УДК 517.55

©2015 р. О.Б. Скасків, Л.О. Шаповаловська

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Досліджується розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з попарно незалежними і неоднаково розподіленими випадковими коефіцієнтами. Отримані результати узагальнюють деякі теореми Tian Fanji, П.Філевича та інших.

Distribution of the abscissas of convergence for a random Dirichlet series with pairwise independent and non-identically distributed random coefficients is considered. The obtained results generalizes some theorems of Tian Fanji, P.Filevych and others.

1. Вступ. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір, а $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин на ньому. Нехай $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, де $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k}$$

$(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$. Через $\sigma_{зб}(F, \omega)$ і $\sigma_a(F, \omega)$ позначимо відповідно абсциси збіжності і абсолютної збіжності цього ряду. Відомо [1–4], що для фіксованого $\omega \in \Omega$

$$\sigma_a(F, \omega) \le \sigma_{зб}(F, \omega) \le \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k} \le \le \sigma_a(F, \omega) + \tau(\Lambda), \tag{1}$$

де

$$\tau(\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \ln n/\lambda_n,$$

У випадку, коли $\tau(\Lambda) = 0$,

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k} \tag{2}$$

для фіксованого $\omega \in \Omega$. Позначимо

$$\sigma(F, \omega) := \sigma_a(F, \omega).$$

Якщо послідовність $\mathbf{f}$ є послідовністю незалежних випадкових величин (f_k), то за законом нуля і одиниці Колмогорова [5, с.43] випадкова величина $\sigma(F, \omega)$ є майже напевно (м.н.) сталою, тобто, $\sigma(F, \omega) = \sigma \in [0, +\infty]$ м.н.

У статтях [6–8] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ у випадку $\tau(\Lambda) < +\infty$. Так, у статті [6, Теорема 1] доведено, що у випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda) < +\infty$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} = +\infty$, а для математичних сподівань виконується умова

$$(\exists\alpha > 0)(\forall k \ge 0)\colon\ \mathbf{M}|Z_k|^\alpha < +\infty, \tag{3}$$

то $\sigma_a(F, \omega) = +\infty$ м.н. Якщо, крім цього, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} k/\lambda_k < +\infty$ (звідси випливає, що $\tau(\Lambda) = 0$) і

$$(\exists\beta > 0)(\forall k \ge 0)\colon\ \mathbf{M}|Z_k|^{-\beta} < +\infty, \tag{4}$$

то [6, Теорема 3] з умови $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} = 0$ випливає, що $\sigma_a(F, \omega) = 0$ м.н. Не складно зауважити, що те ж саме тримаємо, якщо м.н. для всіх достатньо великих k виконуються нерівності $k^{-\gamma} \le |Z_k(\omega)| < k^\gamma$, $\gamma > 0$. Останні ж нерівності за лемою Бореля-Кантелі випливають з умов (3) і (4) (що виконуються для всіх досить великих k), наприклад, з $\gamma = \max\{2/\alpha, 2/\beta\}$.

Найбільш загально, той самий висновок отримаємо коли

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} = 0 \ \text{ м.н.} \tag{5}$$

Власне виконується таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $\tau(\Lambda) = 0$, $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.*

Якщо виконується умова (5), *то м.н.*

$$\sigma_{зб}(F,\omega)=\sigma_a(F,\omega)=\alpha_0:=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}.$$

Доведення Твердження 1 елементарно отримуємо з (1), тому його не наводимо.

З тих самих мотивів у випадку $\alpha_0=+\infty$ для рівності $\sigma_a(F,\omega)=+\infty$ м.н. замість умови $\tau(\Lambda)=0$ достатньо, щоб $\tau(\Lambda)<+\infty$.

У статтях [7, 8] у випадку незалежних випадкових величин $\mathbf{f}=(f_k)$, зокрема, узагальнювалось на клас $\mathcal{D}(\Lambda)$ твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів, доведеної в [9] (див. також [5, с.38]). Крім цього, в [7] у випадку, коли $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$, $\tau(\Lambda)<+\infty$, $0<c_1\le|Z_k(\omega)|\le c_2<+\infty$ м.н. і $\mathbf{M}Z_k=0$ $(k\ge0)$, доведено, що $\sigma_{зб}(F,\omega)\le\sigma_a(F,\omega)+\tau(\Lambda)/2$ м.н.

Варто відзначити, що умову (5) можна замінити умовою на послідовність функцій розподілу випадкових величин $(|Z_k(\omega)|)$. Власне, за достатньою умовою збіжності до нуля м.н., для того, щоб виконувалась умова (5) достатньо, щоб $(\forall\varepsilon>0)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P\{\omega\colon|\ln|Z_k(\omega)||\ge\varepsilon\lambda_k\}<+\infty,$$

а вже остання умова виконується, якщо для кожного $\varepsilon>0$ збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-F_k^*((1+\varepsilon)^{\lambda_k}))+F_k^*(e^{-\varepsilon\lambda_k}\right)<+\infty,$$

де $F_k^*(x):=P\{\omega\colon|Z_k(\omega)|<x\}$ — функція розподілу $|Z_k(\omega)|$.

Виявляється, що у загальному випадку рядів з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ можна знайти подібну умову (що виявлятиметься і у певному сенсі близькою до необхідної), яка гарантуватиме, що абсциса збіжності ряду Діріхле $F(z,\omega)$ м.н. дорівнює наперед заданому дійсному числу. Встановлення оцінок абсцис збіжності вказаних загальних випадкових рядів Діріхле, з яких, зокрема, випливатиме щойно описаний ефект, є метою даної статті.

Наступний варіант добре відомої леми Бореля-Кантелі дозволить нам умову сукупної незалежності послідовності випадкових величин замінити на умову їхньої попарної незалежності.

Лема 1. *Нехай* (A_k) *– довільна послідовність подій, тобто,* $A_k\in\mathcal{A}$ $(k\in\mathbb{N})$. *Виконуються наступні твердження:*
1. *Якщо збігається ряд* $\sum_{k=0}^{+\infty}P(A_k)$, *то серед подій* (A_k) *з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, тобто,* $P(\overline{C})=1$, *де* $C:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}A_k$ — *подія, яка полягає в тому, що серед подій* (A_k) *відбувається нескінченна їх кількість.*
2. *([10]–[13, с.84]) Якщо події* (A_k) *попарно незалежні і* $P(\overline{C})=1$, *тобто, серед подій* (A_k) *з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, то* $\sum_{k=0}^{+\infty}P(A_k)<+\infty$.

Друга частина цієї леми є уточненням добре відомого зі стандартних курсів теорії ймовірностей варіанту леми Бореля-Кантелі (див, наприклад, [5, с.7], [14, с.68]), у якій припускається сукупна незалежність подій (A_k).

Зазначимо, що дана стаття є узагальненням на клас випадкових рядів Діріхле, виконаних недавно нами досліджень про радіуси збіжності випадкових лакунарних степеневих рядів [15], а з отриманих нами там тверджень у вигляді простих наслідків випливають, наприклад, ряд результатів з статей [16–18].

2. Основні результати. Надалі скрізь вважатимемо, що $\tau(\Lambda)=0$.

Теорема 1. *Нехай* $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$. *Припустимо, що* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ — *послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x):=P\{\ \omega:|f_k(\omega)|<x\}$, $x\in\mathbb{R}$, $k\ge0$. *Виконуються наступні твердження:*
a) $\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\ge\rho\in(-\infty,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon)^{\lambda_k}))<\infty$;
b) *Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k>-\infty$ $(k\ge0)$, $\varliminf_{k\to+\infty}\delta_k=e^{-\rho}$, $\rho\in(-\infty,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(\delta_k^{\lambda_k}))=+\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\le\rho$ *м.н.*

Доведення теореми 1. a) Вважатимемо спочатку, що $\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(-\infty,0]$ м.н., тобто, з (2) маємо, що
$(\exists B\in\mathcal{A},P(B)=1)(\forall\omega\in B)\colon$

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k}\leq-\rho.$$

За означенням верхньої границі

$$(\forall\omega\in B)(\forall\varepsilon>0)(\exists k^*(\omega)\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant k^*(\omega))\colon$$
$$|f_k(\omega)|<\big(e^{-\rho}+\varepsilon\big)^{\lambda_k},$$

Позначимо
$$A_k:=\big\{\omega\colon|f_k(\omega)|<\big(e^{-\rho}+\varepsilon\big)^{\lambda_k}\big\}.$$
Зрозуміло, що $B\subset C:=\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}A_k$, а подія $\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$ полягає в тому, що "серед подій послідовності $(\overline{A}_k)$ відбувається нескінченна їх кількість". Оскільки $P(C)=1$, то $P(\overline{C})=0$, а з попарної незалежності випадкових величин $(|f_k(\omega)|)$ випливає попарна незалежність посдій (A_k), і, тому, за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(\overline{A}_k)<+\infty.$$

Залишається врахувати, що
$$P(\overline{A}_k)=1-F_k\big(\big(e^{-\rho}+\varepsilon\big)^{\lambda_k}\big).$$

Якщо $\sigma(\omega,F)\geq\rho>0$ м.н., то для ряду Діріхле $F^*(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^*(\omega)e^{z\lambda_k}$, де $f_k^*(\omega)=f_k(\omega)e^{\rho\lambda_k}$, абсциса збіжності $\sigma^*(\omega)=\sigma(\omega,F)-\rho\geq0$ м.н., а функція розподілу $|f_k^*(\omega)|\colon\ F_k^*(x)=F_k(x\cdot e^{-\rho\lambda_k})$, і

$$F_k^*\big((1+\varepsilon)^{\lambda_k}\big)=F_k\big((e^{-\rho}+\varepsilon_1)^{\lambda_k}\big),\ \varepsilon_1=\varepsilon e^{-\rho}.$$

Цим завершується доведення п.**a)**.
b) Позначимо $A_k=\{\omega:|f_k(\omega)|<\delta_k^{\lambda_k}\}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(\overline{A}_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(\delta_k^{\lambda_k}))=+\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C})=1$, де $\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$. Звідси,
$(\forall\omega\in\overline{C})(\forall N\in\mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega)\geq N)\colon$

$$|f_k(\omega)|\geq\delta_k^{\lambda_k}\ (k=k_N(\omega),N\geq1),$$

тому,

$$-\ln|f_k(\omega)|\leq-\lambda_k\ln\delta_k\ (k=k_N(\omega),N\geq1),$$

звідки, остаточно м.н.

$$\sigma(F,\omega)=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k}\leq$$
$$\leq\varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}}\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k}\leq-\varliminf_{k\to+\infty}\ln\delta_k=\rho.$$

Теорема 2. *Нехай $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$.*
a) *Якщо існують $\rho\in(-\infty,+\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k\to+0$ $(k\to+\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k}))<\infty$, то*
$$\sigma(F,\omega)\geq\rho\ \text{м.н.}$$
b) $\sigma(F,\omega)=-\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow(\forall E>1)\colon$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(E^{\lambda_k}))=+\infty.$$

Доведення теореми 2. a) Позначимо тепер $A_k=\big\{\omega\colon|f_k(\omega)|<(e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k}\big\}$. Враховуючи, що $1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon)^{\lambda_k})=P(\overline{A}_k)$, з умови

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k}))<\infty$$

отримаємо $\sum_{k=0}^{+\infty}P(\overline{A}_k)<\infty$, і за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C})=0$, $\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$. Звідси $P(C)=1$, $C:=\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}A_k$ і, тому, для кожного $\omega\in C$ існує $k=k^*(\omega)$ таке, що $\omega\in A_k$ для всіх $k\geq k^*(\omega)$, тобто, $(\forall k\geqslant k^*(\omega))\colon|f_k(\omega)|<(e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k}$. Звідки,

$$\sigma(F,\omega)=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k}\geq$$
$$\geq-\varlimsup_{k\to+\infty}\ln(e^{-\rho}+\varepsilon_k)=\rho\quad\text{м.н.}$$

b) За умовою $\sigma(F,\omega)=-\infty$ м.н. Тому, за означенням $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k}=+\infty$ м.н. $(\exists B\in\mathcal{A},\ P(B)=1)(\forall\omega\in B)(\forall E>1)(\forall N\in\mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega)\geq N,k_N(\omega)\in\mathbb{N})\colon$

$$|f_k(\omega)|\geq E^{\lambda_k}\quad(k=k_N(\omega)).$$

Звідси, $B\subset\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$, де $\overline{A}_k=\{\omega:|f_k(\omega)|\geq E^{\lambda_k}\}$, а, тому, $P(\overline{C})=1$. Отже за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо $\sum_{k=0}^{\infty}P(\overline{A}_k)=+\infty$. Залишається знову пригадати, що $P(\overline{A}_k)=1-F_k(E^{\lambda_k})$.

3. Деякі наслідки.

Наведемо кілька наслідків.

Твердження 2. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *— попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини* $a(\omega)$, $b(\omega)$ *такі, що* $(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \geq 0)(\forall k \geq k_0)$: $F_k(x) \leq F_a(x) := P\{\omega\colon a(\omega) < x\} \wedge F_k(x) \geq F_b(x) := P\{\omega\colon b(\omega) < x\}$ *і* $F_a(+0) < 1$ *та*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \mathbf{M}\Big(n_\Lambda\Big(\frac{\ln b}{1+\varepsilon}\Big)\Big) < +\infty, \tag{6}$$

де $n_\Lambda := \sum_{\lambda_k \leq t} 1$ *– лічильна функція послідовності* Λ, *то* $\sigma(F,\omega) = 0$ *м.н.*

Доведення. Переконаємось спочатку в тому, що можна застосувати п. **b)** теореми 1. Оскільки для $\delta_k = (\lambda_k)^{-1/\lambda_k}$ маємо $\delta_k \to 1-0$, $\delta_k^{\lambda_k} \to 0$ $(k \to +\infty)$, то $\rho = 0$ і для всіх досить великих k, $1-F_a(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1-F_k(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1-(1+F_a(+0))/2 = (1-F_a(+0))/2 > 0$, тобто, умови п. **b)** теореми 1 виконуються і, тому, $\sigma(F,\omega) \leq 0$ м.н.

Доведемо протилежну нерівність. Переконаємось в тому, що можна застосувати п. **a)** теореми 2. Зауважимо, що

$$\mathbf{M}\Big(n_\Lambda\Big(\frac{\ln b}{1+\varepsilon}\Big)\Big) = \int_0^{+\infty} n_\Lambda\Big(\frac{\ln x}{1+\varepsilon}\Big)\, dF_b(x) = \\ = \int_0^{+\infty} (1 - F_b((1+\varepsilon_0)^t))dn_\Lambda(t),$$

де $\varepsilon_0 = e^{1+\varepsilon}-1$. Тоді з умов нашого Твердження 2 випливає, що для будь-якого $\varepsilon_0 > 0$: $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - F_b((1+\varepsilon_0)^{\lambda_k})) < +\infty$. Звідси вже нескладно отримати, що виконується умова п. **a)** теореми 2 з $\rho = 0$. Застосування теореми 2 доводить, що $\sigma(F,\omega) \geq 0$ м.н.

Нескладно зауважити, що умова (6) виконується як тільки

$$(\exists\ \alpha,\beta \in (0,+\infty))\colon\ n_\Lambda(t) \leq \beta t^\alpha\ (t \geq t_0), \\ \mathbf{M}\big((\ln^+ b)^\alpha\big) < +\infty.$$

Якщо $\lambda_k \equiv k$, то можна вибрати $\alpha = 1$ і, звідси отримаємо теорему 2.1 з [18].

Цілком подібно до Твердження 2 доводиться таке твердження.

Твердження 3. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *— попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини* $a(\omega)$, $b(\omega)$ *такі, що* $(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \geq 0)(\forall k \geq k_0)$: $F_k(x) \leq F_a(x) \wedge F_k(x) \geq F_b(x)$ *і* $F_a(e^{-\rho}+0) < 1$ *та*

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F_b\big((e^{-\rho}+\varepsilon)^x\big)\big)dn_\Lambda(x) < +\infty \tag{7}$$

для кожного $\varepsilon > 0$, *то* $\sigma(F,\omega) = \rho$ *м.н.*

Умову (7) нескладно переписати у вигляді (6) через математичне сподівання.

Автори статті щиро вдячні А.О. Куриляку за цінні зауваження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мандельбройт С.* Ряды Дирихле, принципы и методы. – М.: Мир, 1973.
2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976.
3. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993.
4. *Задорожна О.Ю., Скасків О.Б.* Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса // Буковинський матем. журн. – 2013. – Т.1, №3-4. – С.45–50.
5. *Kahane J.–P.* Some random series of functions. – 2nd. ed. – Cambridge stud. in adv. math. 5. – Cambridge Univ. Press, 1985. – 308 p.
6. *Tian F.* Growth of random Dirichlet series // Acta Math. Sci. – 2000. – V.20, №3. – P.390–396.
7. *Filevych P.V.* On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series // Mat. Stud. – 2003. – V.20, №1. – P.33–39.
8. *Ding X., Xiao Y.* Natural boundary of random Dirichlet series // Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №7. – С.997–1005.
9. *Ryll-Nardzewski C.* D.Blackwell's conjecture on power series with random coefficients // Studia Math. – 1953. – V.13. – P.30–36.
10. *Erdős P., Rényi A.* On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eőtvős. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P.93–109.
11. *Petrov V.V.* Sums of idependent random variables. – New York: Springer, 1975.
12. *Мартикайнен А.И., Петров В.В.* О лемме Бореля-Кантелли // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. – 1990. – Т.184. – С.200–207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540–544).
13. *Billingsley P.* Probability and measure. – New York: Wiley, 1986.
14. *Скасків О.Б.* Теорія ймовірностей. – Львів: Число, 2012. – 143 с.

15. *Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B.* On the radius of convergence of random gap power series // Int. Journal of Math Analysis. – 2015 (подано до друку)
16. *Arnold L.* Über die Konverge einer zufälligen Potenzreihe // J. Reine Angew. Math. – 1966. – V.222. – P.79–112.
17. *Arnold L.* Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd.92. – S.356–365.
18. *Roters K.* Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients // Statistics and Probability Letters. – 1993. – V.18. – P.121–123.