

Буковинський державний фінансово-економічний університет
Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ПОШАРОВО РІВНОМІРНУ АПРОКСИМАЦІЮ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

З'ясовано належність до секвенціального замикання \overline{C}^s простору C сукупно неперервних функцій у просторі S нарізно неперервних функцій багатьох конкретних нарізно і лінійно неперервних функцій з явною побудовою апроксимаційної послідовності і показано, що існують нарізно неперервні функції з \overline{C}^s , які не задовольняють жодну з достатніх умов належності до \overline{C}^s , що були раніше отримані з допомогою методу лінійної інтерполяції.

We found that many concrete separately and linearly continuous functions with an explicit construction of approximating sequences belong to the sequential closure \overline{C}^s of the space C of jointly continuous functions in the space of S and show that there are separately continuous functions on \overline{C}^s , which do not satisfy any of the sufficient conditions of belonging to \overline{C}^s , which were previously obtained by the method of the linear interpolation.

1. Вступ Функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ називається *пошарово рівномірною границею* послідовності функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, якщо для кожного $x \in X$ вертикальні x -розрізи $f_n^x = f_n(x, \cdot)$ функції f_n рівномірно на Y збігаються до x -розрізу $f^x = f(x, \cdot)$ і для кожного $y \in Y$ горизонтальні y -розрізи $(f_n)_y = f_n(\cdot, y)$ рівномірно на X збігаються до y -розрізу $f_y = f(\cdot, y)$ при $n \rightarrow \infty$. У праці [1] досліджувалось, які нарізно неперервні функції $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, де $X = Y = [0, 1]$, є пошарово рівномірними границями послідовностей сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Зокрема, там було введено дві умови:

(A_X) проекція $pr_X(D(f))$ множини $D(f)$ точок розриву функції f на вісь абсцис X не більш, ніж зліченна;

(B_X) звуження $f|_{A \times Y}$, де $A = pr_X(D(f))$, неперервне за сукупністю змінних.

В [1] з допомогою методу лінійної інтерполяції було доведено (теорема 8.4 і 9.4), що виконання умови (A_X) чи (B_X) для нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ гарантує її подання у вигляді пошарово рівномірної границі послідовності неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Для топологічних просторів X і Y по-

значимо символами $S = CC(X \times Y)$ і $C = C(X \times Y)$ простори нарізно і сукупно неперервних функцій $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ відповідно, а через \overline{C}^s – простір, що складається з пошарово рівномірних границь послідовностей функцій $f_n \in C$. Нехай (A_Y) і (B_Y) – умови на функцію $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, які отримуються з умов (A_X) і (B_X) заміною X на Y , множини A на множину $B = pr_X(D(f))$ і звуження $f|_{A \times Y}$ на звуження $f|_{X \times B}$. Розглянемо диз'юнкції $(A) = (A_X) \vee (A_Y)$ і $(B) = (B_X) \vee (B_Y)$ відповідних умов. Фактично в [1] було встановлено, що коли $X = Y = [0, 1]$ і нарізно неперервна функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умову (A) чи (B) , то $f \in \overline{C}^s$. Там же було поставлене питання про справедливості рівності $\overline{C}^s = S$, яке довгий час залишалося відкритим.

Згадані тут результати були узагальнені у працях [2], [3] з допомогою векторнозначних функцій, коли в ролі другого співмножника виступає довільний компактний простір Y , і в [4] на той випадок, коли першим співмножником є метризований компакт X .

Зауважимо, що в серії праць [5 - 19] вивчалася задача про побудову нарізно неперервної функції з даною множиною точок розриву. Відносно кожної з функцій, побу-

дованих у цих працях, виникає питання про її належність до \overline{C}^s . Це можна робити, з'ясовуючи чи задовольняють побудовані функції умови (A) і (B), або якимось іншим чином. Крім того, цікаво було б побудувати нарізно неперервну функцію $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка не задовольняє умови (A) і (B) і належить до \overline{C}^s . Цю програму ми починаємо реалізовувати у цій статті, з'ясовуючи, що побудовані в [5] функції вигляду $f(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y))$, у яких $D(f) = A \times B$, належать до \overline{C}^s , і що лінійно неперервні функції Юнгів з [6] теж належать до \overline{C}^s . Крім того, ми наводимо приклад нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка не задовольняє ні умову (A), ні умову (B) і належить до \overline{C}^s .

2. Нарізно неперервні функції з прямокутною множиною точок розриву. Почнемо з уточнення одного результату з [5], у якому йдеться про побудову такої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \rightarrow Z$, що її множина точок розриву $D(f) = A \times B$.

Кажуть, що послідовність функцій $g_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ стабільно збігається до функції до функції $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ (позначається: $g_n \xrightarrow{d} g$ на T), якщо існує такий номер N , що $g_n = g$ при $n \geq N$. Послідовність функцій $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ пошарово стабільно збігається до функції $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, якщо $f_n \xrightarrow{d} f$ на Y для кожного $x \in X$ і $(f_n)_y \xrightarrow{d} f_y$ для кожного $y \in Y$. Ясно, що з стабільної збіжності випливає рівномірність, а з пошарово стабільної – пошарово рівномірності. Символом \overline{C}^d позначимо сукупність усіх пошарово стабільних границь послідовностей функцій $f_n \in C$. Ясно, що $\overline{C}^s \supseteq \overline{C}^d$.

Нам буде потрібний один результат [1, теорема 5.2, с.141]: кожна нарізно неперервна функція $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ зі скінченним числом точок розриву є пошарово стабільною границею послідовності неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 1. Нехай A і B – функціонально замкнені ніде не щільні множини, що лежать відповідно у просторах X і Y , причому Y – локально зв'язний простір, $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ і $\psi : Y \rightarrow [0, 1]$ – неперервні функції, для

яких $A = \varphi^{-1}(0)$ і $B = \psi^{-1}(0)$, і $g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ – нарізно неперервна функція, у якій $D(g) = \{(0, 0)\} \subseteq g^{-1}(0)$ і $g(t, t) \geq \alpha > 0$ для всіх $t \in (0, 1]$. Тоді формулою

$$f(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y))$$

визначається нарізно неперервна функція $f : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, яка є пошарово стабільною границею послідовності неперервних функцій $f_n : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, причому $D(f) = A \times B \subseteq f^{-1}(0)$.

Доведення. Нарізно неперервність функції f негайно випливає з нарізної неперервності функції g і неперервності функцій φ і ψ . При цьому $A \times B \subseteq f^{-1}(0)$ і $imf \subseteq img \subseteq [0, 1]$. Для кожного n існує така неперервна функція $g_n : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, для якої $g_n(t, s) = g(t, s)$ при $(t, s) \in [0, 1]^2 \setminus (0, \frac{1}{n})^2 = E_n$, адже множина E_n замкнена в квадраті $Q = [0, 1]^2$ і звуження $g|_{E_n} : E_n \rightarrow [0, 1]$ неперервне, отже, можна застосовувати теорему Тітце-Урсона [20, с.116]. Функції $f_n : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x, y) = g_n(\varphi(x), \psi(y))$, будуть неперервними за сукупністю змінних і для них $f_n \xrightarrow{d} f$ на Y і $(f_n)_y \xrightarrow{d} f_y$ на X при $n \rightarrow \infty$.

Покажемо, що $D(f) = A \times B$. Включення $D(f) \subseteq A \times B$ випливає з теореми про неперервність композиції. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$, U – довільний окіл точки x_0 в X і V – зв'язний окіл точки y_0 в Y . Оскільки B – ніде не щільна, то існує $y_1 \in V \setminus B$. Тоді $s_1 = \psi(y_1) > 0$ і множина $U_1 = U \cap \varphi^{-1}([0, s_1])$ є околом точки x_0 в X . Але і множина A ніде не щільна в X , тому існує $\tilde{x} \in U_1 \setminus A$. Для точки $\tilde{t} = \varphi(\tilde{x})$ маємо $\psi(y_0) = 0 < \tilde{t} < \psi(y_1)$ і при цьому точки y_0 і y_1 належать до зв'язної множини V . Тому існує така точка $\tilde{y} \in V$, що $\psi(\tilde{y}) = \tilde{t}$. Отже, точка $\tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in U \times V$ і $|f(\tilde{p}) - f(p_0)| = f(\tilde{p}) = g(\tilde{t}, \tilde{t}) \geq \alpha > 0$. Звідси випливає, що $p_0 \in D(f)$.

Зауважимо, що побудована в теоремі 1 нарізно неперервна функція f задовольняє умови (B_X) і (B_Y) . Справді, оскільки $D(f) = A \times B$, то $pr_X(D(f)) = A$. За побудовою $\varphi(x) = 0$ для кожного $x \in A$. Тому якщо $(x, y) \in A \times Y$, то $f(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y)) = g(0, \psi(y))$, отже, звуження $f|_{A \times Y}$ – це неперервна функція $h(x, y) = g(0, \psi(y))$, адже

функція g неперервна відносно другої змінної і ψ – неперервна. Таким чином, f задовольняє умову (B_X) . Так само f задовольняє і умову (B_Y) . Тому належність $f \in \overline{C^s}$ випливає і з теореми 9.4 з [1].

Теорема 2. Нехай A і B – це F_σ -множини першої категорії у досконало нормальних просторах X і Y відповідно. Тоді $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, де A_n і B_n – замкнені ніде не щільні множини в просторах X і Y відповідно, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ для кожного n , причому існують такі неперервні функції $\varphi_n : X \rightarrow [0, 1]$ і $\psi_n : Y \rightarrow [0, 1]$, що $A_n = \varphi_n^{-1}(0)$ і $B_n = \psi_n^{-1}(0)$. Нехай далі $g_n : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ – нарізно неперервні функції, для яких $D(g_n) = \{(0, 0)\} \subseteq g_n^{-1}(0)$ і $g_n(t, t) \geq \alpha_n > 0$ на $[0, 1]$, і $f_n(x, y) = g_n(\varphi_n(x), \psi_n(y))$ на $X \times Y$. Тоді функція

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x, y)$$

визначена і нарізно неперервна на $X \times Y$, $f \in \overline{C^s}$ і $D(f) = A \times B$.

Доведення. За теоремою 1 для кожного n функції $f_n : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ нарізно неперервні, $f_n \in \overline{C^s}$ і $D(f_n) = A_n \times B_n \subseteq f_n^{-1}(0)$. Оскільки $0 \leq \frac{1}{2^n} f_n(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$ на $X \times Y$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x, y)$ нормально збігається, причому $\frac{1}{2^n} f_n \in \overline{C^s}$ для кожного n , тому за теоремою 6.3 з [1] і $f \in \overline{C^s}$.

Рівність $D(f) = A \times B$ випливає з леми 1 праці [21].

3. Лінійно неперервні функції. Функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ називається *лінійно неперервною*, якщо її звуження $f|_L$ на кожну пряму L у площині \mathbb{R}^2 є неперервним. В.Юнг і Г.Юнг [6] навели багато прикладів лінійно неперервних і розривних функцій $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Тут ми покажемо, що всі вони належать до $\overline{C^s}$.

Приклад 1. Нехай $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, що задається правилами: $g(x, y) = \frac{x^2}{y}$, якщо $y \geq x^2$, $y > 0$, $g(x, y) = \frac{y}{x^2}$, якщо $0 < y \leq x^2$ і $g(x, y) = 0$, якщо $y \leq 0$. В [6] з'ясовано, що g – це лінійно неперервна функція, у якої

$D(g) = \{(0, 0)\}$. Ясно, що $g \in \overline{C^d}$, бо множина $D(g)$ одноточкова.

Приклад 2. Для точки $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ покладемо

$$g_{p_0}(x, y) = g(x - x_0, y - y_0),$$

де g – функція з прикладу 1. Ясно, що g – це лінійно неперервна функція, у якої $D(g_0) = \{p_0\}$, причому $g_{p_0} \in \overline{C^d}$.

Нехай $E = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, де p_n – різні точки площини \mathbb{R}^2 і

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_{p_n}(x, y)$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді f – це лінійно неперервна функція, у якої $D(f) = E$, причому $f \in \overline{C^s}$ на основі теореми 6.3 з [1].

Приклад 3. Нехай $k > 0$ і $P_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq k \text{ і } y \in \mathbb{R}\}$ – смуга, що обмежена прямими $x = k$ і $x = -k$. Розглянемо функцію $h_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що задається правилами:

$$h_k(x, y) = g_{(k, 0)}(x, y)$$

і

$$h_k(x, y) = h_k(-x, y) = h_k(x, -y) = h_k(-x, -y)$$

при $0 \leq x \leq k$ і $y \geq 0$, $h_k(x, y) = 0$ при $|x| \geq k$.

Легко зрозуміти, що h_k – це лінійно неперервна функція, причому $D(h_k) = \{(k, 0), (-k, 0)\}$ і $h_k \in \overline{C^d}$.

Приклад 4. Нехай F – непорожня досконала ніде не щільна підмножина числової прямої \mathbb{R} (див. [22, с.135]). Тоді $G = \mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ – це відкрита множина, а $I_n = (a_n, b_n)$ – її складові інтервали, тобто інтервали суміжності множини F . Для кожного інтервалу I_n введемо числа $k_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ і $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ і розглянемо функції $u_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_n(x, y) = h_{k_n}(x - c_n, y).$$

Тоді $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ – це лінійно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, у якої $D(f) = F \times \{0\}$. За побудовою $f(x, y) = 0$

при $(x, y) \in F \times \mathbb{R}$. Тому $f|_{F \times \mathbb{R}}$ – це нульова функція, яка, зрозуміло, неперервна. При цьому $F = pr_X(D(f))$. В такому разі належність $f \in \overline{C^s}$ можна вивести з умови (B_X) .

Приклад 5. Основний приклад Юнгів з [6] ми викладемо у дещо загальнішій редакції. Розглянемо довільну зліченну всюди щільну на інтервалі $(0, 1)$ множину $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $b_n \neq b_m$ при $n \neq m$. Нехай $(A_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність непорожніх досконалих відрізків на інтервалі $[0, 1]$, що лежать на відрізку $[0, 1]$. Покладемо

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{b_n\}.$$

Використовуючи конструкцію прикладу 4 легко побудувати лінійно неперервну функцію $u_n : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ у якої $D(u_n) = A_n \times \{b_n\}$, причому $u_n \in \overline{C^s}$. Тоді функція

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n(x, y)$$

теж буде лінійно неперервною на квадраті $Q = [0, 1]^2$, для неї $D(f) = E$ і $f \in \overline{C^s}$ за теоремою 6.3 з [1]. При цьому множини A_n можна підібрати так, що множина E буде всюди щільною в квадраті Q і кожна точка цього квадрата буде точкою повного накопичення [22, с.240] множини E .

4. Приклад нарізно неперервної функції, яка не задовольняє жодну з умов (A) і (B). Почнемо з допоміжних конструкцій, які будуть використовуватися у загальній побудові.

Розглянемо довільний не вироджений квадрат $K = [a, b]^2$ на площині. Нехай A – континуальна замкнена відрізок на відрізку $[a, b]$, для якої $\{a, b\} \subseteq A$. Для певності це може бути канторова множина на відрізку $[a, b]$. Введемо функцію $\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{b-a}$ на відрізку $X = [a, b]$, де $d(x, A)$ – відстань від точки x до множини A . Ясно, що $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ на X . Функція $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ неперервна і $A = \varphi^{-1}(0)$, адже множина A замкнена. Символом g_K ми позначимо функцію $g_K : K \rightarrow [0, 1]$, яка визначається формулою

$$g_K(x, y) = sp(\varphi(x), \varphi(y)),$$

де sp – відома функція Шварца, для якої $g(u, v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}$, якщо $(u, v) \neq (0, 0)$, і $sp(0, 0) = 0$. За теоремою 1 функція g_K нарізно неперервна і $D(g_K) = A^2$. При цьому $g_K(x, b) = g_K(x, a) = 0$ при $a \leq x \leq b$ і $g_K(a, y) = g_K(b, y) = 0$ при $a \leq y \leq b$ тобто $g_K(x, y) = 0$ на межі frK квадрата K . Зауважимо також, що g_K є пошарово рівномірною границею послідовності сукупно неперервних функцій $g_n : K \rightarrow \mathbb{R}$. Зрозуміло також, що проєкції $pr_X(D(g_K)) = pr_Y(D(g_K)) = A$, де $X = Y = [a, b]$, отже, ці проєкції континуальні.

Нехай $c = \frac{a+b}{2}$ – середина відрізка $[a, b]$. Розглянемо поки що довільні функції $\alpha : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\beta : (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і для них визначимо функцію $h(x, y)$ поки що на трикутнику $\Delta = \{(x, y) \in K : y \leq x\}$, покладаючи $h(x, y) = 0$, якщо $a \leq x \leq c, a \leq y \leq x$, $h(x, y) = \frac{\alpha(x)(y-a)}{c-a}$, якщо $c < x \leq b, a \leq y \leq c$, $h(x, y) = \alpha(x) + \frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x-c}(y-c)$, якщо $c < x \leq b, c \leq y \leq x$.

Якщо ж $(x, y) \in K$ і $y \geq x$, то ми вважаємо, що $h(x, y) = h(y, x)$, адже тоді $(y, x) \in \Delta$ і число $h(y, x)$ визначене. Ясно, що вказаною формулою функція h визначена коректно, причому $h(x, c) = \alpha(x)$ при $c < x \leq b$, $h(x, c) = 0$ при $a \leq x \leq c$, $h(c, y) = h(y, c)$ при $a \leq y \leq b$ і $h(x, x) = \beta(x)$ при $c < x \leq b$.

Введемо тепер середину $d = \frac{c+b}{2}$ відрізка $[c, b]$ і розглянемо конкретні функції α і β , що визначаються формулами

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ \frac{b-x}{b-d}, & d \leq x \leq b. \end{cases}$$

і

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, & c < x \leq d, \\ \frac{b-x}{b-d}, & d \leq x \leq b. \end{cases}$$

Для них $\alpha(c) = \alpha(b) = 0$, $\alpha(d) = 1$ і $\beta(b) = 0$. Оскільки функції α і β неперервні, то побудована для них функція h буде неперервною при $(x, y) \neq (c, c)$ за сукупністю змінних. Далі

$$h(x, c) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c, \\ \alpha(x), & c \leq x \leq b. \end{cases}$$

і

$$h(c, y) = h(y, c),$$

тому функції h_c і h^c неперервні, отже, h – це нарізно неперервна функція. Зауважимо, що в центрі (c, c) квадрата K функція h розривна, адже

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c+0} h(x, x) &= \lim_{x \rightarrow c+0} \beta(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow c+0, c < x < d} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow c+0, c < x < d} 1 = 1, \end{aligned}$$

а

$$\lim_{x \rightarrow c+0} h(x, c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \alpha(x) = \alpha(c) = 0.$$

Таким чином, $D(h) = \{(c, c)\}$. Крім того, ясно, що $0 \leq h(x, y) \leq 1$ на K і

$$h(x, a) = h(x, b) = h(a, y) = h(b, y) = 0,$$

при $a \leq x \leq b$ і $a \leq y \leq b$. Побудовану тут нарізно неперервну функцію $h : K \rightarrow [0, 1]$ ми будемо позначати символом h_K . Для неї $D(h_K) = \{(c, c)\}$, $h_K(c, c) = 0$, $h_K(c, d) = h_K(d, c) = 1$ і $h_K(x, y) = 0$ на межі квадрата K .

Приступимо тепер до побудови основного прикладу. Розглянемо послідовність квадратів $K_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]^2$ при $n = 1, 2, \dots$, що мають діагоналі, які лежать на діагоналі квадрата $Q = [0, 1]^2$, містяться в ньому і стягуються до точки $(0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$. Введемо функції $u_n : Q \rightarrow [0, 1]$ покладаючи

$$u_1(p) = \begin{cases} g_{K_1}(p), & p \in K_1, \\ 0, & p \in Q \setminus K_1. \end{cases}$$

і

$$u_n(p) = \begin{cases} h_{K_n}(p), & p \in K_n, \\ 0, & p \in Q \setminus K_n. \end{cases}$$

при $n = 2, 3, \dots$. Зрозуміло, що функції u_n нарізно неперервні, при цьому $D(u_n) = \{(c_n, c_n)\}$ для $n = 2, 3, \dots$, де $c_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ – середина відрізка $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

Теорема 3. Функція $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, що визначена на квадраті $Q = [0, 1]^2$ формулою

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(p)$$

є нарізно неперервною, належить до $\overline{C^s}$ і не задовольняє жодну з умов (A) і (B).

Доведення. Оскільки носій $\text{supp} u_n$ функції u_n лежить у відкритому квадраті $G_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})^2$, причому ці квадрати попарно не перетинаються, то функція f визначена на Q , причому $f(p) = u_n(p)$, якщо $p \in G_n$, і $f(p) = 0$, якщо $p \in Q \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Для фіксованого $x \in [0, 1]$ існує такий номер n , що $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Для цього номера n $f_n^x(y) = u_n^x(y)$ для кожного $y \in [0, 1]$, тобто $f_n^x = u_n^x$, отже, неперервність функції $f_n^x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ впливає з неперервності функцій u_n^x . Крім того, за побудовою $f(x, y) = f(y, x)$ на Q , отже, і функції f_y неперервні для кожного $y \in [0, 1]$. Таким чином, функція f нарізно неперервна.

Зрозуміло, що

$$\begin{aligned} D(f) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} D(u_n) \cup \{(0, 0)\} = \\ &= \{p_n : \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup A_1 \cup \{(0, 0)\}, \end{aligned}$$

де $p_n = (c_n, c_n)$ – центр квадрата K_n і A_1 – континуально замкнена ніде не щільна множина на відрізку $[\frac{1}{2}, 1]$, що використана для побудови функції g_{K_1} . В такому разі

$$\text{pr}_X(D(f)) = \text{pr}_Y(D(f)) =$$

$$= \{c_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup A_1 \cup \{0\} = A.$$

Належність $(0, 0) \in D(f)$ впливає з того, що $f(0, 0) = 0$ і $f(q_n) = 1$, де $q_n = (d_n, d_n)$, $d_n = \frac{c_n + b_n}{2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, причому $q_n \rightarrow (0, 0)$, а $f(q_n) \not\rightarrow f(0, 0)$.

Залишилося з'ясувати, що f не задовольняє жодну з умов (A_X) , (A_Y) , (B_X) і (B_Y) .

Перевіримо, що f не задовольняє умову (B_X) . Зауважимо, що для кожного номера $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ виконується рівність

$$f(c_n, d_n) = u_n(c_n, d_n) = 1,$$

при цьому $c_n \in A$ і $r_n = (c_n, d_n) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді $r_n \in A \times Y$ для кожного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і $f(r_n) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$. Це показує, що звуження $f|_{A \times Y}$ розривне в точці $(0, 0) \in A \times Y$.

Умова (A_X) теж не виконується, бо $pr_X(D(f)) = A \supseteq A_1$, а множина A_1 континуальна, а отже, і множина A теж континуальна, а значить, не зліченна і не скінченна.

Умови (A_Y) і (B_Y) теж не виконується, бо $f(x, y) = f(y, x)$ на Q .

Нарешті, належність $f \in \overline{C^s}$ впливає з того, що звуження $f|_{[0, \frac{1}{2}] \times Y}$ задовольняє умову (A) , а звуження $f|_{[\frac{1}{2}, 1] \times Y}$ задовольняє умову (B) .

Прикінцеве зауваження. Коли ми починали писати цю статтю, задача про рівність $\overline{C^s} = S$ ще не була розв'язана, але 2.XII.2015 на семінарі кафедри математичного аналізу В.В.Михайлюк виступив з доповіддю, в якій була доведена рівність $\overline{C^s} = S$ для $X = Y = [0, 1]$ і навіть в загальнішому випадку. При цьому він використав для доведення трансфінітні побудови, розбиття одиниці, як у методі Рудіна [23], і властивість асоційованого з нарізно неперервною функцією $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відображення $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow C_u[0, 1]$, яку він назвав насиченою неперервністю: звуження $\varphi|_F$ на кожен замкнену множину $F \subseteq [0, 1]$ має точку неперервності. Таким чином, була розв'язана проблема, яка три роки назад була поставлена у доповіді другого співавтора на Банахівській конференції, чим зроблено істотний крок у розвитку даної тематики.

У зв'язку з цим виникає природне бажання про пошук конструктивної побудови для даної нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такої послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що пошарово рівномірно збігається до f , зокрема, актуально дослідити чи застосовні тут побудови, пов'язані з лінійною інтерполяцією, многочленами Берштейна, Фейєра, Джексона. Цим дослідженням будуть присвячені наступні роботи авторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. вісн. НТШ. – 2013. – 10. – С. 135-158.

2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій та її засто-

сування // Мат. студії. – 2014. – 42, №2. – С.129 - 133.

3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій, яка зберігає звуження // Прикарпат. вісн. НТШ. "Число". – 2015. – 1(29). – С.11-20.

4. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Секвенціальне замикання простору сукупно неперервних функцій у просторі нарізно неперервних функцій // Укр.мат.журн – 2016р. – 68(2) – С.158-161.

5. Маслюченко В.К. Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень // Чернів. ун-т. – Чернівці, 1994. – 17с. – Деп. в ДНТБ України 10.I.94, N70-Ук94.

6. Young W.H., Young G.G. Discontinuous functions continuous with respect to every straight line // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1909. – 41. – P.87-93.

7. Kershner R. The continuity of functions of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – 53, N1. – P.83-100.

8. Feiock R.E. Cluster sets and joint continuity // J. London Math. Soc. – 1973. – 7. – P.397-409.

9. Grande Z. Une caractérisation des ensembles des point de discontinuité des fonctions linéairement-continues // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – 52. – P.257-262.

10. Мирзоян М.М. О предельных множествах отображений топологических пространств // ДАН СССР. – 1978. – 248, N1. – С.37-40.

11. Цейтлин М.Я. О множествах точек разрыва раздельно непрерывных функций // Мера и интеграл. – Куйбышев, 1988. – С.147-151.

12. Breckenridge J.C., Nishiura T. Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – 4, N2. – P.191-203.

13. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. Нарізно неперервні функції з сепарабельною множиною точок розриву // Чернів. ун-т. – Чернівці, 1990. – 11с. – Деп. в УкрНДІНТІ, N902-Ук90.

14. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. Про нарізно неперервні функції на добутках метризовних просторів // Доповіді АН України. – 1993. – N4. – С.28-31.

15. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, N6. – С.740-747.

16. Михайлюк В.В. Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень: дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1995. – 82 с.

17. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете / Дис... докт. фіз. - мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.

18. Маслюченко О.В. Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: дис. ... канд. фіз.-

мат. наук. – Чернівці, 2002. – 149 с.

19. *Маслюченко О.В.* Побудова ω -первісних та різні аналоги компактних операторів: дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2012. – 300с.

20. *Енгелькінг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

21. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень// Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №9. – С. 1209-1220.

22. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.:Наука, 1992. – 368с.

23. *Rudin W.* Lebesgue first theorem// Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press, 1981. – P. 741-747.