УДК 517.956

©2013 р. **Пукальський І.Д.**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕРІВНОСТЯМИ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

За допомогою принципа максимума і апріорних оцінок вивчається крайова задача з нерівностями для еліптичного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах довільного порядку. В гельдерових просторах зі степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку поставленої задачі.

Using the maximum principle and a priori estimates we study a boundary value problem with inequalities for a second order elliptic equation with power singularities in the coefficients of an arbitrary order. We establish the existence and the uniqueness of the solution of the stated problem in Hölder spaces with a power weight.

Математичне моделювання багатьох задач механіки, фізики і теорії керувань приводить до вивчення систем нерівностей із частинними похідними [1, 2]. Рівняння з виродженнями за просторовими змінними описують різні процеси. У рівнянні Шредінгера, яке описує стан кванто-механічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [3]. Рівняннями із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси, радіальні коливання, тепло-масообмін при вирощуванні монокристалів [4]. Вивченню розв'язків нелокальної крайової задачі для систем двох еліптичних рівнянь з особливостями присвячено працю [5]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями приведені у працях [6–10].

У цій статті вивчається крайова задача з нерівностями для еліптичного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах на координатних площинах довільного порядку. Доведено єдиність, існування розв'язку поставленої задачі та встановлені оцінки розв'язку і його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1, \ldots, x_n)$ – координати точки $P(x) \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо в області D задачу знаходження функції $u(x)$, яка задовольняє рівняння

$$(Lu)(x) = \Big[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + A_0(x)\Big]u(x) = f(x) \qquad (1)$$

і крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}u - g)(x) = \lim_{x\to z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u + b_0(x)u - g(x)\Big] \geq 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u(x) \geq 0, \ \lim_{x\to z\in\partial D}[(\mathcal{B}u - g)u](x) = 0. \qquad (2)$$

Порядок особливостей коефіцієнтів диференціальних виразів L і $\mathcal{B}$ будуть характеризувати функції $s(a_i, x_i)$: $s(a_i, x_i) = |x_i|^{a_i}$ при $|x_i| \leq 1$; $s(a_i, x_i) = 1$ при $|x_i| \geq 1$; $S(a, P) = \min\{s(a, x_1), \ldots, s(a, x_n)\}$, a, a_1, $\ldots$, a_n – довільні фіксовані дійсні числа.

Нехай $\overline{D} = D \cup \partial D$, $P_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $P_i^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ – довільні точки з $\overline{D}$, l – додатне фіксоване дійсне число. Визначимо функціональні простори, в яких буде вивчатися задача (1), (2).

$C^l(\gamma;\beta;a;D)$ – множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в D вигляду $\partial_x^k u(P)$, $|k|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_0=\sup_{\overline{D}}|u|\equiv\|u;D\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;a;D\|_l=\sum_{|k|=0}^{[l]}\|u;\gamma;\beta;a;D\|_{|k|}+$$

$$+\langle u;\gamma;\beta;a;D\rangle_l\equiv$$

$$\equiv\sum_{|k|=0}^{[l]}\sup_{P\in\overline{D}}S(|k|\gamma+a;P)\prod_{m=1}^{n}s(-k_m\beta_m,x_m)\times$$

$$\times|\partial_x^k u(P)|+\sum_{|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_1,P_i^{(2)})\subset\overline{D}}S(l\gamma+a,\tilde{P})\times$$

$$\times s(-\{l\}\beta_i,\tilde{x}_i)\prod_{m=1}^{n}s(-k_m\beta_m,\tilde{x}_m)\times$$

$$\times|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_x^k u(P_1)-\partial_x^k u(P_i^{(2)})|,$$

γ, β_i – фіксовані дійсні числа, $\gamma\ge0$, $\beta_i\in(-\infty,\infty)$, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $s(a,\tilde{x}_i)=\min\{s(a,x_i^{(1)}),s(a,x_i^{(2)})\}$, $S(a,\tilde{P})=\min\{S(a,P_1),S(a,P_i^{(2)})\}$.

Щодо задачі (1), (2) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{ij=1}^{n}s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – додатні фіксовані сталі і $s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $s(\mu_i,x_i)A_i\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\mu_0,P)A_0(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $A_0(x)<0$ для $x\in\overline{D}$, $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;D)$, $\mu_0\ge0$, $\mu_i\ge0$, межа $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$;

б) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)}=\{b_1^{(s)},\dots,b_n^{(s)}\}$, $b_j^{(s)}=s(\beta_j,x_j)b_j(x)$ і $\overrightarrow{e}=\{e_1,\dots,e_n\}$, $e_j=\Big[\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x)\Big]^{-1/2}b_j$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(x)\in\partial D$ кут менший $\frac{\pi}{2}$, $s(\beta_j,x_j)b_j\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\delta,P)b_0(P)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$, $b_0(x)>0$, $\delta\ge0$, $g\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$, $\gamma=\max\Big\{\max_i(1+\beta_i),\max_i(\mu_i-\beta_i),\frac{\mu_0}{2},\delta\Big\}$.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ і справджується оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\le c\Big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha+$$

$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;D\|_{1+\alpha}\Big).\tag{3}$$

Доведення цього твердження наведемо пізніше.

Для дослідження задачі (1), (2) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовності допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничними значеннями послідовності розв'язків яких буде розв'язок задачі (1), (2).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $D_m=D\cap\{x\in D\,\big|\,s(1,x_i)\ge m^{-1}\}$, $m>1$, – послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до D. Розглянемо в області D задачу знаходження розв'язку рівняння

$$(L_1u_m)(x)\equiv\Big[\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\partial_{x_i}+a_0(x)\Big]u_m(x)=f_m(x),\tag{4}$$

який задовольняє на межі ∂D крайові умови

$$(\mathcal{B}_1u_m-g_m)(x)|_{\partial D}\equiv\Big[\sum_{i=1}^{n}h_i(x)\partial_{x_i}u_m+$$

$$+h_0(x)u_m-g_m(x)\Big]\Big|_{\partial D}\ge0,$$

$$u_m\Big|_{\partial D}\ge0,\ [u_m(\mathcal{B}_1u_m-g_m)]\Big|_{\partial D}=0.\tag{5}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, g_m при $x\in D_m$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і f, g відповідно, а при $x\in D\setminus D_m$ є неперервним продовженням зі збереженням норм і гладкості [11, стор. 82].

Сформулюємо принцип максимуму для розв'язків задачі (4), (5). Правильною є така теорема.

Теорема 2. *Якщо u_m – класичний розв'язок задачі (4), (5) в області D і виконані умови а), б), то для $u_m(x)$ правильна нерівність*

$$|u_m| \leq \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|h_0^{-1} g_m; D\|_0\}. \quad (6)$$

Доведення. Нехай $\max\limits_{\overline{D}} u_m(x) = u_m(P_0)$. Якщо $P_0 \in D$, то в точці P_0 виконуються співвідношення

$$\partial_{x_i} u_m(P_0) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_0)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P_0) \leq 0 \quad (7)$$

і задовольняється рівняння (4). З урахуванням (7) і рівняння (4) в точці P_0 правильна нерівність

$$u_m(P_0) \leq \|f_m a_m^{-1}; D\|_0. \quad (8)$$

Нехай $\min u_m(x) = u_m(P_1)$. Якщо $P_1 \in D$, то в точці P_1 виконуються співвідношення

$$\partial_{x_i} u_m(P_1) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P_1) \geq 0 \quad (9)$$

і задовольняється рівняння (4). З урахуванням (9) і рівняння (4) в точці P_1 маємо

$$u_m(P_1) \geq \inf_{\overline{D}}(f_m a_0^{-1}). \quad (10)$$

Якщо $P_0 \in \partial D$, то виконуються умови (5). Можливі два випадки: $u_m(P_0) = 0$ або $(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(P_0) = 0$. В другому випадку маємо $\frac{du_m(P_0)}{d\overrightarrow{e}} \geq 0$ (вектор $\overrightarrow{e}$ задовольняє умову б)), тому з рівності $\mathcal{B}_1 u_m(P_0) = g_m(P_0)$ маємо

$$u_m(P_0) \leq h_0^{-1}(P_0) g_m(P_0). \quad (11)$$

Якщо $P_1 \in \partial D$, то $\frac{du_m(P_1)}{d\overrightarrow{e}} \leq 0$. Враховуючи крайову умову $(\mathcal{B}_1 u_m(P_1) - g_m(P_1))u_m(P_1) = 0$, маємо

$$u_m(P_1) \geq h_0^{-1}(P_1) g_m(P_1). \quad (12)$$

Враховуючи нерівності (8), (10), (11), (12), для класичного розв'язку задачі (4), (5) одержуємо нерівність (6).

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(x)$. Введемо в просторі $C^l(D)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; a; D\|_l$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеревій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; a; D\|_l$, тільки замість функцій $s(a_i, x_i)$ беремо відповідно: $d(a_i, x_i) = \max(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$, якщо $a_i \geq 0$ і $d(a_i, x_i) = \min(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$, якщо $a_i < 0$; $\rho(a; P) = \max\{S(a, P), \max\limits_i m^{-a_i}\}$, якщо $a_i \geq 0$ і $\rho(a; P) = \min\{S(a, P), \min\limits_i m^{-a_i}\}$, якщо $a_i < 0$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі (4), (5) справджується оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \\ + \|g; \gamma; \beta; \delta; D\|_{1+\alpha}). \quad (13)$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [12], маємо

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq \\ \leq (1 + \varepsilon^\alpha)\langle u_m; \gamma; \beta; 0; D\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; D\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0; 1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m; \gamma; \beta; 0; D\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в D точок P_1 та $P_i^{(2)}$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq E(u_m), \quad (14)$$

$$E(u_m) \equiv \sum_{|k|=2} \sum_{i=1}^{n} \rho((2+\alpha)\gamma; \tilde{P}) d(-\alpha\beta_i; \tilde{x}_i) \times \\ \times \prod_{m=1}^{n} d(-k_m\beta_m; \tilde{x}_m)|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ \times |\partial_x^k u_m(P_1) - \partial_x^k u_m(P_i^{(2)})|.$$

Нехай $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq 4^{-1} n^{-1} \tau d(\gamma - \beta_i, \tilde{x}) \equiv T$, $\tau \in (0, 1)$. Вважатимемо, що $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Розглянемо випадок $|x_j^{(1)} - y_j| \leq 4T$, $y \in \partial D$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вважатимемо для простоти, що $j = n$.

Позначимо через $K_R(P)$ кулю радіуса $R \geq 4nT$, яка містить точки P_1 і $P_i^{(2)}$ з центром в точці $P \in \partial D$. Враховуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K_R(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(t)$ ([11], стор. 126). В результаті такого перетворення область $D \cap K_R(P)$ переходить в область Q, для точок якої $t_n \geq 0$.

Вважатимемо, що $u_m(x)$, P_1, $P_i^{(2)}$, E, $\rho(a; P_1)$, $d(\gamma, x_i^{(1)})$, T при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t)$, H_1, $H_i^{(2)}$, E_1, $\rho_1(a, H_1)$, $d_1(\gamma, t_i^{(1)})$, T_1. Позначимо коефіцієнти виразів L_1 і $\mathcal{B}_1$ в області Q через $r_{ij}(t)$, $r_i(t)$, $r_0(t)$, $l_i(t)$, $l_0(t)$. Тоді $v_m(t)$ буде розв'язком такої задачі

$$\left[\sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1)\partial_{t_i}\partial_{t_j} - \lambda\right] v_m(t) = \sum_{ij=1}^{n} [r_{ij}(H_1) -$$

$$-r_{ij}(t)]\partial_{t_i}\partial_{t_j} v_m - \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\partial_{t_i} v_m -$$

$$-(r_0(t) + \lambda)v_m + f_m(\psi(t)) \equiv F_m(t), \qquad (15)$$

$$\mathcal{B}_1 v_m|_{t_n=0} \equiv \sum_{i=1}^{n} l_i(H_1)\partial_{t_i} v_m|_{t_n=0} \geq$$

$$\geq \Big[\sum_{i=1}^{n} (l_i(H_1) - l_i(t))\partial_{t_i} v_m -$$

$$-l_0(t)v_m + g_m(\psi(t))\Big]\Bigg|_{t_n=0} \equiv G_1(t)|_{t_n=0}, \quad (16)$$

$$v_m|_{t_n=0} \geq 0, \quad [v_m(\mathcal{B}_1 v_m - G_1)]\Big|_{t_n=0} = 0,$$

λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\sup\limits_{\overline{D}} A_0(x) + \lambda \leq 0$.

В задачі (15), (16) зробимо заміну $v_m(t) = \omega_m(z)$, $z_i = d_1(\beta_i, t^{(1)})t_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Область визначення $\omega_m(z)$ позначимо через Q_1. Тоді $\omega_m(z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_2\omega_m)(z) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j, t_j^{(1)}) \times\right.$$

$$\left.\times r_{ij}(H_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j} - \lambda\right]\omega_m = F_m(\tilde{z}),$$

$$(\mathcal{B}_2\omega_m)(z)|_{z_n=0} \equiv \sum_{j=1}^{n} d_1(\beta_j, t_j^{(1)}) l_j(H_1) \times$$

$$\times \partial_{z_j}\omega_m|_{z_n=0} \geq G_1(\tilde{z})|_{z_n=0},$$

$$\omega_m|_{z_n=0} \geq 0, \quad [\omega_m(\mathcal{B}_2\omega_m - G_1)]\Big|_{z_n=0} = 0,$$

де $\tilde{z} = (d_1^{-1}(\beta_1, t_1^{(1)})z_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n, t_1^{(n)})z_n)$.

Позначимо через $\Pi_q = \{z, z \in Q_1 \,\Big|\, |z_i - z_i^{(1)}| \leq n^{-1} q d_1(\gamma, t_i^{(1)}),\ z_i^{(1)} = d_1(\beta_i, t_i^{(1)})t_i^{(1)},\ z_n \geq 0,\ q \in (0,1)\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Pi_{1/2}, 0 \leq \eta(z) \leq 1; \\ 0, & z \notin \Pi_{3/4}, |\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\eta(z)| \leq \\ & \leq c d_1^{-1}(\gamma, t_i^{(1)}) d_1^{-1}(\gamma, t_j^{(1)}) \times \\ & \times d_1^{-1}(\gamma, t_k^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(z) = \omega_m(z)\eta(z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_2 W_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1) d_1(\beta_i^{(1)}, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t_j^{(1)}) \times$$

$$\times [\partial_{z_i}\omega_m \partial_{z_j}\eta + \partial_{z_i}\eta \partial_{z_j}\omega_m] +$$

$$+\omega_m \Big[\sum_{ij=1}^{n} r_{ij}(H_1) d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) d_1(\beta_j, t_j^{(1)}) \partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta\Big] +$$

$$+\eta(z)F_m(\tilde{z}) \equiv \Phi_m(z) + \eta F_m(\tilde{z}), \qquad (17)$$

$$(\mathcal{B}_2 W_m)(z)|_{z_n=0} \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, t_i^{(1)}) l_i(H_1)\omega_m \partial_{z_i}\eta +$$

$$+\eta G_1\Big]\Bigg|_{z_n=0} \equiv [G_2 + \eta G_1]\Big|_{z_n=0}, \qquad (18)$$

$$W_m|_{z_n=0} \geq 0, \Big[W_m(\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1)\Big]\Bigg|_{z_n=0} = 0.$$

Можливі два випадки: існують такі точки межі $Q_1 \cap \{z_n = 0\}$, в яких виконується умова

$$[\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1]|_{z_n=0} = 0, \qquad (19)$$

або таких точок не існує, тобто $[\mathcal{B}_2 W_m - G_2 - \eta G_1]|_{z_n=0} > 0$. Тоді з крайової умови (18) маємо

$$W_m|_{z_n=0} = 0. \qquad (20)$$

У першому випадку досліджуємо задачу (17), (19). На підставі теореми 2.17 ([8], стор. 231) для розв'язку задачі (17), (19) і довільних точок M_1, $M_2 \in \Pi_{1/2}$ правильна нерівність

$$|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_\xi^2\omega_m(M_1)-\partial_\xi^2\omega_m(M_2)| \le$$
$$\le c(\|\Phi_m+\eta F_m\|_{C^\alpha}(\Pi_{3/4}))+ \qquad (21)$$
$$+\|G_2+\eta G)1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4})}.$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$, знаходимо

$$\|\Phi_m+\eta F_m\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4})} \le c\rho_1(-(2+\alpha)\gamma;H_1)\times$$
$$\times(\|F_m;\gamma;0;2\gamma;\Pi_{3/4}\|_\alpha+$$
$$+\|\omega_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}\|_2+\|\omega_m;\Pi_{3/4}\|_0), \qquad (22)$$
$$\|G_2+\eta G_1\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4})} \le c\rho_1(-(2+\alpha)\gamma;H_1)\times$$
$$\times(\|G_1;\gamma;0;\gamma;\Pi_{3/4}\|_{1+\alpha}+$$
$$+\|\omega_m;\gamma;0;0;\Pi_{3/4}\|_2+\|\omega_m;\Pi_{3/4}\|_0). \qquad (23)$$

Підставляючи (22), (23) у (21) і повертаючись до змінних t, одержимо нерівність

$$E(v_m) \le c(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q\|_\alpha+$$
$$+\|G_1;\gamma;\beta;\gamma;Q\|_{1+\alpha}+$$
$$+\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2+\|v_m;Q\|_0).$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, оцінки півнорм кожного доданка виразів F_m і G_1 і повертаючись до змінних x, одержимо

$$E(u_m) \le [\varepsilon^\alpha(n+2)+\tau^2n^2]\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+c\|u_m;D\|_0+c_1(\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha+ \qquad (24)$$
$$+\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;D\|_{1+\alpha}).$$

Якщо виконується умова (20), то досліджуємо задачу (17), (20). Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (17), (19) і використовуючи при цьому теорему 2.17 із ([8], стор. 231),одержимо нерівність

$$E(u_m) \le [\varepsilon^\alpha(n+2)+\tau^2n^2]\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+c\|u_m;D\|_0+c_1\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha. \qquad (25)$$

Нехай $|x_j^{(1)}-y_j| \ge 4T$. Тоді запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$(L_3u_m)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}-\lambda\right]u_m =$$
$$=\sum_{i=1}^n[a_{ij}(P_1)-a_{ij}(x)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m-$$
$$-\sum_{ij=1}^n a_i(x)\partial_{x_i}u_m-(a_m(x)+\lambda)u_m+f_m(x)\equiv \qquad (26)$$
$$\equiv \Phi(x,u_m)+f_m(x),$$
$$(\mathcal{B}_3u_m)(x)|_{\partial D} \equiv \sum_{i=1}^n h_i(P_1)\partial_{x_i}u_m|_{\partial D} \ge$$
$$\ge \Big[\sum_{i=1}^n(h_i(P_1)-h_i(x))\partial_{x_i}u_m+g_m(x)-$$
$$-h_0(x)u_m\Big]\Big|_{\partial D} \equiv [G_3(x,u_m)+g_m]\Big|_{\partial D}, \qquad (27)$$
$$u_m|_{\partial D}\ge 0, \quad [u_m(\mathcal{B}_3u_m-G_3-g_m)]\Big|_{\partial D}=0.$$

В задачі (26), (27) зробимо заміну $u_m(x)=v_m^{(1)}(z)$, $z_i=d(\beta_i,x_i^{(1)})x_i$, одержимо

$$(L_4v_m^{(1)})(z) \equiv \Big[\sum_{ij=1}^n d(\beta_i,x_i^{(1)})d(\beta_j,x_j^{(1)})\times$$
$$\times a_{ij}(P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}-\lambda\Big]v_m^{(1)}=\Phi(\tilde z,v_m^{(1)})+f_m(\tilde z),$$
$$(\mathcal{B}_4v_m^{(1)})(z)\Big|_{\partial D} \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^n d(\beta_i,x^{(1)})h_i(P_1)\partial_{x_i}v_m^{(1)}\Big|_{\partial D} \ge$$
$$\ge [G_3(\tilde z,v_m^{(1)})+g_m(\tilde z)]\Big|_{\partial D},$$
$$v_m^{(1)}|_{\partial D}, \quad [v_m^{(1)}(\mathcal{B}_4v_m^{(1)}-G_3-g_m)]\Big|_{\partial D}=0,$$

де $\tilde z=(d(-\beta_1,x_1^{(1)})z_1,\dots,d(-\beta_n,x_n^{(1)})z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)}=d(\beta_i;x_1^{(1)})x_i^{(1)}$, $\Pi_q^{(1)}=\Big\{z,|z_i-z_i^{(1)}|\le qn^{-1}d(\gamma;x_i^{(1)}),i\in$

$\{1, 2, \ldots, n\}\Big\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(z)$, яка задовольняє умови:

$$\eta_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Pi^{(1)}_{1/2}, 0 \le \eta_1(z) \le 1; \\ 0, & z \notin \Pi^{(1)}_{3/4}, |\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\eta^{(1)}(z)| \le \\ & \le cd(-\beta_i, x_i^{(1)})d(-\beta_j, x_j^{(1)})\times \\ & \times d(-\beta_k, x_k^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(z) = v_m^{(1)}(z)\eta_1(z)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_4 V_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})a_{ij}(P_1)\times$$

$$\times[\partial_{z_i}v_m^{(1)}\partial_{z_j}\eta_1 + \partial_{z_j}v_m^{(1)}\partial_{z_i}\eta_1]+$$

$$+v_m^{(1)}\Big[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})a_{ij}(P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta_1\Big]+$$

$$+\eta\Phi(\tilde{x}, v_m^{(1)}) + \eta f_m(\tilde{z}), \qquad (28)$$

$$V_m|_{\partial D} = 0. \qquad (29)$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (17), (19) і використовуючи при цьому теорему 2.17 із ([8], стор. 231), одержимо нерівність (25).

Якщо $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \ge T$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E(u_m) \le \varepsilon^\alpha \|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; D\|_0. \qquad (30)$$

Скориставшись нерівностями (6), (14), (24), (25), (30) і вибравши ε і τ досить малими, одержимо оцінку (13).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (13) не залежить від m, тоді послідовності $\{W_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{W_m^{(1)}\} \equiv \{\rho(\gamma, P)d(-\beta_i, x_i)\partial_{x_i}u_m(P)\}$, $\{W_m^{(2)}\} \equiv \{\rho(2\gamma; P)d(-\beta_i, x_i)d(-\beta_j, x_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)\}$ рівномірно обмежені і рівностайно неперервні в області $\overline{D}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{W_{m_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{D}$ до $W^{(\nu)}$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$.

Переходячи до границі при $m_k \to \infty$ в задачі (4), (5), одержимо, що $u(x) = W^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Duvaut G, Lions J.L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972. – 384 p.

2. *Clowinski R., Lions J.L., Tremolieres R.* Analyse numerique des inéquations variationnells, Dunod, Paris, 1976. – 574 p.

3. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. – М.Л.: Гостехиздат, 1949. – 736 с.

4. *Конаков П.К., Веревочкин Т.Е.* Тепломассообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.

5. *Моисеев Е.И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифф. уравнения. – 2001. – 37, № 11. – С. 1555-1567.

6. *Бицадзе А.Б.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

7. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

8. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

9. *Esteban Maria J.* Nonexistence result for positive solutions of nonlinear elliptic degenerate problems // Nonlinear Anal. Theory Math. and Appl. – 1996, 26, № 4. – P. 835-843.

10. *Amano Kazuo.* Maximum principle for degenerate elliptic-parabolic equations with Venttsel's boundary conditions. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. 263, № 2. – P. 377-396.

11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

12. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженням: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.