УДК 517.555

©2016 р. **А.І. Бандура**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ДОБУТОК ДВОХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ Є ФУНКЦІЄЮ З ТОГО Ж КЛАСУ

Узагальнено результати А. Д. Кузика та М. М. Шеремети про властивості цілих функцій обмеженого l-індексу на випадок цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком. Зокрема, доведено, що клас цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є замкненим відносно операції множення функцій.

We generalize the results of A. D. Kuzyk and M. M. Sheremeta on properties of entire functions of bounded l-index for entire functions of bounded L-index in direction. In particular, it is proved that a class of entire functions of bounded L-index in direction is closed under the operation of multiplication of functions.

1. Вступ. А. Кузик та М. Шеремета ([1]-[2]) зробили важливий внесок у побудову теорії цілих функцій обмеженого l-індексу у випадку однієї змінної. Нами спільно із О. Скасківим узагальнено їхнє означення для цілих функцій декількох змінних, замінивши у ньому звичайну похідну на похідну за напрямком. Відповідно такі функції називаються функціями обмеженого L-індексу за напрямком (див. означення нижче). Їхні властивості досліджені у багатьох статтях ([3]-[6]). Підсумком цих досліджень є монографія [7]. Зазначимо, що наявний інший підхід до введення поняття обмеженого індексу у $\mathbb{C}^n$ через заміну похідної на частинні похідні (див., наприклад, статті М. Салмассі, М. Бордуляк, М. Шеремети, Ф. Нурая та Р. Патерсона [8]-[12]).

У цій статті ми доведемо один критерій обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій у $\mathbb{C}^n$, а також те, що добуток цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є функцією обмеженого L-індексу за напрямком. Ґ. Фріке [13] отримав відповідний критерій для цілих функцій обмеженого індексу, а М. Шеремета [14] його узагальнив для цілих функцій обмеженого l-індексу. Використовуючи опис поводження логарифмічної похідної та розподілу нулів цих функцій Ґ. Фріке [15] довів, що клас цілих функцій обмеженого індексу є замкненим відносно множення. Для l-індексу відповідне твердження отримали М. Шеремета та А. Кузик [2]. Водночас зауважимо, що сума двох цілих функцій обмеженого індексу може не бути функцією обмеженого індексу [17]. У кінці статті наведено подібний приклад для цілих функцій обмеженого індексу за напрямком.

2. Основні поняття та позначення. Нехай $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Наведемо основне означення.

Означення 1. [3] Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right|}{m! L^m(z)} \le \max\left\{\frac{\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right|}{k! L^k(z)} : 0 \le k \le m_0\right\},$$

де $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} := F(z)$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} := \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \mathbf{grad} F, \overline{\mathbf{b}} \rangle$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\Big(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}}\Big)$, $k \ge 2$.

Найменше таке $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *цілої функції* $F(z)$ *і позначається* $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$.

Якщо $L(z) \equiv 1$, то $F(z)$ називається *функцією обмеженого індексу за напрямком* $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F) = N_{\mathbf{b}}(F, 1)$.

У випадку $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$ та $L = l$ ми отримаємо означення цілої функції обмеженого l-індексу (див. [1,2,14]); а якщо ж ще й $L(z) \equiv 1$, то воно зводиться до означення цілої функції обмеженого індексу, яке запропоноване Б. Лепсоном [16].

Нам будуть потрібні деякі позначення. Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\inf\limits_{t_0\in\mathbb{C}}\inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})}\colon |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\}$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\sup\limits_{t_0\in\mathbb{C}}\sup\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\}$. Через $Q_{\mathbf{b}}^n$ позначимо клас функцій L, які задовольняють умову $(\forall \eta \ge 0)$: $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$.

Нехай $L^*(z)$ — додатна неперервна функція у $\mathbb{C}^n$. Ми пишемо $L \asymp L^*$, якщо для деяких θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 \le \theta_2 < +\infty$, та усіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконуються нерівності $\theta_1 L(z) \le L^*(z) \le \theta_2 L(z)$.

Для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо $g_{z^0}(t) \ne 0$ для усіх $t \in \mathbb{C}$, то покладемо $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо $g_{z^0}(t) \equiv 0$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b}\colon t \in \mathbb{C}\}$. І нарешті коли $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та (a_k^0) є послідовністю нулів функції $g_{z^0}(t)$, тоді $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{z^0 + t\mathbf{b}\colon |t - a_k^0| \le \frac{r}{L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})}\right\}$, $r > 0$. Нехай $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0\in\mathbb{C}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0)$. Зауважимо, що при $L(z) \equiv 1$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F) \subset \{z \in \mathbb{C}^n : dist(z, Z_F) < r|\mathbf{b}|\}$, де Z_F — нульова множина функції F. Через $n\big(r, z^0, t_0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0 - t_0| \le r} 1$ позначимо лічильну функцію послідовності нулів (a_k^0).

2. Допоміжні твердження. Нам будуть потрібні три наступні твердження, отримані у [3].

Теорема 1. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $L \asymp L^*$. Ціла функція $F(z)$ є функцією обмеженого L^*-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли F є обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$.

Теорема 2. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$*

$$\frac{\left|\frac{\partial^{p+1}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{p+1}}\right|}{L^{p+1}(z)} \le C \max_{0\le k\le p} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{L^{k}(z)}. \qquad (1)$$

Теорема 3. *Нехай F — ціла функція у $\mathbb{C}^n$, $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли*

1) для кожного $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для усіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le PL(z); \qquad (2)$$

2) для будь-якого $r > 0$ існує $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ такого, що $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, та усіх $t_0 \in \mathbb{C}$

$$n\left(\frac{r}{L(z^0 + t^0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{F}\right) \le \widetilde{n}(r). \qquad (3)$$

3. Основні теореми. Використовуючи теорему 2, доведемо таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $C \in (0, +\infty)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що для усіх $z \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{k!L^{k}(z)} \ge C \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{k!L^{k}(z)}. \qquad (4)$$

Доведення. Нехай $0 < \theta < 1$. Якщо ціла функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, то за теоремою 1 вона є обмеженого L^*-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, де $L^*(z) = \theta L(z)$. Позначимо $N^* = N_{\mathbf{b}}(L_*, F)$. Таким чином, можна вивести (див. також доведення теореми 2.9, [7,с.38-39]), що

$$\max_{0\le k\le N_{\mathbf{b}}(L_*,F)} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{k!L^{k}(z)} \ge \theta^{N_{\mathbf{b}}(L_*,F)-j} \frac{\left|\frac{\partial^{j}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{j}}\right|}{j!L^{j}(z)}$$

для усіх $j \ge 0$ та

$$\sum_{j=N_{\mathbf{b}}(L_*,F)+1} \frac{\left|\frac{\partial^{j}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{j}}\right|}{j!L^{j}(z)} \le \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{k=0}^{N_{\mathbf{b}}(L_*,F)} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{k!L^{k}(z)},$$

тобто отримали (4) із $N = N^*$ та $C = \frac{1-\theta}{\theta}$.

Тепер доведемо достатність. Міркуючи подібно, як у статті Ґ. Фріке [13], з (4) виводимо, що

$$\frac{\left|\frac{\partial^{N+1}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{N+1}}\right|}{(N+1)!L^{N+1}(z)} \le \frac{N+1}{C} \max_{0\le k\le N} \frac{\left|\frac{\partial^{k}F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k}}\right|}{k!L^{k}(z)}.$$

Застосовуючи тепер теорему 2, отримуємо потрібний висновок.

Наведемо застосування теореми 3.

Теорема 5. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Phi(z)$ — ціла функція у $\mathbb{C}^n$ та $\Psi(z) = F(z)\Phi(z)$. Функція $\Psi(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли функція $\Phi(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$.*

Доведення. Позаяк ціла функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, за теоремою 3 для кожного $r > 0$ існує $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для усіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, при яких $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, та усіх $t_0 \in \mathbb{C}$ $n\left(\frac{r}{L(z^0+t^0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{F}\right) \le \widetilde{n}(r)$. Звідси,

$$n\left(\frac{r}{L(z^0+t^0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{\Phi}\right) \le$$
$$\le n\left(\frac{r}{L(z^0+t^0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{\Psi}\right) \le$$
$$\le n\left(\frac{r}{L(z^0+t^0\mathbf{b})}, z^0, t_0, \frac{1}{\Phi}\right) + \widetilde{n}(r).$$

Таким чином, умова 2 теореми 3 виконується або не виконується одночасно для обох функцій $\Psi(z)$ та $\Phi(z)$. Якщо $\Phi(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, то для кожного $r > 0$ існують числа $P_F(r) > 0$ та $P_\Phi(r) > 0$ такі, що $\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le P_f(r)L(z)$, $\left|\frac{1}{\Phi(z)}\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le P_\Phi(r)L(z)$ для усіх $z \in (\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(F)) \cap (\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Phi))$. Оскільки

$$\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Psi) \subset (\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(F)) \cap (\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Phi)),$$
$$\left|\frac{1}{\Psi(z)}\frac{\partial \Psi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le \left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| + \left|\frac{1}{\Phi(z)}\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right|,$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Psi)$ ми маємо $\left|\frac{1}{\Psi(z)}\frac{\partial \Psi(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le (P_F(r) + P_\Phi(r))L(z)$, тобто за теоремою 3 функція $\Psi(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Навпаки, нехай $\Psi(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і $r > 0$. Спершу ми покажемо, що для кожного $\widetilde{z}^0 = z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(F)$ $(r > 0)$ та усіх $\widetilde{d}^k = z^0 + d^0_k\mathbf{b}$, де d^0_k є нулями функції $\Phi(z^0 + t\mathbf{b})$, маємо

$$|\widetilde{z}^0 - \widetilde{d}^k| > \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(z^0, r)} \ge \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}. \tag{5}$$

З іншої сторони, нехай існують $\widetilde{z}^0 = z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Phi)$ та $\widetilde{d}^k = z^0 + d^0_k\mathbf{b}$ такі, що $|\widetilde{z}^0 - \widetilde{d}^k| \le \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(z^0,r)}$. Тоді за визначенням $\lambda^{\mathbf{b}}_2$ є справедливою така оцінка $L(\widetilde{d}^k) \le \lambda^{\mathbf{b}}_2(z^0, r)L(\widetilde{z}^0)$. Звідси, $|\widetilde{z}^0 - \widetilde{d}^k| = |\mathbf{b}| \cdot |t_0 - d^0_k| \le \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{d}^k)}$, тобто $|t_0 - d^0_k| \le \frac{r}{2L(\widetilde{a}^k)}$, а це суперечить тому, що $\widetilde{z}^0 \in \mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{b}}_r(\Phi)$.

Розглянемо $\overline{K}_0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - t_0| \le \frac{r}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right\}$. Ця множина не містить нулів функції $\Phi(z^0 + \mathbf{b})$, але може містити нулі $\widetilde{c}^k = z^0 + c^0_k\mathbf{b}$ функції $\Psi(z^0 + t\mathbf{b})$. Позаяк $\Psi(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, то множина $\overline{K}_0$ за теоремою 3 містить щонайбільше $\widetilde{n}_1 = \widetilde{n}_1\left(\frac{r}{2\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right)$ нулів c^0_k функції $\Psi(z^0 + t\mathbf{b})$. Для усіх $c^0_k \in \overline{K}_0$, використовуючи означення $Q^n_{\mathbf{b}}$, ми отримаємо таку нерівність $L(z^0 + c^0_k\mathbf{b}) \ge \lambda^{\mathbf{b}}_1\left(\frac{r}{\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right) L(z^0 + t^0\mathbf{b})$. Тому, кожна множина $m^0_k = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c^0_k| \le \frac{r_1}{L(z^0+c^0_k\mathbf{b})}\right\}$ з $r_1 = \frac{r\lambda^{\mathbf{b}}_1\left(\frac{r}{\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right)}{4(\widetilde{n}_1+1)\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}$ міститься у множині $s^0_k = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c^0_k| \le \frac{r_1}{\lambda^{\mathbf{b}}_1\left(\frac{r}{\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right)L(z^0+t^0\mathbf{b})}\right\}$. Загальна сума діаметрів цих множин не перевищує

$$\frac{2\widetilde{n}_1 r_1}{\lambda^{\mathbf{b}}_1\left(\frac{r}{\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right)L(z^0 + t_0\mathbf{b})} = \frac{r}{2\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)L(z^0+t_0\mathbf{b})} \times$$
$$\times \frac{\widetilde{n}_1}{(\widetilde{n}_1 + 1)} < \frac{r}{2\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)L(z^0+t_0\mathbf{b})}.$$

Тому, існує таке $r^* \in \left(0, \frac{r}{2\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}\right)$, що для всіх t з кола $\{t\colon |t - t_0| = \frac{r^*}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\}$ точка $z^0 + t\mathbf{b} \notin G^{\mathbf{b}}_{r_1}(\Psi)$, а тому $z^0 + t\mathbf{b} \notin G^{\mathbf{b}}_{r_1}(F)$. За теоремою 3 для усіх таких точок $z^0 + t\mathbf{b}$ справджується

$$\left|\frac{1}{\Phi(z^0 + t\mathbf{b})}\frac{\partial \Phi(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| \le$$
$$\le \left|\frac{1}{\Psi(z^0 + t\mathbf{b})}\frac{\partial \Psi(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| +$$
$$+ \left|\frac{1}{F(z^0 + t\mathbf{b})}\frac{\partial F(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| \le$$

$$\leq (P^*_\Psi + P^*_F) L(z^0 + t\mathbf{b}), \qquad (6)$$

де P^*_Ψ та P^*_F залежать тільки від r_1, тобто лише від r. Але функції $\frac{1}{\Phi(z)}\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \mathbf{b}}$ є аналітичними у $\overline{K}_0$. Отож, застосовуючи принцип максимуму модуля до функції $\frac{1}{\Phi(z^0+t\mathbf{b})}\frac{\partial \Phi(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}$ як функції змінної t, ми отримаємо, що модуль такої функції у точці t_0 не перевищує максимуму її модуля на колі $\left\{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| = \frac{r^*}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}$. Це означає, що нерівність (6) виконується для $z^0 + t_0\mathbf{b}$. Отже, ми довели, що перша умова теореми 3 виконується. Вище ми перевірили, що друга умова теореми 3 також виконується. З огляду на теорему 3 функція $\Phi(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Нижче наведено приклад функцій обмеженого індексу за напрямком, сума яких є функцією необмеженого індексу за тим самим напрямком. Наша побудова базуватиметься на ідеях зі статті [17] (див. також [14, с.36]).

Приклад 1. Нехай $F(z) = \cos\langle z, c\rangle + \cosh\langle z, c\rangle$, де $c \in \mathbb{C}^n$ вибране так, що $\langle c, \overline{\mathbf{b}}\rangle = 1$. Позаяк $\frac{\partial^4 F(z)}{\partial \mathbf{b}^4} \equiv F(z)$, для $p \geq 4$ маємо

$$\frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| \leq \frac{G(z)}{4}, \qquad (7)$$

де $G(z) = \max\left\{\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \leq k \leq 3\right\}$. Отже, $F(z)$ — обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і $N_\mathbf{b}(F) = 3$.

Повторюючи міркування з [17], отримаємо, що

$$(\forall z \in \mathbb{C}^n):\ G(z) \geq A \exp\{0,5|\langle z, c\rangle|\}, \qquad (8)$$

де $A = const > 0$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + \langle z, c\rangle 2^{-j})^j.$$

Як відомо, вона є функцією необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$ таким, що $\langle \mathbf{b}, c\rangle \neq 0$, бо кратність її нулів необмежена (див. також приклад 1.4 [7, с.19]). Позначивши $t = \langle z, c\rangle$, отримаємо функцію $\varphi(t) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + t2^{-j})^j$, яка є функцією однієї комплексної змінної. Для неї у статті [17] отримані такі співвідношення

$$\frac{|\varphi^{(p)}(t)|}{p!} \leq BM(2r, \varphi), \qquad (9)$$

$$M(2r, \varphi) \leq C \exp\{0,5|\langle z, c\rangle|\} \leq C' G(z), \qquad (10)$$

де $|t| = r$, $B = M(2, \varphi) \geq 1$, $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(t)| : \ |t| = r\}$, C та C' — додатні сталі.

Нехай $\varepsilon > 0$ досить мала стала, $H(z) = F(z) + \varepsilon\Phi(z)$. Тоді з врахуванням (7), (9), (10) для $n \geq 4$

$$\frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| \leq \frac{G(z)}{4} + \varepsilon BM(2r, \varphi) \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon BC'\right) G(z). \qquad (11)$$

А для $n \leq 3$ з (9) та (10) випливає

$$\frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| \geq \frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| - \varepsilon BM(2r, \varphi) \geq$$
$$\geq \frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| - \varepsilon BC' G(z),$$

тобто

$$\max_{0 \leq p \leq 3}\frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| \geq G(z) - \varepsilon BCG(z) =$$
$$= (1 - \varepsilon BC')G(z). \qquad (12)$$

З (11) та (12) при $\varepsilon = \dfrac{3}{8BC'}$ тепер отримуємо

$$\frac{1}{p!}\left|\frac{\partial^p H(z)}{\partial \mathbf{b}^p}\right| \leq \frac{1/4 + \varepsilon BC'}{1 - \varepsilon BC'}\max_{0 \leq k \leq 3}\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k H(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| =$$
$$= \max\left\{\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k H(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \leq k \leq 3\right\}.$$

Отже, H — функція обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і $N_\mathbf{b}(H) = 3$. Водночас, F — функція обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$, але $\Phi(z) = \frac{H(z) - F(z)}{\varepsilon}$ — необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кузык А.Д., Шеремета М.Н.* Целые функции ограниченного l-распределения значений // Матем. заметки. – 1986. – **39**, N1. – С. 3-13. Engl. transl. in: *Kuzyk A.D., Sheremeta M.M.* Entire functions of bounded l-distribution of values. Math. notes. – 1986. – **39**, N1. – P. 3-8.

2. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, N2. – С. 142-150. Engl.transl. in: *Sheremeta M. N., Kuzyk A. D.* Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index // Sib. Math. J. – 1992. – **33**, N2. – P. 304-312.

3. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком // Mat. Stud. – 2007. – **27**, N1. – P. 30-52.

4. *Бандура А. І.* Достатні умови обмеженості L-індексу за напрямом для цілих функцій з "плоскими"нулями роду p // Матем. вісник НТШ. – 2009. – **6**. – P. 44-49.

5. *Bandura A.I., Skaskiv O.B.* Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems // Mat. Stud. – 2014. – **41**, N1. – P. 45–52.

6. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, N1. – P. 103–109. dx.doi.org/10.15330/ms.43.1.103–109.

7. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Chyslo, 2016. – 130 p. https://arxiv.org/abs/1508.07486 (accepted for publication in http://chyslo.com.ua/)

8. *Salmassi M.* Functions of bounded indices in several variables // Indian J. Math. – 1989. – **31**, N3. – P. 249–257.

9. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. М.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції багатьох змінних // Доп. НАН України. – 1993. – **9**. – С. 10–13.

10. *Бордуляк М. Т.* Простір цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого **L**-індексу // Матем. студії. – 1995. – **4**. – С. 53–58.

11. *Nuray F., Patterson R. F.* Entire bivariate functions of exponential type // Bull. Math. Sci. – 2015. – **5**, N2. – C. 171–177. dx.doi.org/10.1007/s13373-015-0066-x

12. *Nuray F., Patterson R. F.* Multivalence of bivariate functions of bounded index // Le Matematiche. – 2015. – **70**, N2. – C. 225–233. dx.doi.org/10.4418/2015.70.2.14

13. *Fricke G.H.* Entire functions of locally slow growth // J. Anal. Math. – 1975. – **28**, N1. – P. 101–122.

14. *Sheremeta M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.

15. *Fricke G. H.* Functions of bounded index and their logarithmic derivatives // Math. Ann. – 1973. – **206**. – C. 215-223.

16. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. – 1968. – **2**. – P. 298–307.

17. *Pugh W. J.* Sums of functions of bounded index // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **22**. – P. 319-323.