УДК 517.51

©2015 р. В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, О.Г. Фотій

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НОВИЙ ПІДХІД ДО ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ БЕРА ПРО НАПІВНЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ І ОДНА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ БЕРОВОСТІ

Наведене нове доведення теореми Бера про напівнеперервні функції і показано, що топологічний простір X є берівським тоді і тільки тоді, коли кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є майже кліковою.

We provide a new proof of Baire's theorem on semi-continuous functions and show that, a topological space X is Baire if and only if every function $f : X \to \mathbb{R}$ is almost cliquish.

1. Вступ. Добре відомо, що напівнеперервні зверху і знизу функції ввів Р. Бер. Нагадаємо, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *напівнеперервною знизу /зверху/ в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0, такий, що $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ $/f(x) < f(x_0) + \varepsilon/$ для кожного $x \in U$. Функція f називається *напівнеперервною знизу /зверху/* якщо вона є такою в кожній точці $x \in X$. Р. Бер також встановив результат [1], який у сучасному формулюванні виглядає так.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу чи зверху функція. Тоді множина $C(f)$ точок, у яких f неперервна, є залишковою в X, тобто її доповнення $D(f) = X \setminus C(f)$ – це множина першої категорії в X.*

Після Р. Бера з'явилися ще два способи доведення цієї теореми. Один належить М. Форту [2], він отриманий спеціальним категорним методом, де фігурують дві топології, інший, привабливо короткий, належить Е. Асплунду, він поданий у статті Ж. Калбрі і Ж.-П. Троалліка [3], де теорема Бера застосовується в доведенні теореми Калбрі-Троалліка про нарізно неперервні функції. Зауважимо, що ця теорема в останні роки дістала значний розвиток (див. [4] і вказану там літературу).

Тут ми подаємо ще один спосіб доведення цієї теореми Бера, хоча й довший, але, на наш погляд, найбільш природний.

2. Допоміжні твердження. Нагадаємо, що *коливання $\omega_f(A)$ функції $f : X \to \mathbb{R}$ на непорожній множині $A \subseteq X$* вводиться правилом $\omega_f(A) = \sup\limits_{x',x'' \in A} |f(x') - f(x'')|$, а *коливання $\omega_f(x)$ функції f в точці x з X* – рівністю $\omega_f(x) = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U)$, де $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів U точки x у просторі X.

Лема 1. *Нехай X – берівський простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – довільна функція, $\varepsilon > 0$ і G – відкрита непорожня множина в X. Тоді існують такі непорожні множини A та U в X, що $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$, U відкрита в X, $U \subseteq G$ і $\omega_f(A) \le \varepsilon$.*

Доведення. Для довільного цілого n розглянемо відрізки $B_n = [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ і покладемо, $A_n = f^{-1}(B_n)$. Оскільки $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} B_n = \mathbb{R}$, то $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} A_n = X$. Нехай $U_n = \mathrm{int}\overline{A_n}$. Простір X берівський, тому множина $H = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ відкрита і всюди щільна в X. Тоді множина $H \cap G$ непорожня, а значить, існує номер $n \in \mathbb{Z}$, такий, що $U_n \cap G \ne \emptyset$. Покладемо $U = U_n \cap G$ і $A = A_n \cap U$. Зрозуміло,що $U \subseteq G$. Крім того, $U \subseteq \overline{A_n}$ і множина U відкрита. Отже, $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$, зокрема, $A \ne \emptyset$. Покажемо, що множина A шукана. Нехай $x', x'' \in A$. Тоді $x', x'' \in A_n$, отже, $f(x')$ і $f(x'')$ належать до відрізка B_n. В такому разі, $|f(x') - f(x'')| \le (n+1)\varepsilon - n\varepsilon = \varepsilon$, а тому і $\omega_f(A) \le \varepsilon$.

Лема 2. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу функція, $\delta > 0$, множини A та U такі, що $\emptyset \ne A \subseteq U \subseteq \overline{A}$, $\omega_f(A) \le \delta$ і множина*

U відкрита в X. Тоді існує непорожня відкрита в X множина V, така, що $V \subseteq U$ і $\omega_f(V) \leq 3\delta$, зокрема, $\omega_f(x) \leq 3\delta$ для кожного $x \in V$.

Доведення. Оскільки $A \neq \emptyset$, то існує точка $a \in A$. Покажемо, що $f(x) \leq f(a) + 2\delta$ для кожного $x \in U$. Нехай це не так, тобто існує точка $x_0 \in U$, така, що $f(x_0) > f(a) + 2\delta$. Оскільки функція f є напівнеперервною знизу в точці x_0, то для даного δ існує такий окіл U_0 точки x_0 в X, що $f(x) > f(x_0) - \delta$ для кожного $x \in U_0$. Але $x_0 \in U \subseteq \overline{A}$, тому $U_0 \cap A \neq \emptyset$, тобто існує точка $a_1 \in U_0 \cap A$. Для цієї точки будемо мати з одного боку, що

$$f(a_1) - f(a) \leq |f(a_1) - f(a)| \leq \omega_f(A) \leq \delta,$$

отже, $f(a_1) \leq f(a) + \delta$, а з другого боку

$$f(a_1) > f(x_0) - \delta > f(a) + 2\delta - \delta = f(a) + \delta,$$

що приводить до суперечності.

Скористаємось тепер напівнеперервністю знизу функції f в точці a. На основі цього існує такий відкритий окіл V точки a, що $V \subseteq U$ і $f(x) > f(a) - \delta$ для кожного $x \in V$. Таким чином,

$$f(a) - \delta < f(x) \leq f(a) + 2\delta$$

для кожного $x \in V$. Звідси негайно випливає, що для довільних точок x', та x'' з V

$$f(x') - f(x'') < f(a) + 2\delta - (f(a) - \delta) = 3\delta.$$

Тому $\omega_f(V) < \sup\limits_{x',x'' \in V} (f(x') - f(x'')) \leq 3\delta$.

3. Доведення теореми Бера. Покажемо як з лем 1 і 2 і теореми Банаха про категорію ([5,с. 86] і [6,с. 206]) виводиться теорема Бера.

Доведення. Нехай функція f напівнеперервна знизу і $\varepsilon > 0$. Спочатку припустимо, що простір X берівський. Покладемо $D^\varepsilon(f) = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$. Покажемо, що множина $D^\varepsilon(f)$ ніде не щільна в X. Розглянемо довільну непорожню відкриту в X множину G. За лемою 1 існують відкрита та непорожня множина U в G і щільна в U множина A, така, що $\omega_f(A) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. За лемою 2 існує така відкрита непорожня множина V, що $V \subseteq U$ і $\omega_f(V) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$, зокрема, $\omega_f(x) < \varepsilon$ для кожного $x \in V$. Тому $V \cap D^\varepsilon(f) = \emptyset$ і $V \subseteq G$, отже, множина $D^\varepsilon(f)$ ніде не щільна в X. Але $D(f) = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} D^\varepsilon(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{n}}(f)$. Тому $D(f)$ є множиною першої категорії в X. Отже, $C(f)$ – залишкова в X множина.

В загальному випадку згідно з теоремою Банаха про категорію існує відкритий берівський підпростір S простору X, який є залишковою в X множиною. Застосувавши доведене до звуження $g = f|_S$, ми легко отримуємо потрібний результат.

Якщо f напівнеперевна зверху, то $g = -f$ напівнеперервна знизу і $C(f) = C(g)$, отже, і тут $C(f)$ буде залишковою множиною в X.

4. Характеризація беровості. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *кліковою* якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і довільної відкритої непорожньої множини G в X існує відкрита непорожня множина U, така, що $U \subseteq G$ і $\omega_f(U) < \varepsilon$.

Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ ми назвемо *майже неперервною в точці* x, якщо для довільного V околу точки $f(x)$ існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *майже кліковою*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і довільної відкритої непорожньої множини G в X існують такі непорожні множини A та U в X, що $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$, U відкрита в X, $U \subseteq G$ і $\omega_f(A) \leq \varepsilon$.

Теорема 2. *Топологічний простір X є берівським тоді і тільки тоді коли кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є майже кліковою.*

Доведення. *Необхідність.* Встановлена в лемі 1.

Достатність. Нехай простір X не є берівським. Тоді існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де множини E_n ніде не щільні в X. Розглянемо функцію $f : X \to \mathbb{R}$, яка діє таким чином: $f(x) = n$, якщо $x \in E_n$ і $f(x) = 0$, якщо, $x \in X \setminus G$. Покажемо, що для $\varepsilon = 1$ і для довільної десь щільної в G множини A коливання $\omega_f(A) \geq \varepsilon$. Нехай A – деяка десь щільна множина у множині G. Візьмемо деяку точку $x_1 \in A$. Оскільки $A \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то існує номер n_1, такий, що $x_1 \in E_{n_1}$. Але множина A – десь щільна, а E_{n_1} – ніде не щільна, тому $A \nsubseteq E_{n_1}$, а значить, існує точка $x_2 \in A \setminus E_{n_1}$ і існує номер $n_2 \neq n_1$, такий, що $x_2 \in E_{n_2}$. Отже, $\omega_f(A) \geq |f(x_1) - f(x_2)| = |n_1 - n_2| \geq 1 = \varepsilon$, адже n_1 і n_2 – два різних номери. З доведеного випливає, що побудована нами функція не є майже кліковою. Таким чином, на кожному неберівському просторі X існує функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка не є майже кліковою. Це і доводить достатність.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les séries à termes continus et tous de même signe // Bull. Soc. Math. France. – 1904. – **32**. – C. 125-128.

2. *Fort M.K., Jr.* Category theorems // Fund. Math. – 1955. – **42**. – C. 276-288.

3. *Calbrix J., Troallik J.P.* Applications separement continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Sec. A. – 1979. – **288**. – C. 647-648.

4. *Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V.* A new generalization of Calbrix–Troallic's theorem // Topology Appl. – 2014. – **164**. – C. 162-169.

5. *Куратовский К.* Топология. – **Т.1.** – М.: Мир, 1966. – 596 с.

6. *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192-246.