ліпшиця.

Будемо надалі використовувати наступні позначення: $C^0(\mathcal{T}_m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на $\mathcal{T}_m$, $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum_{j=1}^n y_j \bar{y}_j$ – скалярний добуток в R^n, норма вектора $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$. $C'(\mathcal{T}_m; a)$ – підпростір простору $C^0(\mathcal{T}_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що суперпозиція $F(\varphi(t;\varphi_0))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, причому за означенням $\left.\frac{d}{dt}F(\varphi(t;\varphi))\right|_{t=0} \overset{df}{=} \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$. Норму $n \times n$–вимірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max_{\|y\|=1} \|Gy\|$, $\|S\|_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|S(\varphi)\|$. $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi(t;\varphi_0))x \qquad (2)$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(\varphi_0)|_{t=\tau} = I_n$, I_n – одинична матриця.

Поряд із системою (1) випишемо неоднорідну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \qquad (3)$$

де $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

Означення 1. *Кажуть [2], що система (3) має інваріантний тороїдальний многовид, визначений рівністю*

$$y = u(\varphi), \qquad (4)$$

якщо функція $u(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ і виконується тотожність

$$\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi), \qquad (5)$$

при всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

У випадку, коли функція (4) є неперервно диференційовною, тотожність (5) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi).$$

Означення 2. *Нехай існує така $n \times n$-вимірна матриця $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, що для* *функції вигляду*

$$G_0(\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_\tau^0(\varphi)\,C(\varphi(\tau;\varphi))\ \ ,\ \ \tau\le 0\\ \Omega_\tau^0(\varphi)\,[C(\varphi(\tau;\varphi))-I_n]\,,\tau>0\end{cases}\tag{6}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau,\varphi)\|\le K\exp\{-\gamma\,|\tau|\}\tag{7}$$

з деякими додатними сталими K,γ.

Тоді функцію (6) називають функцією Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тороїдальні многовиди системи (1).

Існування функції Гріна-Самойленка (6) дозволяє стверджувати, що система (3) має інваріантний тор (4) при кожній функції $f(x)\in C^0(\mathcal{T}_m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді:

$$y=u(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_0(\tau,\varphi)\cdot f(\varphi(\tau;\varphi))\,d\tau.$$

Виконання оцінки (7) для функції Гріна-Самойленка (6) еквівалентне виконанню такої оцінки

$$\|G_t(0,\varphi)\|\le K\exp\{-\gamma\,|t|\}$$

для допоміжної функції

$$G_t(0,\varphi)=\begin{cases}\Omega_0^t(\varphi)\,C(\varphi)\ \ ,\ \ t\ge 0\\ \Omega_0^t(\varphi)\,[C(\varphi)-I_n]\,,t<0\end{cases}.$$

Однією із основних і важливих проблем, які виникають при дослідженні системи (1), це питання існування функції Гріна-Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ задачі про інваріантні тори. Цьому питанню присвячено цілий ряд цікавих досліджень, зокрема [2-10]. Питання існування функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори тісно пов'язане з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [4]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись у деяких точках, а їх похідна в силу системи рівнянь (1) є знаковизначеною. Нагадаємо, [4] що існування невиродженої ($\det S(\varphi)\ne 0\ ,\forall\varphi\in\mathcal{T}_m$) квадратичної форми

$$V=\langle S(\varphi)\,x,x\rangle\,,\tag{8}$$

похідна якої в силу системи (1) є знаковизначеною

$$\dot V=\Big\langle\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_j}a_j(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+$$

$$+A^T(\varphi)S(\varphi)\Big]x,x\Big\rangle\le-\beta\,\|x\|^2\,,\beta=const>0,\tag{9}$$

забезпечує регулярність цієї системи, а це означає, що дана система має єдину функцію Гріна-Самойленка. Якщо ж $\det S(\varphi_0)=0$ при деякому значенні $\varphi=\varphi_0$, то система (1) не має функції Гріна-Самойленка. При цьому наступна система

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi)\,,\frac{dx}{dt}=-A^T(\varphi)\,x,$$

має безліч різних функцій Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори. Не дивлячись на те, що квадратичні форми (8) можуть змінювати знак і навіть вироджуватись при деяких значеннях $\varphi=\varphi_0$, їх часто називають функціями Ляпунова.

Зауважимо, що знаходження квадратичної форми (8), яка задовольняє нерівність (9), є достатньо непростим завданням. У зв'язку з цим, в даній роботі, пропонується виділити класи систем вигляду (1), для яких можна виписати такі функції.

Дослідивши систему, яка залежить від параметра

$$\frac{d\varphi}{dt}=sin(\varphi)\,,\quad\frac{dx}{dt}=(cos(2n\varphi))\,x,\tag{10}$$

вдалося з'ясувати, що вона буде регулярною при довільному натуральному n ($n=1,2,3,....$), тобто має єдину функцію Гріна-Самойленка про інваріантні тори, до того ж функцію Ляпунова (8) можна вибирати у вигляді

$$V=x^2\exp\{s_n(\varphi)\}\ \ ,\ \ n=1,2,3,....$$

де $s_1(\varphi)=-4\cos\varphi$, $s_2(\varphi)=-\frac{16}{3}\cos^3\varphi$, $s_3(\varphi)=-\frac{64}{5}\cos^5\varphi+\frac{32}{3}\cos^3\varphi-4\cos\varphi,\ldots$

Далі дослідження систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt}=sin(\varphi)\,,\frac{dx}{dt}=(cos((2n+1)\varphi))\,x,\tag{11}$$

$$n = 1, 2, 3, ...$$

дозволило зробити наступний висновок: кожна з записаних систем (11) має безліч різних функцій Гріна. При цьому для спряженої системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = sin(\varphi), \frac{dx}{dt} = -(cos((2n+1)\varphi))\, x,$$

при $n = 1, 2, 3, ...$ існує знакозмінна функція Ляпунова, яку можна вибирати у вигляді

$$V = x^2 \exp\{s_n(\varphi)\}(-\cos\varphi) \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ ,$$

де $s_1(\varphi) = 4\cos^2\varphi$, $s_2(\varphi) = 5\cos^4\varphi + \frac{5}{2}\sin^4\varphi, \ldots$

Узагальнення системи вигляду (10) привело до розгляду наступної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\, x, \qquad (12)$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, $x \in R$, $\mu_j(\varphi) = \mu_j(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$–неперервні скалярні функції $\mu_j(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $j = 0, 1$. Припустимо, функція $\mu_1(\varphi)$ така, що лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \qquad (13)$$

має розв'язок $s = s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, який є 2π-періодичним за кожною змінною $\varphi_j, j = \overline{1, m}$. Вибравши квадратичну форму в вигляді

$$V = x^2 \exp\{-2s(\varphi)\} \qquad (14)$$

і порахувавши її похідну в силу системи (12), отримуємо

$$\dot{V} = 2x\dot{x}\exp\{-2s(\varphi)\} - x^2 2\dot{s}(\varphi)\exp\{-2s(\varphi)\} =$$
$$= 2x^2[\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi) - \dot{s}(\varphi)]\exp\{-2s(\varphi)\} =$$
$$= 2x^2[\mu_0(\varphi)]\exp\{-2s(\varphi)\}. \qquad (15)$$

Таким чином, приходимо до наступного твердження.

Лема 1. *Якщо в системі рівнянь (12) скалярна функція $\mu_0(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ задовольняє нерівність*

$$|\mu_0(\varphi)| > 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{T}_m \qquad (16)$$

і рівняння (13) має розв'язок $s(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, то система (12) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна-Самойленка про інваріантні тори.

Зауваження. *Якщо не вдається з'ясувати, чи має рівняння (13) розв'язок $s = s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$, який є 2π-періодичним за кожною із змінних $\varphi_j, j = \overline{1, m}$, чи такого розв'язку не існує, то можна розглядати збурене рівняння*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi), \qquad (17)$$

де є можливісь вибору функції $\bar{\mu}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, таким чином, щоб рівняння (13) вже мало розв'язок $s(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$. Тоді у випадку виконання нерівності

$$|\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi)| > 0, \forall\varphi \in \mathcal{T}_m$$

система (12) буде регулярною.

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Розглянемо систему двох рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = (1 + \varepsilon_1\cos\varphi + \varepsilon_2\sin\varphi)^{-1}$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(\mu_0(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi\right) x, \qquad (18)$$

де $\varepsilon_i = const, i = 1, 2, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$, $a_k, b_k = const$. Потрібно з'ясувати питання: при яких достатніх умовах на функцію $\mu_0(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_1)$ система (18) буде регулярною?

Позначимо

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi \qquad (19)$$

і виберемо наступну функцію

$$\bar{\mu}(\varphi) = \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1 + \varepsilon_1\cos\varphi + \varepsilon_2\sin\varphi)}. \qquad (20)$$

Друге рівняння в системі (18) запишемо у вигляді

$$dx/_{dt} = [(\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi)) + (\mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi))]\, x.$$

Тепер переконаємось, що при такому виборі функції (20) рівняння $\dot{s} = \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi)$ має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^0(T_1)$. Враховуючи позначення (19), маємо

$$\dot{s} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi} =$$

$$= \mu_1(\varphi) - \bar{\mu}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi -$$

$$- \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi\right).}$$

Звідси отримуємо

$$\frac{ds}{d\varphi} = (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)\, \mu_1(\varphi) -$$

$$- \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2) = \mu_1(\varphi) +$$

$$+ (\varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)\,(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) +$$

$$+ (\varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi) \cdot \sum_{k=2}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi -$$

$$- \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2) = \mu_1(\varphi) + \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2) \times$$

$$\times \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_1\varepsilon_2 + b_1\varepsilon_1) \sin 2\varphi + (\varepsilon_1 \cos\varphi +$$

$$+ \varepsilon_2 \sin\varphi) \cdot \sum_{k=2}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

Очевидно, інтеграл від отриманої функції буде періодичною функцією $s = s_0(\varphi)$.

Оцінюючи функцію (20) зверху і знизу, маємо

$$\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)} \le \bar{\mu}(\varphi) \le$$

$$\le \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)}, \quad \text{якщо } a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0,$$

$$\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)} \le \bar{\mu}(\varphi) \le$$

$$\le \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)}, \quad \text{якщо } a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0$$

Проаналізувавши нерівність $\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi) > 0$, отримуємо достатню умову регулярності системи (18):

$$\mu_0(\varphi) > \begin{cases} -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2})}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0, \\ -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}), & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0 \end{cases}$$

Якщо ж розглянути протилежну нерівність $\mu_0(\varphi) + \bar{\mu}(\varphi) < 0$, то отримуємо наступну достатню умову регулярності системи (18):

$$\mu_0(\varphi) < \begin{cases} -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 > 0, \\ -\frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}, & a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2 < 0\ . \end{cases}$$

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= 1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= 2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2, \\ \frac{dx}{dt} &= [\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) + 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + \\ &+ 7\sin^2\varphi_1 + 8\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2]x \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді рівняння (17) для даної системи приймає вигляд

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial s}{\partial\varphi_1}(1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2) + \\ &+ \tfrac{\partial s}{\partial\varphi_2}(2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2) = \\ &= 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + 7\sin^2\varphi_1 + \\ &+ 8\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2 - \bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned} \quad (22)$$

Спробуємо знайти такі функції

$$\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = \bar{\mu}_1 \sin\varphi_1 + \bar{\mu}_2 \sin\varphi_2 +$$

$$+ \bar{\mu}_{11}\sin^2\varphi_1 + \bar{\mu}_{12}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \bar{\mu}_{22}\sin^2\varphi_2, \quad (23)$$

де $\bar{\mu}_i, \bar{\mu}_{ij} = const$, щоб рівняння (22) мало розв'язок вигляду

$$s = s(\varphi_1, \varphi_2) = s_1 \cos\varphi_1 + s_2 \cos\varphi_2, s_i = const. \quad (24)$$

Підставляючи рівності (23) і (24) в рівняння (22), отримуємо систему рівнянь

$$-s_1 = 5 - \bar{\mu}_1, -2s_2 = 6 - \bar{\mu}_2, -2s_1 = 7 - \bar{\mu}_{11},$$

$$-3(s_1 + s_2) = 8 - \bar{\mu}_{12}, -4s_2 = 9 - \bar{\mu}_{22},$$

розв'язавши яку, отримаємо функцію (23) у вигляді тригонометричного многочлена з параметрами

$$\bar{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = (5 + s_1)\sin\varphi_1 + (6 + 2s_2)\sin\varphi_2 + \\ +(7 + 2s_1)\sin^2\varphi_1 + (8 + 3s_1 + 3s_2)\times \\ \times\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (9 + 4s_2)\sin^2\varphi_2. \quad (25)$$

Таким чином, якщо тригонометричний многочлен (25) підставити в праву частину рівняння (22), то це рівняння матиме розв'язок вигляду (24). Позначивши $\sin\varphi_i = \sigma_i$, праву частину рівності (25) запишемо у вигляді

$$\Phi\left(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2\right) = (5 + s_1)\sigma_1$$

$$+(6 + 2s_2)\sigma_2 + (7 + 2s_1)\sigma_1^2 + \\ +(8 + 3s_1 + 3s_2)\sigma_1\sigma_2 + (9 + 4s_2)_2^2. \quad (26)$$

Очевидно, при довільно фіксованих значеннях параметрів $s_1, s_2 \in R$ існує скінченне найбільше і найменше значення функції (26):

$$\max_{|\sigma_i|\leq 1}\Phi\left(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2\right) = \Phi_+\left(s_1, s_2\right), \\ \min_{|\sigma_i|\leq 1}\Phi\left(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2\right) = \Phi_-\left(s_1, s_2\right). \quad (27)$$

Наприклад, вибираючи $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, легко знаходимо $\Phi_-\left(1, 0\right) = -\frac{36}{29}$, $\Phi_+\left(1, 0\right) = 41$. Це означає, що функція (26) при значеннях параметрів $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, задовольняє нерівності $\bar{\mu}\left(\varphi_1, \varphi_2\right) \geq -\frac{36}{29}$, $\bar{\mu}\left(\varphi_1, \varphi_2\right) \leq 41$. Звідси випливає, що достатньою умовою регулярності системи (21) є, наприклад, виконання нерівності $\mu_0\left(\varphi_1, \varphi_2\right) > \frac{36}{29}$.

Зауваження. Із рівностей (27) для функції (25) випливає двостороння оцінка : $\Phi_-\left(s_1, s_2\right) \leq \bar{\mu}\left(\varphi_1, \varphi_2\right) \leq \Phi_+\left(s_1, s_2\right)$. Звідси отримуємо достатню умову регулярності системи (21): $\mu_0\left(\varphi_1, \varphi_2\right) > -\Phi_-\left(s_1, s_2\right)$, або $\mu_0\left(\varphi_1, \varphi_2\right) < -\Phi_+\left(s_1, s_2\right)$ при деяких фіксованих значеннях $s_1, s_2 \in R$.

Зауваження. Цікаво було б дослідити можливості обчислення наступних величин $\inf\limits_{s_i\in R}\Phi_+\left(s_1, s_2\right)$, $\sup\limits_{s_i\in R}\Phi_-\left(s_1, s_2\right)$.

Далі розглянемо систему, яка є узагальненням системи (12), виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\varphi\right), \frac{dx}{dt} = \left[\mu_0\left(\varphi\right) + \mu_1\left(\varphi\right)\right]A\left(\varphi\right)x, \quad (28)$$

де $x \in R^n$, $A\left(\varphi\right)$-$n \times n$-вимірна матриця з простору $C^0\left(\mathcal{T}_m\right)$.

Лема 2. *Припустимо, що матрицю $A\left(\varphi\right)$ в системі (28) можна представити у вигляді*

$$A\left(\varphi\right) = \lambda I_n + \tilde{A}\left(\varphi\right), \quad (29)$$

де $\lambda = const \neq 0$, $\tilde{A}^T\left(\varphi\right) \equiv -\tilde{A}\left(\varphi\right)$ і рівняння (13) має розв'язок $s = s_0\left(\varphi\right) \in C^1\left(\mathcal{T}_m\right)$, тоді похідна в силу системи (28) від функції

$$V = \|x\|^2\exp\left\{-2\lambda s_0\left(\varphi\right)\right\} \quad (30)$$

задовольняє рівність

$$\dot{V} = 2\lambda\mu_0\left(\varphi\right)\|x\|^2\exp\left\{-2\lambda s_0\left(\varphi\right)\right\} \quad (31)$$

і система (28) буде регулярною.

Доведення. Переконаємось у цьому, обчисливши похідну від функції (30) в силу системи (28)

$$\dot{V} = [\langle\dot{x}, x\rangle + \langle x, \dot{x}\rangle]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} + \langle x, x\rangle\times \\ \times\{-2\lambda\dot{s}_0(\varphi)\}\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} = \\ = 2\langle A(\varphi)x, x\rangle[\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} + \\ +\|x\|^2[-2\lambda\dot{s}_0(\varphi)]\exp\{-2\lambda s_0(\varphi)\} = \\ = \exp\{-2\lambda s_0\}\cdot[2\mu_0\lambda\|x\|^2 + 2\mu_0\langle\tilde{A}x, x\rangle + \\ +2\mu_1\lambda - 2\lambda\dot{s}_0 + 2\mu_1\langle\tilde{A}x, x\rangle]$$

Звідси, з урахуванням властивості кососиметричної матриці $\left\langle\tilde{A}x, x\right\rangle \equiv 0$, маємо

$$\dot{V} = 2\mu_0\lambda\exp\left\{-2\lambda s_0\right\}.$$

Лема доведена.

Тепер розглянемо систему рівнянь наступного вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\varphi\right), \\ \frac{dx_1}{dt} = \left[\mu_{10}\left(\varphi\right) + \mu_1\left(\varphi\right)\right]\left[\lambda_1 I_{n_1} + \tilde{A}_1\left(\varphi\right)\right]x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} == \left[\mu_{20}\left(\varphi\right) + \mu_2\left(\varphi\right)\right]\left[\lambda_2 I_{n_2} + \tilde{A}_2\left(\varphi\right)\right]x_2, \quad (32)$$

де $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $\tilde{A}_i^T\left(\varphi\right) \equiv -\tilde{A}_i\left(\varphi\right), i = 1, 2$, $\lambda_i = const \neq 0$.

Із вище розглянутої леми 2 випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай в системі (32) скалярні функції $\mu_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ такі, що обидва рівняння в частинних похідних*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_i(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \quad , \quad i = 1, 2$$

мають розв'язки $s = s_{0i}(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ і $\lambda_i = const \neq 0$, $\mu_i(\varphi) \neq 0$, тоді система рівнянь (32) з будь-якими кососиметричними матрицями $\tilde{A}_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ буде регулярною. Причому одна із квадратичних форм (8), яка забезпечує її регулярність, має вигляд

$$V = \begin{cases} \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \\ +\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ \|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \\ -\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} + \\ +\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) > 0, \\ -\|x_1\|^2 \exp\{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)\} - \\ -\|x_2\|^2 \exp\{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)\}, \\ \lambda_1\mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2\mu_{20}(\varphi) < 0 \end{cases} .$$

Тепер, враховуючи обгрунтовані вище допоміжні твердження, для систем рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)][R(\varphi) + M(\varphi)]x, \quad (33)$$

де матриці $R(\varphi), M(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $R^T(\varphi) \equiv R(\varphi)$, $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$, отримуємо основний результат.

Теорема 2. *Нехай система лінійних розширень на торі (33) така, що*

1) рівняння в частинних похідних (13) має розв'язок $s = s_0(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ при скалярній функції $\mu_1(\varphi)$;

2) система рівнянь $d\varphi/dt = a(\varphi), dx/dt = R(\varphi)x$ ортогональною заміною змінних $x = Q(\varphi)y$, $Q^{-1}(\varphi) \equiv Q(\varphi)$ приводиться до системи з постійними коефіцієнтами, тобто

$$Q^{-1}(\varphi) R(\varphi) Q(\varphi) - Q^{-1}(\varphi) \dot{Q}(\varphi) = \Lambda =$$

$$= diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \quad , \quad \lambda_i = const \neq 0 \ . \quad (34)$$

Тоді при будь-якій кососиметричній матриці $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$ система (33) буде регулярною.

Зауваження. У випадку, коли симетрична матриця $R(\varphi) \equiv R$ є постійною і невиродженою, завжди існує ортогональна постійна матриця Q, яка приводить матрицю R до діагонального виду, тобто виконується рівність (34).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mozer J.J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Acad. Wiss. Gottingen Math.-Phis. Kl. 1962. Vol. 18a, N 1.P. 1 – 20.

2. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т.34, №6. С. 1219-1240.

3. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, – 1987. – 304 с.

4. *Митропольський Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова – Киев: Наук. Думка, 1990. – 272 с.

5. *Кулик В.Л.* Конструкції функцій Ляпунова в теорії регулярних лінійних розширень динамчних систем на торі// Укр. мат. журн. –2015. –**67**, №10. – С.1348-1355.

6. *Грод И.Н., Кулик В.Л.* О свойствах непрерывности инвариантных торов и функции Грина линейных расширений на торе// Укр. мат. журн. 1998. – **41**, №12. – С. 1709 – 1714. – С.

7. *V. Kulyk, D.Paczko.* Some conditions of regularity of linear extensions of dynamical systems with respect to selected variables// Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2014, Vol. 19, No. 4, 602–610.

8. *Кулик В., Степаненко Н.* Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі.// Укр. мат. журн. 2007. – **46**, №4. – С. 488 –500. – С.

9. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань — К.: Наук. думка. — 2004. — 474 с.

10. *Перестюк М.О., Слюсарчук В.Ю.* Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. –2008. –**60**, №7. – С. 948 – 957.

11. *Бронштейн И.У., Копанский А.Я.* Инвариантное многообразие и нормальные формы. – Штиинца: Кишинев, 1992. – 330 с.