

ХВИЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО ЗБУРЕННЯ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Записані хвильові оператори для рангу один сингулярного несиметричного збурення $\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ самоспряженого напівобмеженого оператора A , тобто оператора A збуреного несиметричним потенціалом ($\omega_1 \neq \omega_2$). Вирази подані у сильному сенсі. Наведено матрицю розсіяння.

We provide with the wave operators for a rank one of singular non-symmetric perturbation $\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ of a self-adjoint semi-bounded operator A , that is, the operator which is perturbed by a non-symmetric potential ($\omega_1 \neq \omega_2$). The expressions are given in the strong sense. The scattering matrix is also given.

Вступ

В цій роботі продовжуються дослідження сингулярного рангу один збурення самоспряженого оператора косим проектором. Таке збурення відповідає формальному виразу

$$A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2,$$

де $A = A^*$ – необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а вектори ω_i , $i = 1, 2$ належать деякому негативному простору $\mathcal{H}_{-1}$, взятому зі шкали, побудованої за оператором A . Такі збурення є логічним продовження досліджень задач про нелокальні взаємодії [7,8].

Істотно ґрунтуючись на результаті з [5], можна довести існування хвильових операторів для пари A і $\tilde{A}$ і записати дію у слабкому сенсі (у сенсі скалярного добутку). В цій роботі наведено дію хвильових операторів у сильному сенсі та записано матрицю розсіяння для таких операторів.

Попередні відомості

Нехай $A = A^*$ – самоспряжений необмежений оператор, визначений на $\text{Dom } A = \mathfrak{D}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо $\rho(\cdot)$ множину регулярних точок відповідного оператора.

Нагадаємо, що

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$$

позначає частину асоційованої із оператором A -шкали гільбертових просторів [3,6], де простори

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}(|A|^{k/2}), \quad k = 1, 2$$

із нормою

$$\|\varphi\|_k = \|(|A| + I)^{k/2} \varphi\|$$

(I – позначає одиничний оператор) $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ негативні (дуальні) простори – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою

$$\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Надалі, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає дуальний скалярний добуток – спарення просторів $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$.

Використовуючи A -шкалу, оператор A продовжується на $\mathcal{H}_{+1}$ і розуміється тепер як обмежений оператор зі всього $\mathcal{H}_{+1}$ у $\mathcal{H}_{-1}$. Продовжений оператор позначено як $\mathbf{A}$. Позначимо також $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z)^{-1}$ відповідну резольвенту $z \in \rho(\mathbf{A})$.

Розглянемо в A -шкалі оператор вигляду $V = \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$, такого що

$$\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+1}, \quad \mathfrak{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-1}.$$

Сума $\mathbf{A} + V$ є обмежений оператор з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Тепер формальний вираз $A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ можна розуміти як оператор $\mathbf{A} + \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$:

$$A^{\omega_1, \omega_2} = (\mathbf{A} + \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2) \upharpoonright_{\mathcal{H}}. \quad (1)$$

Означення [4]. Оператор A^{ω_1, ω_2} називається рангу один несиметричним слабо сингулярним збуренням самоспряженого оператора A у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, якщо для

$$\eta_i = A^{-1}\omega_i, \quad \omega_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}, \quad \omega_1 \neq \omega_2 :$$

область визначення задається у вигляді:

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1, \omega_2}) = \{\psi = \varphi + b\eta_2 \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A),$$

де

$$b = \frac{(A\varphi, \eta_1)}{1 + (A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1)}\}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) \neq -1$; і у вигляді:

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1, \omega_2}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} + \{c\eta_2\},$$

де

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \{\varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid (A\varphi, \eta_1) = 0\}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) = -1$; а дія задається виразом:

$$A^{\omega_1, \omega_2}\psi = A\varphi.$$

Далі ми розглядаємо збурення із параметром $\alpha \in \mathbb{C}$ і позначаємо його

$$\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2,$$

де $\omega_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$ і $\|\omega_i\|_{-1} = 1$, $i = 1, 2$. Множину таких операторів позначимо $\mathcal{P}_{ws, ws}(A)$ що означає "weakly-weakly" "слабо-слабо" сингулярне збурення $((ws, ws)$ -збурення).

Якщо в означенні $\omega_1 = \omega_2$, то отримуємо відомий випадок самоспряжених сингулярних збурень [2,3,6].

Теорема 1 [4]. Для резольвент $R_z = (A - z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$ операторів A і $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{ws, ws}^{1,1}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ виконується формула типу М.Крейна $z, \xi, \zeta \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_z)t_z, \quad (2)$$

з дефектними векторами

$$n_z = (A - \xi)(A - z)^{-1}n_\xi$$

$$t_z = (A - \zeta)(A - z)^{-1}t_\zeta,$$

де $n_z, t_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$; та умовою для скалярної функції b_z :

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(t_\xi, n_{\bar{z}}).$$

Вектори n_z, t_z і число b_z при кожному фіксованому z пов'язані із ω_1 і ω_2 співвідношеннями

$$n_z = R_z\omega_1, \quad t_z = R_z\omega_2,$$

$$-b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle \omega_2, R_{\bar{z}}\omega_1 \rangle, \quad \alpha \neq 0.$$

Хвильові оператори

Для A та $\tilde{A}$ визначимо хвильові оператори у стандартний спосіб [1,3]:

$$W_\pm(A, \tilde{A}) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\tilde{A}t} e^{-iAt} P^{ac}, \quad (3)$$

якщо границі існують, де

$$P^{ac}f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{ac}(\lambda) dE^{ac}(\lambda) (A + i)^{-1} \omega_2,$$

тут позначимо через P^{ac} , і зокрема $\tilde{P}^{ac}$, спектральні проектори на абсолютно неперервні частини спектрів операторів A і $\tilde{A}$ та $\mathcal{H}^{ac}$ і $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ відповідні підпростори:

$$\mathcal{H}^{ac} = P^{ac}\mathcal{H}, \quad \tilde{\mathcal{H}}^{ac} = \tilde{P}^{ac}\mathcal{H}.$$

Згідно роботи Като Т. [5] оператори A та $\tilde{A}$ мають хвильові оператори. У подальших дослідженнях наслідуюмо, здебільшого, за [3].

Лема [1,3]. Для $f \in L_2(\mathbb{R})$ і борелевих мір $d\lambda, d\mu$ маємо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(\mu-\lambda)} - 1}{\mu - \lambda} f(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - (\mu + i0)} \right|^2 d\mu = 0,$$

де $\hat{f}$ позначає звичайне перетворення Фур'є. Позначимо

$$U_t = e^{i\tilde{A}t} e^{-iAt} P^{ac}.$$

Не порушуючи загальності вважатимемо надалі $\pm i \in \rho(\tilde{A})$.

Нехай вектор

$$g = (A + i)^{-1}\omega_1, \quad \|g\| = 1$$

є генератором в $\mathcal{H}$ для A і $\tilde{A}$. Тоді

$$\tilde{g} = (\tilde{A} + i)^{-1}\omega_1 = \frac{1}{1 + \alpha F(-i)}g$$

також генератор.

Кожний вектор $f \in \mathcal{H}$ має два зображення

$$f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) dE(\lambda)g, \quad f = \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{E}(\lambda)\tilde{g},$$

асоційовані з A і A_α відповідно.

Тоді скалярний добуток $f, g \in \mathcal{H}$ теж має два зображення

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\lambda)} \hat{g}(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\tilde{f}}(\lambda)} \hat{\tilde{g}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda),$$

де $\rho(\lambda) = \langle g, E(\lambda)g \rangle$ та $\tilde{\rho}(\lambda) = \langle \tilde{g}, \tilde{E}(\lambda)\tilde{g} \rangle$ є неспадними функціями обмеженої варіації.

Якщо $\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}(A)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d\rho(\lambda) < \infty$. Для $f \in \mathcal{H}$, $\omega_1 \in \mathcal{H}_{-1}$ можна записати:

$$\langle (A - z)^{-1}\omega_2, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$\langle (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda).$$

Із формули М.Крейна (2) маємо:

$$\langle (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2, f \rangle = \frac{1}{1 + \alpha F(z)} \langle (A - z)^{-1}\omega_2, f \rangle,$$

де $F(z) = \langle (A - z)^{-1}\omega_2, \omega_1 \rangle$; та у спектральному зображенні

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha F(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda), \end{aligned}$$

та для (майже всіх) $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \pm \pi i (\mu - i) \hat{\tilde{f}}(\mu) \tilde{\rho}'(\mu) \\ &+ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - \mu} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha F(\mu \pm i0)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - (\mu \pm i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (4)$$

З останніх двох рівностей, шляхом простих перетворень, маємо

$$\begin{aligned} & 2\pi i (\mu - i) \hat{\tilde{f}}(\mu) \tilde{\rho}'(\mu) \\ &= \frac{2\pi i \alpha F(\mu^2 + 1) \rho'(\mu)}{|1 + \alpha F(\mu + i0)|^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - (\mu + i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &+ \frac{2\pi i (\mu - i)}{1 + \alpha F(\mu - i0)} \hat{\tilde{f}}(\mu) \rho'(\mu). \end{aligned} \quad (5)$$

Після диференціювання останньої рівності майже скрізь по $\mu \in \mathbb{R}$ виконується

$$\pi \alpha (\mu^2 + 1) \rho'(\mu) = \text{Im} F(\mu + i0),$$

що впливає з зображення

$$F(z) = \langle (A - z)^{-1}\omega_2, \omega_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda - z} d\rho(\lambda),$$

для $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}$.

Для запису зв'язку між абсолютно неперервними частинами спектрів $d\rho(\lambda)$ та $d\tilde{\rho}(\lambda)$ знову почнемо з формули М.Крейна (2) у вигляді:

$$(\tilde{A} - z)^{-1}\omega = \frac{1}{1 + \alpha F(z)} (A - z)^{-1}\omega,$$

яка дає

$$\begin{aligned} & \langle (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_2, (\tilde{A} - z)^{-1}\omega_1 \rangle \\ &= \frac{1}{|1 + \alpha F(z)|^2} \langle (A - z)^{-1}\omega_2, (A - z)^{-1}\omega_1 \rangle \end{aligned}$$

та використовуючи спектральне зображення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda - z)(\lambda - \bar{z})} d\tilde{\rho}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{|1 + \alpha F(z)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda - z)(\lambda - \bar{z})} d\rho(\lambda)$$

звідки майже скрізь на $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\rho}'(\mu) = \frac{1}{|1 + \alpha F(\mu + i0)|^2} \rho'(\mu), \quad (6)$$

яке виконується для абсолютно неперервних частин спектральних мір $d\rho$ і $d\tilde{\rho}$.

З (5) та (6) випливає зв'язок для зображень $\hat{f}$ та $\hat{\tilde{f}}$ функції f

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{f}}(\mu) = & -\alpha(\mu + i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - (\mu + i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ & + (1 + \alpha F(\mu + i0)) \hat{f}(\mu). \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 2. *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений оператор A та його сингулярне збурення косим проектором*

$$\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Тоді існують хвильові оператори $W_{\pm}$, визначені в (3), для яких виконується рівність:

$$\begin{aligned} W_{\pm} f = & \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \alpha F(\lambda \pm i0)) \hat{f}^{ac}(\lambda) \\ & \times \tilde{E}(\lambda)(\tilde{A} + i)^{-1} \omega_2, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$P^{ac} f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{ac}(\lambda) dE(\lambda)(A + i)^{-1} \omega_2,$$

Доведення. Оскільки оператори U_t та $W_{\pm}$ є нульовими на ортогональному доповненні до $\mathcal{H}^{ac}$, то для кожного $f \in \mathcal{H}^{ac}$ маємо $\hat{f}^{ac} = \hat{f}$.

Незалежно від того, що існування хвильових операторів (3) у слабкому сенсі можна показати за допомогою [5], покажемо це для W_+ незалежно.

Для довільних

$$f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathcal{H}^{ac}, \quad g \in \mathfrak{D}(\tilde{A}) \cap \tilde{\mathcal{H}}^{ac} \quad (9)$$

маємо

$$\begin{aligned} \langle g, U_t f \rangle - \langle g, f \rangle = & i\alpha \int_0^t \langle e^{-i\tau \tilde{A}} g, \omega_1 \rangle \langle \omega_2, e^{-i\tau A} f \rangle, \end{aligned}$$

оскільки $\mathfrak{D}(A)$ і $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ та $\mathcal{H}^{ac}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ інваріантні відносно дії e^{-iAt} та $e^{-i\tilde{A}t}$ відповідно.

Оскільки $\sigma^{ac}(\tilde{A}) \subseteq \mathbb{R}$, то інтегрування залишається на $\mathbb{R}$.

Використовуючи спектральне зображення та змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle g, U_t f \rangle - \langle g, f \rangle = & i\alpha \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau \lambda} \overline{\hat{g}(\lambda)} (\lambda + i) d\tilde{\rho}(\lambda) \right] \\ & \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau \mu} \hat{f}(\mu) (\mu - i) d\rho(\mu) \right] d\tau \\ = & \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(\lambda - \mu)} - 1}{\lambda - \mu} \\ & \times \hat{f}(\mu) (\mu - i) \overline{\hat{g}(\lambda)} (\lambda + i) d\tilde{\rho}(\lambda) d\rho(\mu). \end{aligned}$$

Додатково припустимо, що

$$\hat{f} \rho' \in L_2(\mathbb{R}), \quad \hat{\tilde{g}} \tilde{\rho}' \in L_2(\mathbb{R}). \quad (10)$$

Тоді за Лемою

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle g, U_t f \rangle = & \langle g, f \rangle \\ & + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\mu) (\mu - i) \overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)} (\lambda + i)}{\mu - (\lambda + i0)} \\ & \times \tilde{\rho}'(\lambda) \rho'(\mu) d\lambda d\mu \\ = & \langle g, f \rangle \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \alpha F(\lambda + i0)) \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)} \tilde{\rho}'(\lambda) d\lambda \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)} \tilde{\rho}'(\lambda) d\lambda = \langle g, W_+ f \rangle, \end{aligned}$$

де використано (7).

Отже (8) у слабкому сенсі показано для функцій f, g , які задовольняють умови (9) та (10). Такі функції утворюють щільну підмножину у $\mathcal{H}^{ac}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ відповідно. Отже у слабкому сенсі границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}^{ac} U_t = W_+$$

існує.

Для доведення існування границі у сильному сенсі потрібно показати, що

$$\|W_+ f\| = \|P^{ac} f\|.$$

Дійсно, з (8) та (6):

$$\begin{aligned} \|W_+ f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |1 + \alpha F(\lambda + i0)|^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\tilde{\rho}(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |1 + \alpha F(\lambda + i0)|^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 \tilde{\rho}'(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 \rho'(\lambda) d\lambda = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Доведення для W_- аналогічне.

Для обчислення W_+^* розглянемо

$$f \in \mathcal{H}^{ac}, \quad g \in \tilde{\mathcal{H}}^{ac}.$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} \langle g, W_+ f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\lambda)} (1 + \alpha F(\lambda + i0)) \hat{f}(\lambda) \tilde{\rho}'(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\hat{g}(\lambda)}}{1 + \alpha F(\lambda - i0)} \hat{f}(\lambda) \rho'(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Отже спряжений оператор має вигляд

$$W_+^* g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha F(\lambda + i0)} \hat{g}^{ac} dE(A + i)^{-1} \omega_1,$$

де

$$\tilde{P}^{ac} g = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^{ac} d\tilde{E}(\tilde{A} + i)^{-1} \omega_1 \in \tilde{\mathcal{H}}^{ac}.$$

Тоді $S(\tilde{A}, A) = W_+^* W_-$ – оператор розсіювання, а

$$S(\tilde{A}, A, \lambda) = \frac{1 + \alpha F(\lambda - i0)}{1 + \alpha F(\lambda + i0)} \quad (11)$$

– матриця розсіювання, яка у даному випадку складається із одного елемента, а її дія – це множення на (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахизер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
2. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. Second edition, With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. xiv+488 pp.
3. Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type

operators, London Mathematical Society Lecture Note Series, 271, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. xiv+429 pp.

4. Вдовенко Т.І., Дудкін М.Є. Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора // "Спектральна теорія операторів та наборів операторів". Збірник праць Інституту Математики НАН України, 2015. – Т.12. – № 1. – С. 57-73.

5. Kato T. Wave Operators and Similarity for Some Non-selfadjoint Operators // Math. Annalen. – 1966. – **162**. – P. 258–279.

6. Koshmanenko V. Singular quadratic forms in perturbation theory. Translated from the 1993 Russian original. Mathematics and its Applications, 474. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. viii+308 pp.

7. Nizhnik L. Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem // Inverse problems. – 2010. – **26**. – 9 p.

8. Nizhnik L. Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation // Tamkang Journal of Mathematics. – 2011. – **42**, no. 3. – P. 385–394.