УДК 517.9

©2015 р. В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АСИМПТОТИЧНІ ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПАРНОГО СТЕПЕНЯ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

Розглянуто алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку парного степеня малого параметра при старшій похідній.

The paper deals with algorithm of constructing asymptotic two phase soliton-type solution for singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients in the case of even degree of small parameter.

1. Вступ. Як відомо, багато хвильових процесів в однорідних середовищах описується хвильовим рівнянням вигляду [1, 2]

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

де $a = const$ – швидкість поширення хвиль.

При виведенні цього рівняння припускають амплітуду хвиль достатньо малою та відсутність дисипації і дисперсії. Відсутність дисперсії означає, що швидкість поширення хвиль не залежить від її частоти і довжини [1 – 4].

Врахування дисперсії і дисипації дозволяє описати нові якісні ефекти. Зокрема, дисперсія є причиною розпливання хвиль, а навіть мала дисипація приводить до затухання коливань. Ці явища описуються за допомогою нових (нелінійних) членів у рівняннях хвильового типу. З іншого боку, нелінійні рівняння дозволяють побачити новий якісний ефект – укручення фронту хвилі [3]. Саме врахування малої дисперсії і нелінійних членів при формуванні математичної моделі коливань рідини приводить до сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза

$$\varepsilon^2 u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0. \tag{1}$$

Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з найвідоміших нелінійних диференціальних рівнянь сучасної математичної фізики і вивчалося в працях багатьох вчених, зокрема, методом оберненої задачі розсіювання [5, 6].

Рівняння вигляду (1) асимптотичними методами вперше вивчалося в [7], де було запропоновано нелінійний метод ВКБ, за допомогою якого побудовано головний член асимптотичного розкладу для квазіперіодичного розв'язку рівняння (1). Згодом для цього рівняння досліджувалося питання про границю його розв'язку при $\varepsilon \to 0$, як аналітичними [8 – 10], так і чисельними методами [11, 12].

При врахуванні неоднорідностей середовища виникає рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром [13 – 17], розв'язки якого у загальному випадку (із-за наявності змінних коефіцієнтів) не можна побудувати у явному вигляді, а тому чи не єдиним підходом для його дослідження є асимптотичні методи.

У [14 – 17] розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{2}$$

де функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються асимптотичними рядами

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j a_j(x,t),$$

$$b(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j b_j(x,t)$$

з коефіцієнтами $a_j(x,t)$, $b_j(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])$, $j \geq 0$; $n \in \mathbf{N}$; ε – малий параметр, де показано, що вигляд асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (2) залежить від степеня малого параметра при старшій похідній.

Асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки рівняння (2) побудовано у [14] (випадок парного n та випадок, коли n непарне і більше за 1), у [15] (випадок $n=1$). Цілком природно виникає питання про побудову асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (2) при різних значеннях n. Це питання частково ($n=1$, $n=2$) розглядалося в [16, 17].

У даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівнянян (2) для випадку, коли $n=2(k+1)$, $k\in\mathbf{N}$.

2. Основні позначення. Позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови:

1^0. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^p\,\partial t^q\,\partial\tau^r}\,f(x,t,\tau)=0,$$

2^0. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^{\,p+q+r}}{\partial x^p\,\partial t^q\,\partial\tau^r}\,\big(f(x,t,\tau)-f^-(x,t)\big)=0,$$

а через $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})\subset G_1$ – простір таких нескінченно диференційовних функцій $f=f(x,t,\tau)\in G_1$, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0.$$

Нехай $G_2 = G_2(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f=f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, що існують $f_1^\pm = f_1^\pm(x,t,\tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x,t,\tau_1)\in G_1$ і такі нескінченно диференційовні функції $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел p_1, p_2, q_1, q_2, β_1, β_2 і $(x,t)\in K$ мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^{p_1}\frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}}\,\big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-$$
$$-\,f_1^\pm(x,t,\tau_2)-u_1^\pm(x,t)\big)=0,$$
$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^{p_2}\frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}}\,\big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-$$
$$-\,f_2^\pm(x,t,\tau_1)-u_2^\pm(x,t)\big)=0,$$

а $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f=f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, що існують $f_1^\pm = f_1^\pm(x,t,\tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x,t,\tau_1)\in G_1^0$, і для всіх невід'ємних цілих чисел p_1, p_2, q_1, q_2, β_1, β_2 і $(x,t)\in K$ мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^{p_1}\frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}}\,\big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-$$
$$-f_1^\pm(x,t,\tau_2)\big)=0,$$
$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^{p_2}\frac{\partial^{\,q_1+q_2+\beta_1+\beta_2}}{\partial x^{q_1}\partial t^{q_2}\partial\tau_1^{\beta_1}\partial\tau_2^{\beta_2}}\,\big(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-$$
$$-f_2^\pm(x,t,\tau_1)\big)=0.$$

Означення 1. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичною двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N\geq 0$ вона записується у вигляді:*

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon\right)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad(3)$$

де

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=$$
$$=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right],\quad(4)$$
$$\tau_1=\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \tau_2=\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon};$$

$u_j(x,t)$ – нескінченно диференційовні функції; $S_k = S_k(x,t)\in C^\infty\left(\mathbf{R}\times[0;T]\right)$, причому $\frac{\partial S_k}{\partial x}\big|_{\Gamma_k}\neq 0$; $\Gamma_k=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],$ $S_k(x,t)=0\}$, $k=1,2$; $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$, $j=\overline{1,N}$.

Криві Γ_k, $k=1,2$, називаються кривими розриву.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^N\right)$, $\varepsilon\to 0$, означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа N і від компакта $K\subset \mathbf{R}\times[0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)|\le C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і всіх $(x,t)\in K$.

3. Вигляд асимптотичного розв'язку. З урахуванням результатів [14 – 17] асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (2) у випадку, коли $n=2k$, $k=2,3,\ldots$, шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right],\qquad \tau_s=(x-\varphi_s(t))\,\varepsilon^{-n/2},\ s=1,2. \tag{5}$$

Члени регулярної частини асимптотики (5) є розв'язками системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{6}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}= =F_j(x,t), \tag{7}$$

де функції $F_j(x,t)$ знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_{j-1}(x,t)$, $j=\overline{1,N}$.

Питання про існування розв'язку системи (6), (7) і алгоритм його побудови розглянуто в [18, 19]. Тому надалі вважаємо, що функції $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, відомі.

Члени сингулярної частини асимптотики (5) є розв'язками системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3}+$$
$$+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+$$
$$+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}-$$
$$-b_0(x,t)V_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right)=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_2^3}+$$
$$+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+$$
$$+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}-$$
$$-b_0(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}(V_0V_j)+\frac{\partial}{\partial\tau_2}(V_0V_j)\right)=$$
$$=\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2), \tag{9}$$

де функції $\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $V_k(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $k=\overline{0,j-1}$.

4. Головний член асимптотики (5). Для того, щоб отримати розв'язок рівняння (8) у явному вигляді, припустимо, що функції $\varphi=\varphi_s(t)$, $s=1,2$, відомі і задовольняють початкову умову $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$, а також припустимо, що виконуються умови узгодженості:

$$a_0(\varphi_1(t),t)=a_0(\varphi_2(t),t):=a_0(t),$$
$$b_0(\varphi_1(t),t)=b_0(\varphi_2(t),t):=b_0(t),$$
$$u_0(\varphi_1(t),t)=u_0(\varphi_2(t),t):=u_0(t). \tag{10}$$

Функції $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)=V_0(\varphi_s(t),t,\tau_1,\tau_2)$, $s=1,2$, задовольняють диференціальні рівняння вигляду

$$\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}+3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial\tau_2^3}+$$
$$+a_0(t)\left[\varphi_1'(t)\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_1}+\varphi_2'(t)\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_2}\right]+$$
$$-b_0(t)\left(u_0(t)+V_{0s}\right)\left[\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_2}\right]=0, \tag{11}$$

і згідно умов (10) для них виконується рівність $V_{01}(t,\tau_1,\tau_2)=V_{02}(t,\tau_1,\tau_2)$.

Позначимо $V_0(t,\tau_1,\tau_2)=V_{01}(t,\tau_1,\tau_2)$. Двосолітонний розв'зок рівняння (11) можна записати у вигляді $V_0(t,\tau_1,\tau_2)=\bar V_0(\xi,\eta)$, де

$$\bar V_0(\xi,\eta)=4\left[c_1^2c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}\,e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}-\right.$$

$$-\varkappa_1 c_1^2 e^{-2\varkappa_1\xi} - \varkappa_2 c_2^2 e^{-2\varkappa_2\xi} +$$

$$+\frac{c_1^4 c_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)^2\varkappa_2}{4\varkappa_1^2(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}\, e^{-(4\varkappa_1+2\varkappa_2)\xi} +$$

$$\left. + \frac{c_1^2 c_2^4(\varkappa_1-\varkappa_2)^2\varkappa_1}{4\varkappa_2^2(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}\, e^{-(2\varkappa_1+4\varkappa_2)\xi}\right] \times$$

$$\times\left[1+\frac{c_1^2}{2\varkappa_1}\, e^{-2\varkappa_1\xi} + \frac{c_2^2}{2\varkappa_2}\, e^{-2\varkappa_2\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_1^2 c_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)^2}{4\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}\, e^{-2(\varkappa_1+\varkappa_2)\xi}\right]^{-2}, \qquad (12)$$

де

$$\xi(t,\tau_1,\tau_2) = \left(\frac{b_0(t)}{6}\right)^{1/2} \frac{\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)},$$

$$\eta(t,\tau_1,\tau_2) = \left(\frac{b_0(t)}{6}\right)^{3/2} \frac{\tau_1-\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)}. \qquad (13)$$

Тут позначено

$$\gamma_s(t) = -\varphi_s'(t)a_0(t) + b_0(t)u_0(t),$$

$$\varkappa_s(t) = \left(\frac{b_0(t)}{6}\right)^{-1/2}\sqrt{\gamma_s(t)},$$

$$c_s(\eta) = c_s(0)\exp\left(\varkappa_s^3(t)\eta\right)$$

і припускається, що $b_0(t) > 0$, $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $t \in [0;T]$, $\gamma_s(t) > 0$; $c_s(0) > 0$ – довільні сталі, $s = 1,2$.

Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай $n = 2k$, $k \geq 2$, і виконуються припущення:*
1. функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, причому $a_0(x,t) \neq 0$, $b_0(x,t) \neq 0$ для всіх $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$;
2. мають місце умови (10) з функціями $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C^\infty([0;T])$, для яких $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;
3. $b_0(t) > 0$, $\gamma_s(t) > 0$, $s = 1,2$, і $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ для всіх $t \in [0;T]$.

Тоді головний член асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) має вигляд

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + V_0(t,\tau_1,\tau_2), \qquad (14)$$

$$\tau_s = (x-\varphi_s(t))\,\varepsilon^{-n/2}, \; s = 1,2,$$

і задовольняє на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ рівняння (2) з точністю $O(\varepsilon^{1-n/2})$, а при $x \to \pm\infty$ – з точністю $O(\varepsilon)$.

Доведення теореми 1 проводиться шляхом асимптотичного оцінювання виразу, який отримується після підстановки функції (14) у рівняння (2) і врахування властивостей функцій з простору G_2^0 та умов узгодженості (10).

Зауваження 1. *У випадку $a(x,t,\varepsilon) = a(x,t)$, $b(x,t,\varepsilon) = b(x,t)$ функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (2) з точністю $O(1)$.*

5. Старші члени асимптотики (5). Для того, щоб з'ясувати питання про існування розв'язку рівняння (9), розглянемо рівняння для старших членів сингулярної частини асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2) на кривих розриву $x = \varphi(t)$, $s = 1,2$, тобто для функцій $V_{js}(t,\tau_1,\tau_2) = V_j(\varphi_s(t),t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$:

$$\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_2^3} +$$

$$+\left[\varphi_1'(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_1} +$$

$$+\left[\varphi_2'(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_2} -$$

$$-b_0(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}(V_{0s}V_{js}) + \frac{\partial}{\partial\tau_2}(V_{0s}V_{js})\right] =$$

$$= \mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2), \qquad (15)$$

де функції $\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, $s = 1,2$, визначаються рекурентно за функціями $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_{1s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $\ldots$, $V_{j-1,s}(t,\tau_1,\tau_2)$. Зокрема, при $j = 1$ за умов (10) маємо

$$\mathcal{F}_{1s} = -a_1(\varphi_s(t),t)\left[\varphi_1'(t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1} + \varphi_2'(t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right] +$$

$$+\left[(b_0(t)u_1(\varphi_s(t),t) + b_1(\varphi_s(t),t)u_0(t)) + \right.$$

$$\left. + b_1(\varphi_s(t),t)V_0\right]\left(\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right). \qquad (16)$$

Припустимо також, що додатково до умов (10) мають місце умови узгодженості вигляду

$$\mathcal{F}_{j1}(t,\tau_1,\tau_2) = \mathcal{F}_{j2}(t,\tau_1,\tau_2), \quad j = \overline{1,N}. \quad (17)$$

Умова (17) при $j = 1$ справджується, наприклад, у випадку, коли для всіх $t \in [0;T]$ маємо:

$$a_1(\varphi_1(t),t) = a_1(\varphi_2(t),t) := a_1(t), \qquad (18)$$

$$b_1(\varphi_1(t),t) = b_1(\varphi_2(t),t) := b_1(t), \qquad (19)$$

$$u_1(\varphi_1(t),t) = u_1(\varphi_2(t),t) := u_1(t). \qquad (20)$$

За умов (10), (17) виконується рівність $V_{j1}(t,\tau_1,\tau_2) = V_{j2}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, що дозволяє за допомогою переходу від змінних τ_1,τ_2 до змінних ξ,η (див. формули (13)) звести рівняння (15) до рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 \bar V_j}{\partial \xi^3} - b_0(t)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\bar V_0 \bar V_j\right) + \frac{\partial \bar V_j}{\partial \eta} = \bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta), \qquad (21)$$

де $\bar V_0(t,\xi,\eta)$ визначено формулою (12), а функції $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,N}$, отримано з $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, в результаті згаданої вище заміни змінних.

За умови 3 теореми 1 заміна змінних (13) є невиродженою.

Якщо функція $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,N}$, при кожному $\eta \ge 0$ належить простору швидко спадних щодо ξ функцій, то рівняння (21) має розв'язок $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $(\xi,\eta)\in \mathbf{R}\times[0;T_1]$, $j=\overline{1,N}$, де $T_1>0$ – деяке число, який належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій [20].

Вважаючи функцію $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,N}$, відомою, враховуючи виконану заміну змінних, від розв'язку задачі (21) повернемося до відповідного розв'язку рівняння (15) – функції $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, яку можна записати у вигляді

$$V_j(t,\tau_1,\tau_2) = \bar V_j(\xi(t,\tau_1,\tau_2),\eta(t,\tau_1,\tau_2)), \qquad (22)$$

де функції $\xi(t,\tau_1,\tau_2)$, $\eta(t,\tau_1,\tau_2)$ визначено формулами (13).

Оскільки $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,N}$, при кожному $\eta\in[0;T_1)$ належить простору швидко спадних щодо змінної ξ функцій, то при $\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2\neq 0$, $t\in[0;T]$, для всіх $k\in \mathbf{N}\cup\{0\}$ маємо

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^k V_j(t,\tau_1,\tau_2) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\tau_2^k V_j(t,\tau_1,\tau_2) = 0.$$

З умови $\eta\in[0;T_1)$ випливає нерівність

$$0 \le \left(\frac{b_0(t)}{6}\right)^{3/2}\frac{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))}{a_0(t)(\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t))} < \varepsilon^{n/2}T_1.$$

Ця нерівність має місце для всіх $t\in[0;T_2]$, де $T_2>0$ – деяке число, причому, взагалі кажучи, $T_2 = O(\varepsilon^{n/2})$.

Мають місце такі твердження.

Теорема 2. *Нехай $n=2k$, $k\ge 2$, і виконуються такі припущення:*
1. мають місце умови 1, 3 теореми 1;
2. функції $a_1(x,t)$, $b_1(x,t)$, $u_1(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$;
3. справджуються умови узгодженості (10), (18) – (20) з функціями $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^\infty([0;T])$, для яких $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$;
4. рівняння (21) при $j=1$ має розв'язок $\bar V_1(t,\xi,\eta)$, який при $\xi=\xi(t,\tau_1,\tau_2)$, $\eta=\eta(t,\tau_1,\tau_2)$ (згідно формул (13)) належить простору G_2.

Тоді функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t)+V_0(t,\tau_1,\tau_2)+ +\varepsilon\left(u_1(x,t)+V_1(t,\tau_1,\tau_2)\right), \qquad (23)$$

задовольняє на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ рівняння (2) з точністю $O\left(\varepsilon^{-n/2+2}\right)$.

Теорема 3. *Нехай $n=2k$, $k\ge 2$, і виконуються такі припущення:*
1. мають місце умови 1, 3 теореми 1;
2. функції $a_j(x,t)$, $b_j(x,t)$, $u_j(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, $j=\overline{2,N}$;
3. виконуються умови (10), (17) з функціями $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in C^\infty([0;T])$, для яких $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$;
4. рівняння (21) має розв'язок $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $j=\overline{1,N}$, який при $\xi=\xi(t,\tau_1,\tau_2)$, $\eta=\eta(t,\tau_1,\tau_2)$ (згідно формул (13)) належить простору G_2.

Тоді функція

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right),$$

$$\tau_s = (x-\varphi_1(t))\,\varepsilon^{-n/2}, \quad s=1,2, \qquad (24)$$

задовольняє рівняння (2) з точністю $O\left(\varepsilon^{N-n/2+1}\right)$ на множині $\mathbf{R}\times[0;\varepsilon^{n/2}T]$.

Доведення теорем 2, 3 аналогічне доведенню теореми 1 і проводиться шляхом асимптотичного оцінювання виразів, які отримуються після підстановки функцій (23) і (24) у рівняння (2) і врахування властивостей функцій з просторів G_2^0, G_2 та умов узгодженості (10), (18) – (20).

З теореми 3 випливає, що рівняння (2) має для довільного $N \geq 0$ асимптотичний розв'язок – функцію $Y_N(x,t,\varepsilon)$, яка задовольняє умови означення 2.1, тобто є N–им наближенням для асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (2).

6. Висновки. Побудовано асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку, коли малий параметр при старшій похідній має парний степінь. Доведено теорему про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє вихідне рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

2. *Ablowitz M.J.* Nonlinear dispersive waves. Asymptotic analysis and solitons. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2011. – 348 p.

3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

4. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с.

5. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – **39**. – P. 422-433.

6. *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095-1097.

7. *Miura R.M., Kruskal M.* Application of nonlinear WKB-method to the KdV equation // SIAM J. Appl. Math. – 1974. – **26**, N 3. – P. 376-395.

8. *Lax P.D., Levermore C.D.* The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 3. – P. 253-290.

9. *Lax P.D., Levermore C.D.* The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. II // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 5. – P. 571-593.

10. *Lax P.D., Levermore C.D.* The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. III // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – **36**, N 6. – P. 809-829.

11. *Grava T., Klein C.* Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg-de Vries and Whitham equations // Comm. Pure Appl. Math. – 2007. – **60**, N 11. – P. 1623-1664.

12. *Venakides S.* The Korteweg-de Vries equation with small dispersion: higher order Lax-Levermore theory // Comm. Pure Appl. Math. – 1990. – **43**, N 3. – P. 335-361.

13. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36 (219)**, N 2. – С. 63-124.

14. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, N 1. – С. 111-124.

15. *Samoylenko Yu.* Asymptotical expansions for one-phase soliton type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – 3. – P. 1435-1441.

16. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній // Вісник Київського національного університету. Математика. Механіка. – 2010. – Вип. 23. – С. 19-24.

17. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, N 3. – С. 378-387.

18. *Самойленко Ю.І.* Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2012. – **9**, N 1. – С. 293-300.

19. *Самойленко Ю.І.* Існування розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Буковинський мат. журн. – 2013. – **1**, N 1-2. – С. 118-122.

20. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – **13**. – P. 56-105.