УДК 515.12

©2015 р. **Олена Карлова, Ольга Фодчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# КЛАСИФІКАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКУ ПРЯМИХ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Доводиться, що кожна неперервна функція $f : \mathbb{S} \to Y$, визначена на прямій Зорґенфрея $\mathbb{S}$, належить до першого класу Бера на $\mathbb{R}$, якщо $Y$ – топологічний векторний простір. Крім того, при $n \geq 1$ встановлено, що кожна неперервна функція $f : \mathbb{S}^n \to Y$ належить до першого класу Бера на $\mathbb{R}^n$, якщо $Y$ – метризовний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір.

We prove that every continuous function $f : \mathbb{S} \to Y$, defined on the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$, belongs to the first Baire class on $\mathbb{R}$ if $Y$ is a topological vector space. Moreover, we show for $n \geq 1$ that every continuous function $f : \mathbb{S}^n \to Y$ belongs to the first Baire class on $\mathbb{R}^n$ if $Y$ is a metrizable arcwise connected and locally arcwise connected space.

**1. Вступ** Сукупність усіх неперервних відображень між топологічними просторами $X$ та $Y$ ми позначаємо через $\mathrm{C}(X, Y)$.

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до *першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень з класу $\mathrm{C}(X, Y)$, яка поточково збігається до $f$ на $X$. Сукупність усіх відображень першого класу Бера між просторами $X$ та $Y$ позначається символом $\mathrm{B}_1(X, Y)$.

*Прямою Зорґенфрея* $\mathbb{S}$ називається числова пряма, наділена топологією $\mathcal{S}$, базу $\mathcal{U}_x$ околів точки $x$ в якій утворює сім'я проміжків $\mathcal{U}_x = ([x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0)$. Оскільки топологія $\mathcal{S}$ сильніша, ніж евклідова топологія $\mathcal{E}$ на числовій прямій, то кожна неперервна функція $f : \mathbb{R} \to Y$ зі значеннями в довільному топологічному просторі $Y$неперервна і на $\mathbb{S}$. Обернене твердження не вірне: наприклад, характеристична функція проміжку $[0, 1)$ неперервна в топології $\mathcal{S}$, але розривна в точках $x = 0$ та $x = 1$ в топології $\mathcal{E}$; в той же час легко бачити, що ця функція належить до першого класу Бера на $\mathbb{R}$. Таким чином, природно виникає питання, чи кожна неперервна функція на прямій Зорґенфрея належить до певного класу Бера в топології $\mathcal{E}$? Виявляється, що відповідь на це питання позитивна, а саме, ми встановлюємо у пункті 2, що включення $\mathrm{C}(\mathbb{S}, Y) \subseteq \mathrm{B}_1(\mathbb{R}, Y)$ вірне для довільного топологічного векторного простору $Y$.

У статті [4] У. Бейд встановив, що кожна неперервна функція $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера на $\mathbb{R}^2$. Крім того, він зауважив, посилаючись на препринт С. Мрувки [5], що включення $\mathrm{C}(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{B}_1(\mathbb{S}^n, \mathbb{R})$ вірне для довільного $n$.

У пункті 3, розвиваючи метод з [4], ми доводимо вищезгадане включення і з його допомогою показуємо, що довільна неперервна функція $f : \mathbb{S}^n \to Y$ належить до класу $\mathrm{B}_1(\mathbb{R}^n, Y)$ у випадку, коли $Y$ – довільний метризовний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір та $n \in \mathbb{N}$.

## 2. Неперервні функції на прямій Зорґенфрея

**Теорема 1.** *Нехай $Y$ – топологічний векторний простір і $f : \mathbb{S} \to Y$ – неперервна функція. Тоді $f \in \mathrm{B}_1(\mathbb{R}, Y)$.*

*Доведення.* Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$B_{k,n} = \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big)$$

і розглянемо покриття $\mathcal{A}_n = (B_{k,n} : k \in \mathbb{Z})$ числової прямої $\mathbb{R}$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ визначимо відображення $f_{k,n} : B_{k,n} \to Y$ формулою

$$f_{k,n}(x) = f\big(\tfrac{k+1}{n}\big) + (nx - k)\big(f\big(\tfrac{k+2}{n}\big) - f\big(\tfrac{k+1}{n}\big)\big)$$

і зауважимо, що відображення $f_{k,n}$ неперевне на $B_{k,n}$ з топологією, індукованою з $\mathbb{R}$. Тепер для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_n(x) = f_{k,n}(x),$$

якщо $x \in B_{k,n}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$. Оскільки

$$f_{k,n}\Big(\frac{k+1}{n}\Big) = f\Big(\frac{k+2}{n}\Big) = f_{k+1,n}\Big(\frac{k+1}{n}\Big)$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $k \in \mathbb{Z}$, то кожне відображення $f_n : \mathbb{R} \to Y$ неперервне.

Покажемо, що $f_n(x) \to f(x)$ поточково на $\mathbb{R}$. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і окіл $V$ точки $y = f(x)$ в просторі $Y$. Виберемо заокруглений окіл нуля $U$ в $Y$, такий, що $U + U \subseteq V$. Оскільки відображення $f : \mathbb{S} \to Y$ неперервне в точці $x$, то існує таке $\delta > 0$, що

$$f(u) - f(x) \in U$$

для всіх $u \in [x, x+\delta)$. Виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{2}{n_0} < \delta$. Нехай $n \geq n_0$ і $k \in \mathbb{Z}$ – таке число, що $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Тоді

$$f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - f(x) \in U \text{ і } f\Big(\frac{k+2}{n}\Big) - f(x) \in U$$

оскільки $\{\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}\} \subseteq [x, x+\delta)$. Оскільки

$$f_n(x) - f(x) = (k+1-nx)(f\big(\frac{k+1}{n}\big) - f(x)) + \\ +(nx-k)(f\big(\frac{k+2}{n}\big) - f(x)),$$

то

$$f_n(x) - f(x) \in (k+1-nx)U + (nx-k)U \subseteq \\ \subseteq U + U \subseteq V.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, $f \in \mathrm{B}_1(\mathbb{R}, Y)$. $\square$

### 3. Неперервні функції на добутку прямих Зорґенфрея

Введемо спочатку деякі позначення. Нехай $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$ і $r > 0$ . Позначимо

$$B[a, r) = \prod_{i=1}^{m} [a_i, a_i + r),$$

$$B[a, r] = \prod_{i=1}^{m} \Big[a_i - \frac{r}{2}, a_i + \frac{r}{2}\Big].$$

**Означення 1.** Послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних підмножин $\mathbb{R}^m$ *збігається регулярно до точки* $x_0 \in \mathbb{R}^m$ (див. [6, с. 366]), якщо існує послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ $m-$вимірних кубів $B_n = B[x_0, r_n]$ з центром в точці $x_0$ радіуса $r_n > 0$, яка задовольняє наступні умови:

1) $E_n \subseteq B_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

**Означення 2.** Система $\mathcal{F}$ підмножин $\mathbb{R}^m$ *покриває множину* $E \subseteq \mathbb{R}^m$ в сенсі Віталі [6, с. 366], якщо для кожного $x \in E$ існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ множин з $\mathcal{F}$, яка регулярно збігається до точки $x$.

Нам буде потрібний наступний важливий результат (див. [6, теорема 70.2]).

**Теорема 2** (теорема Віталі про покриття)**.** *Нехай $E$ – вимірна підмножина простору $\mathbb{R}^m$ і $\mathcal{F}$ – система замкнених множин, яка покриває множину $E$ в сенсі Віталі. Тоді існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних множин з $\mathcal{F}$, така, що*

$$\mu(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0.$$

**Лема 1.** *Нехай $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – інтегровна за Лебеґом функція, $r > 0$ і*

$$A = \{p \in \mathbb{R}^m : |f(p)| \leq r\}.$$

*Тоді функція $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, визначена за правилом*

$$h(p) = \int\limits_{B[p,r)} f(q)\chi_{_A}(q) d\mu$$

*неперервна на $\mathbb{R}^m$.*

*Доведення.* Зафіксуємо $p_0 \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon > 0$. Покладемо $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2r}}$ і зауважимо, що

$$\mu(B[p, r) \vartriangle B[p_0, r)) < \frac{\varepsilon}{r}$$

для всіх $p \in B[p_0, \delta]$. Тоді

$$|h(p) - h(p_0)| =$$

$$= |\int\limits_{B[p,r)} f(q)\chi_A(q)d\mu - \int\limits_{B[p_0,r)} f(q)\chi_A(q)d\mu| \leq$$

$$\leq \int\limits_{B[p,r)\triangle B[p_0,r)} |f(q)\chi_A(q)|d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_{B[p,r)\triangle B[p_0,r)} |f(q)|d\mu \leq r\mu(B[p,r) \triangle B[p_0,r)).$$

Звідси випливає, що

$$|h(p) - h(p_0)| \leq \varepsilon$$

для всіх $p \in B[p_0, \delta]$. Таким чином, функція $h$ неперервна в точці $p_0$. $\square$

**Теорема 3.** *Кожна неперервна функція $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}$ при $m \in \mathbb{N}$ належить до класу* $\mathrm{B}_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

*Доведення.* Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і побудуємо систему $\mathcal{F}_\varepsilon$ замкнених множин в $\mathbb{R}^m$, яка покриває простір $\mathbb{R}^m$ в сенсі Віталі. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ та $k_1, ..., k_m \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$\Gamma^n_{k_1,...,k_m} = \prod_{i=1}^{k}\Big[\frac{k_i}{n}, \frac{k_i+1}{n}\Big].$$

Оскільки функція $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}$ неперервна, то для кожного $p \in \mathbb{S}^m$ існує $\delta^\varepsilon_p > 0$, таке, що виконується нерівність

$$|h(p) - h(p_0)| \leq \varepsilon$$

для всіх $q \in B[p, \delta^\varepsilon_p]$. Позначимо

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{B[p, \delta^\varepsilon_p] : p \in \mathbb{S}^m\}.$$

Покладемо

$$\mathcal{F}_{n,\varepsilon} = (\Gamma^n_{k_1,...,k_m} \cap B[p, \delta^\varepsilon_p] : p \in \mathbb{S}^m, k_i \in \mathbb{Z})$$

і

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,\varepsilon}.$$

Зауважимо, що $\operatorname{diam} F \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ для довільної множини $F \in \mathcal{F}_{n,\varepsilon}$. Доведемо, що сім'я $\mathcal{F}_\varepsilon$ покриває $\mathbb{R}^m$ в сенсі Віталі. Зафіксуємо $p_0 \in \mathbb{R}^m$. Для довільного номера $n$ існують числа $k^n_1, \ldots, k^n_m \in \mathbb{Z}$, такі, що $p_0 \in \Gamma^n_{k^n_1,...,k^n_m}$. Позначимо

$$F_n = \Gamma^n_{k^n_1,...,k^n_m} \cap B[p_0, \delta_{p_0}] = \prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i].$$

Тоді $F_n \in \mathcal{F}_\varepsilon$. Зауважимо, що

$$F_n \subseteq B_n = \prod_{i=1}^{m}[2a_i - b_i, b_i]$$

і

$$\operatorname{diam} B_n \leq \frac{2\sqrt{2}}{n} \longrightarrow 0.$$

Звідси і одержуємо, що $\mathcal{F}_\varepsilon$ покриває $\mathbb{R}^m$ в сенсі Віталі.

Отже, за теоремою Віталі, існує послідовність $(C^\varepsilon_n)^\infty_{n=1}$ $m$–вимірних кубів $C^\varepsilon_n = \prod\limits_{i=1}^{m}[a^\varepsilon_{i,n}, b^\varepsilon_{i,n}]$ з системи $\mathcal{F}_\varepsilon$, така, що

$$\mu(\mathbb{S}^n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C^\varepsilon_n) = 0.$$

Визначимо функцію $g_\varepsilon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ наступним чином:

$$g_\varepsilon(p) = \begin{cases} f((a^\varepsilon_{1,n}, ..., a^\varepsilon_{m,n})), & p \in C^\varepsilon_n, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Згідно з [3, с. 10] функція $g_\varepsilon$ вимірна за Лебеґом на $\mathbb{R}^m$. Підставляючи $\varepsilon = \frac{1}{n}$, ми одержимо послідовність вимірних функцій $g_{\frac{1}{n}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яка майже скрізь рівномірно збігається до функції $f$ на $\mathbb{R}^n$, оскільки справедлива нерівність

$$|g_{\frac{1}{n}}(p) - f(p)| < \tfrac{1}{n}$$

для всіх $p \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C^\varepsilon_n$. Тому, за теоремою 1 з [3, с. 29], функція $f$ теж вимірна за Лебеґом.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$A_n = \{p \in \mathbb{R}^m : |f(p)| \leq n\}$$

і визначимо функцію $h_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ формулою:

$$h_n(p) = n^m \int\limits_{B[p,\frac{1}{n})} f(q)\chi_{A_n}(q)d\mu.$$

Застосувавши лему 1, ми отримаємо, що кожна функція $h_n$ неперервна на $\mathbb{R}^m$.

Залишилось показати, що

$$\lim_{n\to\infty} h_n(p) = f(p)$$

для всіх $p \in \mathbb{R}^m$. Зафіксуємо точку $p \in \mathbb{R}^m$ та $\varepsilon > 0$. З неперервності функції $f$ у точці $p$ на $\mathbb{S}^m$ випливає, що існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$|f(q) - f(p)| < \varepsilon$$

для всіх $q \in B[p, \frac{1}{n_0})$. Тоді для всіх $n \geq n_0$ маємо

$$|h_n(p) - f(p)| \leq n^m \int\limits_{B[p,\frac{1}{n})} |f(q) - f(p)| d\mu <$$

$$< n^m \cdot \varepsilon \cdot \mu(B[p, \frac{1}{n})) = \varepsilon.$$

Таким чином, $f \in \mathrm{B}_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. $\square$

### 4. Класифікація функцій зі значеннями в метризовних зв'язних просторах

Нагадаємо, що топологічний простір $Y$ називається *лінійно зв'язним*, якщо для довільних $x, y \in Y$ існує неперервна функція $\gamma : [0,1] \to Y$, така, що $\gamma(0) = x$ і $\gamma(1) = y$.

Простір $Y$ називається *локально лінійно зв'язним*, якщо для кожного $x \in Y$ і довільного околу $V$ точки $x$ існує окіл $U$ цієї точки, такий, що для кожного $y \in U$ існує неперервна функція $\gamma : [0,1] \to V$ з властивістю $\gamma(0) = x$ і $\gamma(1) = y$.

**Теорема 4.** *Нехай $Y$ – метризовний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний простір. Тоді*

$$\mathrm{C}(\mathbb{S}^m, Y) \subseteq \mathrm{B}_1(\mathbb{S}^m, Y)$$

*для довільного $m \in \mathbb{N}$.*

*Доведення.* Нехай $m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{S}^m \to Y$ – неперервне відображення і $d$ – метрика на просторі $Y$, яка породжує його топологічну структуру.

Зауважимо, що оскільки простір $\mathbb{S}^m$ сепарабельний, а відображення $f$ неперервне, то образ $Z = f(\mathbb{S}^m)$ сепарабельний. Перевіримо, що відображення $f$ належить до першого класу Лебеґа на $\mathbb{R}^m$, тобто, що прообраз довільної відкритої множини $V$ в $Z$ є множиною типу $F_\sigma$ в $\mathbb{R}^m$. Оскільки $Z$ задовольняє другу аксіому зліченності, то досить довести, що прообраз кожної кулі є $F_\sigma$-множиною. Отже, зафіксуємо $y_0 \in Z$ і $r > 0$. Розглянемо неперервну функцію $g : Z \to [0, +\infty)$,

$$g(y) = d(y, y_0).$$

Зауважимо, що

$$B = \{y \in Z : d(y, y_0) < r\} = g^{-1}([0, r)).$$

Покладемо $h = g \circ f$. Тоді

$$h \in \mathrm{C}(\mathbb{S}^m, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{B}_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

за теоремою 3. Тому $h$ належить до першого класу Лебеґа на $\mathbb{R}^m$ за теоремою Лебеґа-Гаусдорфа [2]. Оскільки

$$f^{-1}(B) = h^{-1}([0, r)),$$

то множина $f^{-1}(B)$ є типу $F_\sigma$ в $\mathbb{R}^m$, звідки випливає, що $f : \mathbb{R}^m \to Z$ належить до першого класу Лебеґа. Тоді $f \in \mathrm{B}_1(\mathbb{R}^m, Y)$ згідно з [1, Теорема 1]. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Карлова О.О., Михайлюк В.В.* Функції першого класу Бера зі значеннями в метризовних просторах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 4. – С. 567–571.
2. *Куратовский К.* Топология, Т.1. – М.: Мир, 1966. – 564 с.
3. *Маслюченко В.К.* Лекції з теорії міри та інтеграла, Ч.2. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – 176 с.
4. *Bade W.* Two properties of the Sorgenfrey plane // Pasif. J. Math. – 1971. – P. 349–354.
5. *Mrówka S.* Some problems related to $N$-compact spaces, preprint.
6. *McShane E.J.* Integration, Princeton, 1947. – 394 c.