УДК 517.956

©2012 р. В.В. Городецький, Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та граничною умовою у просторах типу S'.

We prove the well solvability of a nonlocal multi-point on time problem for a class of the evolution equations win a harmonic oscillator and boundary condition in the spaces of type S'.

Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу з необмежено зростаючими при $|x| \to +\infty$ коефіцієнтами у різних просторах узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо) досліджені М.Л. Горбачуком, В.І, Горбачук, П.І. Дудниковим, О.І. Кашпіровським, В.В. Городецьким, І.І. Дрінь та ін. (див., наприклад, [1–3]). При цьому описані множини початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$. $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, то, маємо, очевидно, задачу Коші). На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вказав О.О. Дезін [4], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян [5] встановив, що існують рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі, водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

У даній роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. Знайдено аналітичне зображення розв'язку вказаної задачі.

1. Формальні ряди Фур'є-Ерміта. Простори типу S та S'

Позначимо

$$\Phi_m = \Big\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \,\Big|\, \varphi = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} h_k,\, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\Big\},$$

$$\Phi = \bigcup_m \Phi_m,$$

де

$$h_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, \ -$$

функції Ерміта (які утворюють ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$), а через Φ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$\Phi \ni \varphi \to f_\varphi \in \Phi' : \langle f_\varphi, \psi\rangle = (\varphi,\psi)_{L_2(\mathbb{R})}, \varphi \in \Phi,$$

визначає вкладення $\Phi \subset \Phi'$ ($\langle f,\psi\rangle$ позначає дію функціоналу f на елемент $\psi \in \Phi$). Елементи з Φ' називатимемо узагальненими функціями.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = \langle f, h_k \rangle$, називається рядом Фур"є-Ерміта функціоналу $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його коефіцієнтами Фур"є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є-Ерміта збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k h_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є-Ерміта для f [1]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k h_k$. Звідси випливає також, що Φ лежить щільно в Φ'.

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [6] серію просторів, названих ними просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільно фіксованих α, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\Big|\, \exists c > 0 \,\exists A > 0$$

$$\exists B > 0 \,\forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \,\forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}\Big\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [6]. S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, B і a, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих й тільки тих функцій φ, які аналітично продовжуються в $\mathbb{C}$ і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$c, a, b > 0$.

Простори S_α^β не є тривіальними за умови $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. При $\beta > 1$ простір S_α^β містить фінітні функції.

Топологічна структура в просторі S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \delta > 0 \,\forall \rho > 0 \,\exists c_{\delta\rho} > 0 :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta},$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо в ній ввести систему норм

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\Big\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Якщо P – деякий фіксований многочлен, то у просторі S_α^β визначена і неперервна операція множення на P. Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $|\exp(-z^2/2)| = \exp(-x^2/2 + y^2/2)$, якщо $z = x + iy \in \mathbb{C}$ і $1/\alpha = 1/(1-\beta) = 2$, тобто $\alpha = \beta = 1/2$, $\exp(-x^2/2) \in S_{1/2}^{1/2}$, а кожна функція Ерміта має вигляд $P(x)\exp(-x^2/2)$, де P – многочлен Ерміта.

В S_α^β визначені і неперервні операції зсуву аргументу і диференціювання, які переводять S_α^β в себе. Відзначимо також, що простори S_α^β є досконалими [6], тобто просторами, усі обмежені множини яких компактні.

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю позначатимемо символом $(S_\alpha^\beta)'$. Елементи з $(S_\alpha^\beta)'$ називаються узагальненими функціями типу ультрарозподілів.

У праці [1] доведено, що $S_{\beta/2}^{\alpha/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A – гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор в $H = L_2(\mathbb{R})$, який є замиканням в H оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій,

$$G_{\{\beta\}}(A) := \Big\{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c, B > 0 \,\forall n \in \mathbb{N} :$$

$$\|A^n\varphi\|_H \le cB^n n^{n\beta}\Big\}.$$

Спектр оператора A суто дискретний, його власні значення $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, відповідними власними функціями є функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ [1].

Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів з дискретним спектром випливає, що простори $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ при $\beta \ge 1$ можна охарактеризувати так [1].

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k = \langle f, h_k\rangle$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S_{\beta/2}^{\beta/2}) \Leftrightarrow \Big(\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$

$$|c_k| \le c\exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}), \quad \lambda_k = 2k+1\Big);$$

б) $(f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})') \Leftrightarrow \Big(\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$

$$|c_k| \le c\exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}), \quad \lambda_k = 2k+1\Big).$$

2. Нелокальна багатоточкова задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)Au = 0, (t,x) \in (),T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де A – гармонійний осцилятор, α: $(0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна додатна функція, яка задовольняє умову

$$\exists L_1, L_2, p > 0\, \forall t \in (0,T] :$$

$$L_1 t^p \le \int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau \le L_2 t^p,$$

тобто, розглядається випадок "слабкого виродження" [7].

Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію $u(t,\cdot) \in C^1((0,T], S_{1/2}^{1/2})$, яка задовольняє рівняння (1).

Для (1) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g, \qquad (2)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})',$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,\infty)$ – фіксовані числа, $\mu > \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, граничні співвідношення (2) розглядаються в просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Із результатів, наведених в [8] випливає, що задача (1), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)h_k(x) =$$

$$= \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle, \quad \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$Q_1(t,\lambda_k) = \exp(-\gamma(t)\lambda_k), \quad \gamma(t) = \int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau,$$

$$Q_2(\lambda_k) = \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k)\Big)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1},$$

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y),$$

при цьому $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$, $G_{t,x}(\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$.

Оскільки

$$\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) =$$

$$= \mu\Big(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k)\Big),$$

причому

$$\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{n} \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) \le \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{m} \mu_n < 1,$$

то, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\lambda_k) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r}\Big(\sum_{n=1}^{m} \mu_n e^{-\gamma(t_n)\lambda_k}\Big)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \Big(\mu_1 e^{-\gamma(t_1)\lambda_k}\Big)^{r_1} \times$$

$$\times \dots \Big(\mu_m e^{-\gamma(t_m)\lambda_k}\Big)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \times$$

$$\times e^{-(\gamma(t_1)r_1+\dots+\gamma(t_m)r_m)\lambda_k}.$$

Тоді

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \times$$

$$\times \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} e^{-\lambda(t,r)\lambda_k} h_k(x)h_k(y),$$

де

$$\lambda(t,r) = \gamma(t_1)r_1 + \dots + \gamma(t_m)r_m + \gamma(t),$$

$$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що у випадку двоточкової задачі ($m = 1$, $\mu > \mu_1$, $\mu_2 = \dots = 0$)

$$Q_2(\lambda_k) = (\mu - \mu_1 e^{-\gamma(t_1)\lambda_k})^{-1} =$$

$$= \mu^{-1}\Big(1 - \frac{\mu}{\mu_1} e^{-\gamma(t_1)\lambda_k}\Big)^{-1} =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r e^{-\gamma(t_1)r\lambda_k},$$

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\gamma(t_1)r+\gamma(t))\lambda_k} \times$$

$$\times h_k(x)h_k(y).$$

Урахувавши результати, наведені в [3, с. 53–54] знайдемо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\gamma(t_1)r+\gamma(t))\lambda_k} h_k(x)h_k(y) = (2\pi\,\mathrm{sh}(2(\gamma(t_1)r+$$

$$+\gamma(t))))^{-1/2} \exp(\mathrm{sh}^{-1}(2(\gamma(t_1)r + \gamma(t))xy-$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}(2(\gamma(t_1)r+\gamma(t))))(x^2+y^2)) \equiv K_r(t,x,y).$$

Отже,

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r K_r(t,x,y).$$

Зокрема, якщо $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то

$$u(t,x) = \langle \delta, G_{t,x}(\cdot)\rangle = G_{t,x}(0) =$$

$$= \mu \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r K_r(t,x,0), (t,x) \in \Omega.$$

Якщо ж $\mu = 1$, $\mu_1 = 0$ (випадок задачі Коші), $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$u(t,x) = (2\pi\,\mathrm{sh}(2\gamma(t)))^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}(2\gamma(t))x^2\Big), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Рівняння (1) є базовим при дослідженні рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(t)\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+(\varphi^2(x) + \varphi'(x) - x^2)u\Big], (t,x) \in \Omega, \qquad (3)$$

де φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нескінченно диференційовна функція така, що функція e^F, де F – первісна для φ, є мультиплікатором у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, тобто [6]

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c = c(\varepsilon) > 0\, \forall q \in \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|D_x^q(\exp(F(x)))| \le c_\varepsilon \varepsilon^q q^{q/2} \exp(\varepsilon x^2).$$

Зауважимо, що рівняння вигляду (3) виникають у сучасній теорії сигналів (див. [9]).

Для рівняння (3) задамо умову (2). Для доведення коректної розв'язності m-точкової задачі (3), (2) здійснимо заміну $u(t,x) = e^{-F(x)}v(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$. У результаті прийдемо до m-точкової за часом задачі

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha(t)Av = 0, (t,x) \in \Omega, \qquad (4)$$

$$\mu \lim_{t\to+0} v(t,\cdot) - \sum_{n=0}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} v(t,\cdot) = ge^F, \quad (5)$$

при цьому $ge^F \in (S_{1/2}^{1/2})'$, оскільки e^F – мультиплікатор у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$. Отже, задача (4), (5) коректно розв'язна, її розв'язок дається формулою

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(ge^F)h_k(x) =$$

$$= \langle ge^F, G_{t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, e^{F(y)}G_{t,x}(y)\rangle,$$

$$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що $e^F G_{t,x} \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$, оскільки, за умовою, e^F – мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Врахувавши тепер, що $u = e^{-F}v$, дістаємо таке твердження.

Теорема 1. *При вказаних обмеженнях на функції α і φ багатоточкова задача* (3), (2) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = \langle g, e^{-F(x)+F(\cdot)}G_{t,x}(\cdot)\rangle,$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})', (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t > 0$.

Розглянемо тепер рівняння

$$f_0(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} =$$

$$= \alpha(t)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)(f_0(x)u(t,x)), (t,x) \in \Omega, \quad (6)$$

для якого задамо умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_m \lim_{t\to t_n} u(t,\cdot) = g, \quad (7)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})'$$

обмеження на параметри μ, μ_1, $\ldots$, μ_m, t_1, $\ldots$, t_m та функцію α такі ж, як і у випадку задачі (1), (2) (або (3), (2)), f_0 – фіксована функція з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умови:

1) f_0 – мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, 2) $\frac{1}{f_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Здійснивши заміну $f_0(x)u(t,x) = v(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, прийдемо до m-точкової задачі вигляду (4), (5) з граничною функцією $f_0 g \in (S_{1/2}^{1/2})'$. Звідси вже випливає, що багатоточкова задача (6), (7) коректно розв'язна, при цьому

$$u(t,x)f_0(x) \equiv v(t,x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(f_0 g)h_k(x) =$$

$$= \langle f_0 g, G_{t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, f_0(\cdot)G_{t,x}(\cdot)\rangle, (t,x) \in \Omega.$$

Отже,

$$u(t,x) = \Big\langle g, \frac{f_0(\cdot)}{f_0(x)}G_{t,x}(\cdot)\Big\rangle, (t,x) \in \Omega.$$

Зазначимо, що рівняння (6) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha(t)\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2f_0'(x)}{f_0(x)}\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+\Big(\frac{f_0''(x)}{f_0(x)} - x^2\Big)\Big]u(t,x). \quad (8)$$

Якщо за функцію f_0 взяти функцію вигляду e^F, то (8) перетворюється у рівняння (3).

Зауважимо також, що простір $(S_{1/2}^{1/2})'$ є максимальним простором граничних даних, які забезпечують коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (8) у вказаному розумінні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
2. *Горбачук М.Л., Дудников П.И.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.
3. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
4. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.
5. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
7. *Горбачук М.Л., Пивторак Н.И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1317–1324.

8. *Городецький В.В., Широковських А.О.* Нелокальна багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором // Буковинський математичний журнал. – Т. 3, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – С. 30–44.
9. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. – 703 с.