

## ОСЛАБЛЕНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ОБЕРНЕНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Знайдено умови, за яких обернене відображення є квазінеперервним чи псевдоквазінеперервним. Встановлено, що властивості типу Дарбу у прямого відображення  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  зберігаються і для оберненого.

We find conditions under which the inverse mapping is quasicontinuous or pseudoquasicontinuous. It was established that properties of Darboux type of a mapping  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are preserved for the inverse mapping.

**1. Вступ.** Добре відомо, що для неперервної бієкції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обернена функція  $f^{-1}$  також є неперервною. З теореми Брауера про нерухому точку випливає, що і у неперервної бієкції  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  функція  $f^{-1}$  автоматично неперервна. Те ж саме твердить класична теорема Банаха про обернений оператор для лінійної неперервної бієкції банахових просторів.

Звичайно, не всі властивості прямого відображення автоматично переносяться на обернене. Так, З. Гранде і Т. Натканец в [1] навели приклад квазінеперервної бієкції  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , для якої обернене відображення  $f^{-1}$  не має властивості Бера, а отже, не є кліковим і тим більше не є квазінеперервним. Разом з тим в [1] доведено, що для квазінеперервності відображення  $f^{-1}$ , оберненого до квазінеперервного відображення  $f$ , достатньо, щоб відображення  $f^{-1}$  було ледь неперервним. Крім того, в [1] було встановлено умови для бієкції  $f : X \rightarrow Y$ , за яких функції  $f$  і  $f^{-1}$  є кліковими.

В цій роботі буде розглянуто деякі ослаблення неперервності на предмет наявності у оберненого відображення властивостей прямого відображення. Деякі результати цієї статті були анонсовані в [2].

**2. Основні поняття.** Нехай  $X$  і  $Y$  – топологічні простори. Відображення  $f : X \rightarrow Y$ :

- *квазінеперервне у точці  $x \in X$  [3,4], якщо для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  і для кожного околу  $U$  то-*

*чки  $x$  в  $X$  існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq U$  і  $f(G) \subseteq V$ ;*

- *псевдоквазінеперервне [5], якщо для довільної відкритої непорожньої множини  $U$  в  $X$  та довільної множини  $E$  в  $X$ , такої, що  $U \subseteq \overline{E}$  існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq U$  і  $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$ ;*
- *ледь неперервне у точці  $x \in X$  [6], якщо  $\text{int} f^{-1}(V) \neq \emptyset$  для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$ ;*
- *майже неперервне у точці  $x \in X$  [7], якщо для будь-якого околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$  існує множина  $A$  в  $X$ , така, що  $x \in \text{int} \overline{A}$  і  $f(A) \subseteq V$ ;*
- *майже квазінеперервне у точці  $x \in X$  [8], якщо для будь-яких околів  $V$  і  $U$  точок  $y = f(x)$  і  $x$  відповідно в  $Y$  та  $X$  існує множина  $A$  в  $X$ , така, що  $\text{int} \overline{A} \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq U$  і  $f(A) \subseteq V$ ;*
- *майже ледь неперервне у точці  $x \in X$  [9], якщо  $\text{int} \overline{f^{-1}(V)} \neq \emptyset$  для кожного околу  $V$  точки  $y = f(x)$  в  $Y$ ;*
- *має слабку властивість Дарбу [10], якщо образ  $f(G)$  кожної області  $G$  з  $X$  є зв'язною множиною.*

Відображення  $f$  є *квазінеперервним, ледь неперервним, майже неперервним, майже квазінеперервним чи майже ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній

точці. Для топологічного простору  $X$  функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  є *перехідною зверху /знизу/ у точці  $x \in X$*  [11], якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існують околі  $U$  точки  $x$  в  $X$  і точка  $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$  / $y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))$ /, такі, що  $U \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ . Якщо функція перехідна зверху і знизу у точці  $x$ , то вона називається *перехідною у точці  $x$* . Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці  $x \in X$ .

В [10] поняття перехідності було перенесено на випадок довільних топологічних просторів. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  між топологічними просторами  $X$  та  $Y$  називається *перехідним у точці  $x \in X$* , якщо для кожного околу  $V$  точки  $f(x)$  в  $Y$  існують околі  $U$  точки  $x$  в  $X$  і відкритий околі  $W$  точки  $f(x)$  в  $Y$ , такі, що  $W \subseteq V$  і  $U \cap f^{-1}(fW) = \emptyset$ , і просто *перехідним*, якщо воно є таким в кожній точці.

**3. Квазінеперервність оберненого відображення.** Наступний приклад будується з допомогою модифікації конструкції з [1].

**Твердження 1.** *Існує квазінеперервна бієкція  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , для якої функція  $f^{-1}$  не є майже ледь неперервною.*

**Доведення.** Нехай  $\alpha$  – ірраціональне число з відрізка  $[0, 1]$  і  $\mathbb{Q} \cap [0, \alpha] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$  – множина раціональних чисел відрізка  $[0, \alpha]$ . Для кожного номера  $n \in \mathbb{N}$  розглянемо неперервну справа функцію  $g_n : [0, \alpha] \rightarrow [0, 1]$ , для якої  $g_n(x) = 0$  для  $x < r_n$  і  $g_n(x) = 1$  для  $x \geq r_n$ . Покладемо  $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x)$ . Оскільки рівномірно збіжний ряд з неперервних справа функцій є неперервною справа функцією, то функція  $f_0$  неперервна справа на  $[0, \alpha]$ , а отже, квазінеперервна на  $[0, \alpha]$ . Функція  $f_0$  неперервна в усіх ірраціональних точках відрізка  $[0, \alpha]$  і розривна в усіх раціональних точках цього відрізка. Тому  $f_0$  неперервна зліва в точці  $\alpha$ , а отже,  $f_0$  квазінеперервна на  $[0, \alpha]$ . Зауважимо, що функцію  $f_0$  можна записати ще так:  $f_0(x) = \sum_{r_n \leq x} \frac{1}{2^n}$ . Також зазначимо, що функція  $f_0$  строго монотонно зростає на  $[0, \alpha]$ .

Легко переконатися, що для множини  $B = f_0([0, \alpha])$  і чисел  $b_n = f_0(r_n) = \sum_{r_m \leq r_n} \frac{1}{2^m}$ ,  $a_n = f_0(r_n) - \frac{1}{2^n} = \sum_{r_m < r_n} \frac{1}{2^m}$  маємо, що

$$[0, 1] \setminus B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n).$$

Нехай  $(\alpha_n)$  – строго спадна послідовність чисел, така, що  $\alpha_1 = 1$  і  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ . Покладемо

$$V_n = [a_n, b_n)$$

і

$$U_n = (\alpha_{n+1}, \alpha_n]$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Зрозуміло, що

$$[0, 1] = [0, \alpha] \sqcup \left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n \right)$$

і

$$[0, 1] = B \sqcup \left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Для кожного номера  $n$  позначимо через  $f_n$  гомеоморфізм  $U_n$  на  $V_n$ .

Множина  $B$  ніде не щільна в  $[0, 1]$ . Справді, візьмемо довільну відкриту непорожню множину  $V$  в  $[0, 1]$ . Нехай  $B \cap V \neq \emptyset$ . Тоді існує точка  $x_0 \in [0, \alpha]$ , така, що  $f_0(x_0) \in V$ . Покажемо, що існує таке раціональне число  $r = r_n$ , що  $f_0(r_n) \in V$ . Якщо  $x_0 < \alpha$ , то з неперервності справа функції  $f_0$  в точці  $x_0$  випливає, що існує таке  $\delta > 0$ , що  $x_0 + \delta < \alpha$  і  $f_0(x) \in V$ , як тільки  $x_0 < x < x_0 + \delta$ . Оскільки в інтервалі  $(x_0, x_0 + \delta)$  є раціональне число  $r$ , то воно і буде шуканим. Якщо  $x_0 = \alpha$ , то з неперервності зліва функції  $f_0$  в точці  $\alpha$  аналогічно знаходиться раціональне число  $r_n$ , що  $f_0(r_n) \in V$ . Тоді

$$V_n \cap B = \emptyset.$$

Зауважимо, що  $b_n = f_0(r_n) \in V$ . Тому відкрита в  $[0, 1]$  множина

$$H = (a_n, b_n) \cap V$$

непорожня. Крім того,  $H \cap B = \emptyset$  і  $H \subseteq V$ . Це означає, що множина  $B$  ніде не щільна в  $[0, 1]$ .

Визначимо функцію  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  так:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in [0, \alpha], \\ f_n(x), & x \in U_n. \end{cases}$$

Легко переконатися, що функція  $f$  є бієкцією відрізка  $[0, 1]$  на себе. Оскільки функція  $f$  неперервна на кожному з проміжків  $U_n$ , то вона квазінеперервна на  $(\alpha, 1]$ . Також функція  $f$  квазінеперервна на  $[0, \alpha]$ , бо функція  $f_0$  квазінеперервна на  $[0, \alpha]$ . Оскільки множина  $B$  ніде не щільна в  $[0, 1]$ , то і  $f([0, \alpha])$  ніде не щільна в  $[0, 1]$ . Тому функція  $f^{-1}$  не є майже ледь неперервною.  $\square$

**Твердження 2.** *Нехай  $X$  і  $Y$  – топологічні простори,  $f : X \rightarrow Y$  – квазінеперервна бієкція і  $f^{-1}$  – майже ледь неперервне відображення. Тоді  $f^{-1}$  – майже квазінеперервне відображення.*

**Доведення.** Візьмемо довільну точку  $y_0 \in Y$ . Покажемо, що відображення  $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$  майже квазінеперервне у точці  $y_0$ . Візьмемо довільні околи  $U$  та  $V$  точок  $x_0 = g(y_0)$  та  $y_0$  відповідно у просторах  $X$  та  $Y$ . Оскільки відображення  $f$  квазінеперервне у точці  $x_0$ , то існує відкрита непорожня множина  $G$  в  $X$ , така, що  $G \subseteq U$  і  $f(G) \subseteq V$ . З майже ледь неперервності відображення  $g$  випливає, що в  $Y$  існує множина  $B$ , така, що  $\text{int} \bar{B} \neq \emptyset$  і  $g(B) \subseteq G$ . Множина  $B$  міститься у  $V$ , бо  $B = f(g(B)) \subseteq f(G)$  і  $f(G) \subseteq V$ . Це означає, що відображення  $g = f^{-1}$  майже квазінеперервне у точці  $y_0$ .  $\square$

**Твердження 3.** *Нехай  $X$  і  $Y$  – топологічні простори,  $f : X \rightarrow Y$  – майже квазінеперервна бієкція,  $f$  і  $f^{-1}$  – ледь неперервні відображення. Тоді  $f^{-1}$  – квазінеперервне відображення.*

**Доведення.** Візьмемо довільну точку  $y_0 \in Y$ . Покажемо, що відображення  $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$  квазінеперервне у точці  $y_0$ . Розглянемо окіл  $U$  точки  $x_0 = g(y_0)$  в  $X$  і відкритий окіл  $V$  точки  $y_0$  в  $Y$ . Оскільки  $f$  майже квазінеперервне у точці  $x_0$ , то в  $X$  існує множина  $A$ , така, що  $U_1 = \text{int} \bar{A} \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq U$  і  $f(A) \subseteq V$ . З ледь неперервності відображення  $g$  випливає, що існує від-

крита непорожня множина  $V_1$  в  $Y$ , така, що  $g(V_1) \subseteq U_1$ .

Розглянемо відкриту множину  $V_2 = V \cap V_1$ . Для доведення квазінеперервності  $g$  у точці  $y_0$  досить показати, що  $V_2 \neq \emptyset$  і  $g(V_2) \subseteq U$ . Оскільки  $V_2 \subseteq V_1$  і  $g(V_1) \subseteq U_1$ , то

$$g(V_2) \subseteq g(V_1) \subseteq U_1 \subseteq U.$$

З ледь неперервності відображення  $f$  випливає, що існує відкрита непорожня множина  $U_2$  в  $X$ , така, що  $f(U_2) \subseteq V_1$ , тобто  $U_2 \subseteq g(V_1)$ . Отже,  $U_2 \subseteq U_1$ . З означення множини  $U_1$  випливає, що  $U_2 \cap A \neq \emptyset$ . Оскільки  $f(U_2) \subseteq V_1$  і  $f(A) \subseteq V$ , то  $V_2 = V \cap V_1 \neq \emptyset$ .  $\square$

#### 4. Псевдоквазінеперервність бієкції.

В [1] було встановлено, що для бієкції  $f : X \rightarrow Y$  між метричними просторами  $X$  та  $Y$  з умови, що  $f$  і  $f^{-1}$  – ледь неперервні функції, випливає, що  $f$  і  $f^{-1}$  – клікові. Наступне твердження є модифікацією цього результату.

**Твердження 4.** *Нехай  $X$  і  $Y$  – топологічні простори,  $f : X \rightarrow Y$  – бієкція,  $f$  і  $f^{-1}$  – ледь неперервні відображення. Тоді відображення  $f$  і  $f^{-1}$  псевдоквазінеперервні.*

**Доведення.** Покажемо, що відображення  $f$  псевдоквазінеперервне. Припустимо, що це не так. Тоді існують відкрита непорожня множина  $U$  в  $X$  та щільні в  $U$  множини  $A_1$  і  $A_2$ , такі, що

$$f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}.$$

Оскільки відображення  $f^{-1}$  ледь неперервне, то  $V = \text{int} f(U) \neq \emptyset$ . Можливі два випадки: або  $(Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \emptyset$ , або  $V \subseteq \overline{f(A_1)}$ .

Припустимо спочатку, що  $V \subseteq \overline{f(A_1)}$ . Оскільки відображення  $f$  ледь неперервне, то

$$G = \text{int} f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Крім того,  $G \subseteq U$ . Оскільки  $\overline{A_2} \supseteq U$ , то  $A_2 \supseteq G$ . Візьмемо довільну точку  $a \in A_2 \cap G$ . Тоді з одного боку

$$f(a) \in f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)},$$

а з іншого боку

$$f(a) \in f(G) \subseteq V \subseteq \overline{f(A_1)}.$$

Нехай тепер

$$V_1 = (Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \emptyset.$$

Оскільки відображення  $f$  ледь неперервне і сюр'єктивне, то  $G = \text{int} f^{-1}(V_1) \neq \emptyset$ . Крім того,  $G \subseteq U$ . Оскільки  $\overline{A_1} \supseteq U$ , то  $\overline{A_1} \supseteq G$ . Візьмемо довільну точку  $a \in A_1 \cap G$ . Тоді з одного боку  $f(a) \in f(A_1)$ , а з іншого боку

$$f(a) \subseteq f(G) \subseteq V_1 \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}$$

і тому  $f(a) \notin f(A_1)$ . Одержали суперечність. Знову одержали суперечність.  $\square$

### 5. Майже неперервність оберненого відображення.

**Лема 1.** *Нехай  $X$  та  $Y$  – топологічні простори,  $A$  та  $B$  – всюди щільні диз'юнктні підмножини в  $X$  і  $f, g : X \rightarrow Y$  – неперервні відображення. Тоді відображення  $h : X \rightarrow Y$ , для якого  $h(x) = f(x)$  для  $x \in A$  і  $h(x) = g(x)$  для  $x \in B$ , є майже неперервне.*

**Доведення.** Розглянемо довільну точку  $x \in X$ . Нехай  $x \in A$  і  $V$  – окіл точки  $x$  в  $X$ . Оскільки  $h(x) = f(x)$  і відображення  $f$  неперервне у точці  $x$ , то існує окіл  $U$  точки  $x$  в  $X$ , такий, що  $f(U) \subseteq V$ . З всюди щільності множини  $A$  випливає, що  $x \in \text{int} \overline{A \cap U}$ . Крім того,

$$h(A \cap U) = f(A \cap U) \subseteq V.$$

Отже, відображення  $h$  майже неперервне у точці  $x$ . Те саме буде і у випадку, коли  $x \in B$ .  $\square$

**Твердження 5.** *Існує бієктивна функція  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , яке майже неперервна, але  $f^{-1}$  не є майже неперервною.*

**Доведення.** Розглянемо функцію  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , яка визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}], \\ x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + \frac{3}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Перевіримо майже неперервність функції  $f$ . З леми 1 випливає, що функція  $f$  майже неперервна на проміжках  $[0, \frac{1}{2}]$  та  $(\frac{1}{2}, 1]$ . Залишилось перевірити майже неперервність

функції  $f$  у точці  $x = \frac{1}{2}$ . Зауважимо, що  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ . Для  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  розглянемо довільний окіл  $V = (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$  точки  $\frac{1}{2}$  в  $[0, 1]$  і множину

$$\begin{aligned} A &= V \cap ((\mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]) \cup ((\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q})) = \\ &= ((\mathbb{Q} \cap (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2})) \cup ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon] \setminus \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Легко переконатися, що  $V = \text{int} \overline{A}$  і

$$f(A) = (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}] \subseteq V.$$

Це означає, що функція  $f$  майже неперервна і у точці  $x = \frac{1}{2}$ .

Тепер покажемо, що функція  $g = f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  не є майже неперервною у точці  $y = \frac{1}{2}$ . Справді,  $g(y) = \frac{1}{2}$  і для околу  $U = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  точки  $g(y)$  маємо, що

$$g^{-1}(U) = f(U) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

і множина

$$\text{int} \overline{g^{-1}(U)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

не є околом точки  $y = \frac{1}{2}$  в  $[0, 1]$ .  $\square$

### 6. Перехідність бієкції.

**Твердження 6.** *Нехай  $X$  – топологічний простір, який задовольняє аксіому  $T_1$  і  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – бієкція. Тоді  $f$  – перехідна функція.*

**Доведення.** Розглянемо довільну точку  $x_0 \in X$  і  $\varepsilon > 0$ . Візьмемо довільну точку  $y \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon)$ . Оскільки функція  $f$  є сюр'єктивною, то існує точка  $x \in X$ , така, що  $f(x) = y$ . З аксіоми  $T_1$  простору  $X$  випливає, що існує окіл  $U$  точки  $x_0$  в  $X$ , такий, що  $x \notin U$ . Тоді  $U \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ , бо функція  $f$  є ін'єктивною. Це означає перехідність зверху функції  $f$  у точці  $x_0$ . Аналогічно встановлюється перехідність знизу. Таким чином, функція  $f$  перехідна у точці  $x_0$ , а оскільки точка  $x_0$  була довільною з  $X$ , то функція  $f$  перехідна.  $\square$

Умова того, що функція  $f$  в твердженні 6 набуває значення в  $\mathbb{R}$ , є istotною. Це показує наступне твердження.

**Твердження 7.** *Існує бієкція  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , яка не є перехідною.*

*Доведення.* Розглянемо довільну бієкцію  $\alpha : (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Для кожного числа  $r \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  через  $g_r$  позначимо бієкцію кола

$$K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

на частину

$$L_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

прямої  $y = \alpha(r)x$ , а через  $g_1$  позначимо бієкцію кола

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

на частину

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \neq 0\}$$

прямої  $x = 0$ .

Тепер визначимо функцію  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  так:

$$f(x, y) = \begin{cases} (0, 0), & (x, y) = (0, 0), \\ g_r(x, y), & (x, y) \in K_r. \end{cases}$$

Очевидно, що так задане відображення  $f \in$  бієкцією площини  $\mathbb{R}^2$  на  $\mathbb{R}^2$ . Покажемо, що воно не є перехідним у точці  $(0, 0)$ .

Нехай  $V$  – обмежений окіл точки  $(0, 0)$  в  $\mathbb{R}^2$ . Розглянемо довільний відкритий окіл  $W$  точки  $(0, 0)$ , такий, що  $W \subseteq V$  і довільний окіл  $U$  точки  $(0, 0)$  в  $\mathbb{R}^2$ . Тоді існує таке число  $r \in (0, +\infty)$ , що  $K_r \subseteq U$ . Оскільки  $W$  – відкритий обмежений окіл точки  $(0, 0)$  в  $\mathbb{R}^2$ , то. Тому

$$U \cap f^{-1}(f_r W) \supseteq K_r \cap f^{-1}(f_r W) \neq \emptyset,$$

адже  $f(K_r) = L_r$  і  $L_r \cap f_r W \neq \emptyset$ . Отже, відображення  $f$  не перехідне у точці  $(0, 0)$ .  $\square$

## 7. Властивості типу Дарбу.

Нам будуть потрібні наступні теореми, які встановлені в [10, теорема 16] і [12, теорема 2] відповідно.

**Теорема 1.** *Нехай  $X$  – локально зв'язний простір,  $Y$  – топологічний простір, відображення  $f : X \rightarrow Y$  має слабку властивість Дарбу і є перехідним. Тоді  $f$  – неперервне відображення.*

**Теорема 2.** *Лінійне відображення  $f : X \rightarrow Y$ , що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

**Твердження 8.** *Нехай  $X$  – локально зв'язний простір, який задовольняє аксіому  $T_1$  і  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – бієкція, яка має слабку властивість Дарбу. Тоді  $f$  – неперервне відображення.*

*Доведення.* З твердження 6 випливає, що функція  $f$  перехідна, а тому згідно з теоремою 1 вона неперервна.  $\square$

Зауважимо (див. огляд [13]), що для функцій  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  з  $S$ -неперервності, зв'язності, властивості зв'язного графіка чи властивості Дарбу випливає слабка властивість Дарбу. Функції, які є  $S$ -неперервними, зв'язними, мають властивість зв'язного графіка, мають властивість Дарбу чи мають слабку властивість Дарбу будемо тут коротко називати *функціями типу Дарбу*.

**Твердження 9.** *Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – бієкція, яка є функцією типу Дарбу. Тоді  $f^{-1}$  теж є функцією типу Дарбу.*

*Доведення.* З твердження 8 випливає, що функція  $f$  неперервна, а тому обернена функція  $f^{-1}$  теж неперервна, а отже, є функцією типу Дарбу.  $\square$

**Твердження 10.** *Нехай  $X$  – топологічний векторний простір, який задовольняє аксіому  $T_1$  і  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – лінійна бієкція. Тоді  $f$  – неперервне відображення.*

*Доведення.* З твердження 6 випливає, що функція  $f$  перехідна, а тому згідно з теоремою 2 вона неперервна.  $\square$

Зауважимо, що твердження 10 випливає і з теореми Тихонова про єдиність лінійної гаусдорфовой топології на скінченновимірному векторному просторі [14, с. 16].

На завершення покажемо, що відомий результат про неперервність монотонної бієкції є частинним випадком твердження 8.

**Твердження 11.** *Нехай  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонна бієкція, де  $X$  і  $f(X)$  – проміжки числової прямої  $\mathbb{R}$ . Тоді  $f$  має властивість Дарбу.*

*Доведення.* Розглянемо довільний промі-

жок  $\langle a, b \rangle \subseteq X$ . Треба довести, що множина  $f(\langle a, b \rangle)$  зв'язна, тобто є проміжком. Розглянемо довільні точки  $y_1, y_2 \in f(\langle a, b \rangle)$ . Нехай  $y_1 < y_2$  і існують точки  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ , такі, що  $f(x_1) = y_1$  і  $f(x_2) = y_2$ . Покажемо, що  $[y_1, y_2] \subseteq f(\langle a, b \rangle)$ . Візьмемо довільну точку  $y \in (y_1, y_2)$ . Оскільки множина  $f(X)$  є проміжком і  $y_1, y_2 \in f(X)$ , то  $[y_1, y_2] \subseteq f(X)$ , а тому  $y \in f(X)$ . Нехай  $x$  – це така точка з  $X$ , що  $f(x) = y$ . Оскільки  $y_1 < y < y_2$  і функція  $f$  монотонна, то точка  $x$  лежить між точками  $x_1$  та  $x_2$ . Тому  $x \in \langle a, b \rangle$  і  $y = f(x) \in f(\langle a, b \rangle)$ . Отже, множина  $f(\langle a, b \rangle)$  зв'язна і це означає, що функція  $f$  має властивість Дарбу.  $\square$

**Твердження 12.** *Нехай  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонна бієкція, де  $X$  і  $f(X)$  – проміжки числової прямої  $\mathbb{R}$ . Тоді  $f$  неперервна.*

*Доведення.* З твердження 11 випливає, що функція  $f$  має властивість Дарбу (отже, і слабку властивість Дарбу), а тому згідно з твердженням 8 вона неперервна.  $\square$

Автор вдячний Маслюченку Володимирі Кириловичу за корисні зауваження та поради, які суттєво поліпшили оригінальну версію цієї статті.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Grande Z., Natkaniec T. On quasi-continuous bijections // Acta Math. Univ. Comeniana. – 1991. – **60**, N1. – P. 31-34.
2. Нестеренко В.В. Квазінеперервність оберненого відображення // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, 11 - 14 жовтня 2006 року. Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 116.
3. Kempisty S. Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. – **19**. – P. 184-197.
4. Marcus S. Sur les fonctions quasicontinues au sens de S. Kempisty // Colloq. Math. – 1961. – **8**. – P. 47-53.
5. Нестеренко В.В. Про псевдоквазінеперервність // Карпат. мат. публ. (у друці).
6. Froltk Z. Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings // Czech. Math. J. – 1961. – **11**. – P. 381-385.
7. Husain T. Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.
8. Borsík J., Doboš J. On decomposition of quasi-continuity // Real Anal. Exch. – 1990(91). – **16**. – P. 292-305.

9. Маслюченко В.К. Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N2. – С. 213-218.

10. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення // Математичний вісник НТШ. – 2011. – **8**. – С. 132-150.

11. Крецу В.І., Маслюченко В.К. Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком. – Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50-54.

12. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, N1. – С. 79-88.

13. Gibson R.G., Natkaniec T. Darboux like functions // Real Anal. Exch. – **22**, N2. – P. 492-533.

14. Маслюченко В.К. Лінійні неперервні оператори. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.