

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджено мішану задачу з умовою Діріхле для нелінійного параболічного рівняння зі змінним запізненням. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку цієї задачі та отримано його апріорну оцінку, а також доведено теореми порівняння класичних розв'язків розглядуваних рівнянь.

A mixed initial-boundary value problem with the Dirichlet condition for a nonlinear parabolic equation with variable delay is investigated. We find conditions of the existence and uniqueness for a solution of the problem, its a priori estimate and prove comparison theorems for solutions of the considered equations.

Вступ. Диференціальні рівняння із запізненням є тим математичним апаратом, за допомогою якого вдалося описати чимало нових ефектів та явищ в багатьох прикладних задачах. У сучасній фізиці, механіці, космічній техніці для визначення сили, що діє на тіло (матеріальну точку), потрібно враховувати не тільки його точне розміщення та поведінку в даний момент часу, але і стан об'єкта в деякі попередні моменти часу. Також рівняння із запізненням використовують для моделювання харчових ланцюгів ([13]), реакції імунної системи людського організму на вірус імунодефіциту (ВІЛ) ([10],[12], [13]). Тому в останні роки інтенсивно розвивається математичний апарат для дослідження рівнянь та систем із запізненням, більшість з яких є звичайними диференціальними рівняннями як зі сталим, так і зі змінним запізненням (див. [2], [4], [8], [9], [14] та інші).

Мішані задачі для параболічних рівнянь зі сталим запізненням вивчалися у [1], [7], [17] – [21] та інших. Зокрема, у [7], [21] знайдено розв'язки мішаних задач для рівняння теплопровідності зі сталим запізненням. Глобальну оцінку розв'язку нелінійного імпульсного параболічного рівняння зі сталим запізненням отримано у [20]. У роботах [17], [18] та [19] досліджено умови існування і єдиності розв'язку мішаної задачі для загального параболічного рівняння зі сталим

запізненням. Проте, у відомій нам літературі параболічні рівняння зі змінним запізненням не розглядалися.

У даній роботі досліджено мішану задачу у випадку крайової умови Діріхле для нелінійного параболічного рівняння із запізненням, яке є функцією від часової змінної. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку цієї задачі та отримано його апріорну оцінку, а також доведено теореми порівняння класичних розв'язків розглядуваних рівнянь.

Нагадаємо деякі стандартні позначення і поняття, які використовуємо в цій роботі. Нехай n – задане натуральне число. Під \mathbb{R}^k , де $k = n$ або $k = n + 1$, розуміємо евклідов простір, складений з впорядкованих наборів $z = (z_1, \dots, z_k)$ дійсних чисел, з нормою $|z| := (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}$. Через $C(H)$, де H – множина в \mathbb{R}^k , позначаємо лінійний простір неперервних на H функцій, причому, якщо H – компакт, то на $C(H)$ визначаємо норму $\|v\|_{C(H)} := \max_{z \in H} |v(z)|$, з якою цей простір є банаховим.

Якщо D – область в $\mathbb{R}^{n+1} := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$, \bar{D} – її замикання та $\gamma \in (0, 1]$ – яке-небудь число, то під $C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{D})$ розуміємо банахів простір визначених і неперервних на \bar{D} функцій v зі скінченною нормою

$$\|v\|_{\bar{D}}^{\gamma, \gamma/2} := \|v\|_{C(\bar{D})} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{\substack{(x,t),(x',t') \in \bar{D} \\ 0 < |x-x'| \leq \rho}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|x-x'|^\gamma} + \\
& + \sup_{\substack{(x,t),(x',t') \in \bar{D} \\ 0 < |t-t'| \leq \rho}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|t-t'|^{\gamma/2}},
\end{aligned}$$

де $\rho > 0$ – довільне фіксоване число (див. [3, ст.16,17]). Під $C^{2,1}(D)$ (відповідно, $C^{2,1}(\bar{D})$) розумітимемо лінійний простір функцій v , визначених і неперервних на D (відповідно, \bar{D}) разом зі своїми похідними $v_{x_k}, v_{x_k x_l}$ ($k, l = \overline{1, n}$) і v_t . Під $C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\bar{D})$ розумітимемо банахів простір функцій v із простору $C^{2,1}(\bar{D})$ зі скінченною нормою

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2+\gamma, 1+\gamma/2}^{\bar{D}} &= \|v\|_{C(\bar{D})} + \sum_{k=1}^n \|v_{x_k}\|_{\gamma, \gamma/2}^{\bar{D}} + \\
&+ \sum_{k,l=1}^n \|v_{x_k x_l}\|_{\gamma, \gamma/2}^{\bar{D}} + \|v_t\|_{\gamma, \gamma/2}^{\bar{D}}.
\end{aligned}$$

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай Ω – обмежена область в \mathbb{R}^n з межею $\partial\Omega$, $T > 0$. Позначимо $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T]$, тоді $\bar{Q} := \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\bar{\Sigma} := \partial\Omega \times [0, T]$. Нехай $\tau : [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ – задана неперервна функція. Під E_0 розуміємо множину, яка складається з чисел $t - \tau(t)$ таких, що $t - \tau(t) \leq 0$ і $t \in [0, T]$, а також числа 0.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in C(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
Pu(x,t) &:= u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u_{x_k x_l}(x,t) + \\
&+ \sum_{k=1}^n a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) + a_0(x,t)u(x,t) - \\
&- g(x,t, u(x,t), u(x,t - \tau(t))) = \\
&= f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (1)
\end{aligned}$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad (2)$$

та початкову умову

$$Gu(x,t) := u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times E_0. \quad (3)$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1)–(3), а функцію u – її розв'язком.

На протязі всієї роботи припускаємо, що вихідні дані задачі (1)–(3) задовольняють такі умови:

(\mathcal{A}_1) a_{kl}, a_k, a_0 – задані на Q неперервні функції, $a_{kl} = a_{lk}$ ($k, l = \overline{1, n}$), $\exists \nu = const \geq 0$ таке, що $\forall (x,t) \in Q, \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)\xi_k \xi_l \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

$$\inf_{(x,t) \in Q} a_0(x,t) > 0;$$

(\mathcal{A}_2) $g(x,t, \xi, \eta), (x,t, \xi, \eta) \in \Omega \times (0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують визначені на Q невід'ємні функції g_1, g_2 такі, що $\forall (x,t) \in Q, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq g_\xi(x,t, \xi, \eta) \leq g_1(x,t),$$

$$0 \leq g_\eta(x,t, \xi, \eta) \leq g_2(x,t),$$

$$\inf_{(x,t) \in Q} (a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \quad (4)$$

$$\sup_{(x,t) \in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty,$$

і, крім того, $g(x,t, 0, 0) = 0, (x,t) \in Q$;

(\mathcal{A}_3) $f \in C(Q), h \in C(\bar{\Sigma}), u_0 \in C(\bar{\Omega} \times E_0)$, причому f є обмеженою та виконується умова узгодження нульового порядку:

$$h(x,0) = u_0(x,0) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Тепер сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1 (порівняння розв'язків). Нехай виконуються умови (\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2) і $a_0^- - g_2^+ > 0$. Припустимо, що u_1, u_2 – розв'язки задач, що відрізняються від задачі (1)–(3) тільки тим, що замість f, h, u_0 стоять, відповідно, $f_1, h_1, u_{0,1}$ та $f_2, h_2, u_{0,2}$ з такими ж властивостями, які вказані для f, h, u_0 , відповідно, в умові (\mathcal{A}_3). Тоді виконується нерівність

$$\begin{aligned}
\min \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s) \in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)), \right. \\
\left. \inf_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \inf_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} (u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s), 0) \leq \\
& \leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq \\
& \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)), \right. \\
& \quad \left. \sup_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), \right. \\
& \quad \left. \sup_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} (u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s), 0) \right\}, \\
& (x,t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T)). \quad (5)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що з цієї теореми випливає неперервна залежність розв'язку задачі (1)–(3) від вихідних даних.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$ і $a_0^- - g_2^+ > 0$. Тоді задача (1)–(3) має не більше одного розв'язку.

Наслідок 2 (оцінка розв'язку). Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$ і $a_0^- - g_2^+ > 0$. Тоді для розв'язку задачі (1)–(3) правильна оцінка

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s), \min_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} h(y,s), \right. \\
& \quad \left. \min_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\} \leq u(x,t) \leq \\
& \leq \max \left\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s), \max_{(y,s) \in \bar{\Sigma}} h(y,s), \right. \\
& \quad \left. \max_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T)). \quad (6)
\end{aligned}$$

Наслідок 3. Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того, $f_1(x,t) \leq f_2(x,t) \forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) \leq h_2(x,t) \forall (x,t) \in \Sigma$, $u_{0,1}(x,t) \leq u_{0,2}(x,t) \forall (x,t) \in \bar{\Omega} \times E_0$. Тоді правильна нерівність $u_1(x,t) \leq u_2(x,t) \forall (x,t) \in Q$.

Введемо потрібні нам далі ще деякі функційні простори. Під $C_{loc}^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C^{2,1}(Q)$ таких, що для будь-яких строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$) та числа $\delta \in (0, T)$ звуження v на $\bar{\Omega}' \times [\delta, T]$ належить простору $C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\bar{\Omega}' \times [\delta, T])$.

Під $C^{\gamma, \gamma/2, 1, 1}(\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ розумітимемо простір неперервних функцій $\tilde{g}(x, t, \xi, \eta)$, $(x, t, \xi, \eta) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ, η та для деякої сталої $L > 0$ (залежної від \tilde{g}) і довільних $(x, t, \xi, \eta), (y, s, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задовольняє нерівність

$$\begin{aligned}
& |\tilde{g}(x, t, \xi, \eta) - \tilde{g}(y, s, \bar{\xi}, \bar{\eta})| \leq \\
& \leq L(|x - y|^\gamma + |t - s|^{\gamma/2} + |\xi - \bar{\xi}| + |\eta - \bar{\eta}|).
\end{aligned}$$

Теорема 2 (існування розв'язку). Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$ і $a_0^- - g_2^+ > 0$. Припустимо, що для деякого $\alpha \in (0, 1]$ маємо

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{B}_1) \partial\Omega \in C^{2+\alpha}, \\
& (\mathcal{B}_2) a_{kl}, a_k, a_0 \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}) \quad (k, l = \overline{1, n}), \\
& g \in C^{\alpha, \alpha/2, 1, 1}(\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), f \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}), \\
& u_0 \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times E_0), h \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Sigma}).
\end{aligned}$$

Крім того, нехай

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{B}_3) \partial a_{kl} / \partial x_s \in C(Q) \quad (k, l, s = \overline{1, n}), \\
& (\mathcal{B}_4) \tau \text{ задовольняє умову Ліпшица.}
\end{aligned}$$

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (1)–(3) і він належить простору $C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$.

2. Допоміжні твердження.

Розглянемо мішану задачу для лінійного параболічного рівняння зі змінним запізненням: знайти функцію $u \in C(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T))) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
& \hat{P}u(x, t) := u_t(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t) u_{x_k x_l}(x, t) + \\
& + \sum_{k=1}^n a_k(x, t) u_{x_k}(x, t) + \hat{a}_0(x, t) u(x, t) - \\
& - \hat{g}(x, t) u(x, t - \tau(t)) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (7)
\end{aligned}$$

крайову умову (2) і початкову умову (3).

Функції $a_{k,l}, a_k$ ($k, l = \overline{1, n}$), f, τ, u_0, h такі, як в умовах $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_3)$, а функції \hat{a}, \hat{g} задовольняють умову

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}_2^*) \hat{a}_0, \hat{g} \in C(Q), \quad \inf_{(x,t) \in Q} \hat{a}_0(x, t) =: \hat{a}_0^- > \\
& -\infty, \quad \sup_{(x,t) \in Q} \hat{g}(x, t) =: \hat{g}^+ < +\infty.
\end{aligned}$$

Лема 1. Нехай $\hat{g} \geq 0$ на Q . Тоді для функцій $u, v \in C(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T))) \cap C^{2,1}(Q)$

таких, що $\widehat{P}u(x,t) < \widehat{P}v(x,t) \forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) < Rv(x,t) \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) < Gv(x,t) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$, правильна нерівність $u(x,t) < v(x,t) \forall (x,t) \in Q$.

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$, $\widetilde{f}(x,t) := \widehat{P}w(x,t) \equiv \widehat{P}u(x,t) - \widehat{P}v(x,t) \forall (x,t) \in Q$, $\widetilde{h}(x,t) := Rw(x,t) \equiv Ru(x,t) - Rv(x,t) \forall (x,t) \in \Sigma$, $\widetilde{u}_0(x,t) := Gw(x,t) \equiv Gu(x,t) - Gv(x,t) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Тоді маємо такі рівності

$$w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^n a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)w(x,t) - \widehat{g}(x,t)w(x,t - \tau(t)) = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (8)$$

$$w(x,t) = \widetilde{h}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad (9)$$

$$w(x,t) = \widetilde{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0, \quad (10)$$

де $\widetilde{f}, \widetilde{h}, \widetilde{u}_0$ – від’ємні функції.

Треба показати, що $w(x,t) < 0 \forall (x,t) \in Q$. Припустимо, що це не так. З нашого припущення і того, що на підставі рівностей (9) і (10) маємо $w(x,t) < 0$ при $(x,t) \in (\overline{\Omega} \times E_0) \cup \Sigma$, впливає існування точки $(x^0, t_0) \in Q$ такої, що $w(x,t) < 0$, коли $(x,t) \in \Omega \times (0, t_0)$, і $w(x, t_0) \leq 0$, коли $x \in \Omega$, та $w(x^0, t_0) = 0$. Очевидно, що $w_t(x^0, t_0) \geq 0$. Врахувавши, що x^0 є точкою локального максимуму функції $x \mapsto w(x, t_0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, маємо: $w_{x_k}(x^0, t_0) = 0$, $\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x^0, t_0)w_{x_k x_l}(x^0, t_0) \leq 0$. Звідси та з рівності (8) одержуємо

$$0 \leq w_t(x^0, t_0) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x^0, t_0)w_{x_k x_l}(x^0, t_0) + \sum_{k=1}^n a_k(x^0, t_0)w_{x_k}(x^0, t_0) + \widehat{a}_0(x^0, t_0)w(x^0, t_0) - \widehat{g}(x^0, t_0)w(x^0, t_0 - \tau(t_0)) = \widetilde{f}(x^0, t_0) < 0.$$

Отримали протиріччя, що доводить наше твердження. \square

Наслідок 4. Нехай $\widehat{g} \geq 0$ на Q і функція $u \in C(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])) \cap C^{2,1}(Q)$ така, що $\widehat{P}u(x,t) < 0 \forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) < 0 \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) < 0 \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Тоді $u(x,t) < 0 \forall (x,t) \in Q$.

Доведення. Дане твердження безпосередньо випливає з леми 1, поклавши функцію v тотожно рівну нулеві. \square

Лема 2. Нехай $\widehat{g} \geq 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > -1$. Тоді для функцій $u, v \in C(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])) \cap C^{2,1}(Q)$ таких, що $\widehat{P}u(x,t) \leq \widehat{P}v(x,t) \forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) \leq Rv(x,t) \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) \leq Gv(x,t) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$, правильна нерівність $u(x,t) \leq v(x,t) \forall (x,t) \in Q$.

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$. З наших припущень випливає, що $\widehat{P}w(x,t) \leq 0 \forall (x,t) \in Q$, $Rw(x,t) \leq 0 \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gw(x,t) \leq 0 \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Введемо в розгляд функцію

$$w^\lambda(x,t) := w(x,t) - \lambda e^t,$$

$(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$, де $\lambda > 0$ – довільне фіксоване число.

Маючи на увазі, що $w(x,t) = w^\lambda(x,t) + \lambda e^t$, отримаємо

$$\begin{aligned} \widehat{P}w(x,t) &:= w_t^\lambda(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}^\lambda(x,t) + \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k(x,t)w_{x_k}^\lambda(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)w^\lambda(x,t) - \\ &- \widehat{g}(x,t)w^\lambda(x,t - \tau(t)) + \lambda e^t(\widehat{a}_0(x,t) - \\ &- \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)} + 1) = \widehat{P}w^\lambda(x,t) + \\ &+ \lambda e^t(\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)} + 1). \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \widehat{P}w^\lambda(x,t) &= \widehat{P}w(x,t) - \lambda e^t(\widehat{a}_0(x,t) - \\ &- \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)} + 1). \end{aligned} \quad (11)$$

В силу умов нашого твердження для будь-якої точки $(x,t) \in Q$ правильна нерівність

$$\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)} + 1 > 0. \quad (12)$$

Справді, маємо

$$\inf_{(x,t) \in Q} (\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}) \geq \inf_{(x,t) \in Q} \widehat{a}_0(x,t) - \sup_{(x,t) \in Q} \widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)} \geq \widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+,$$

оскільки $e^{-\tau(t)} \leq 1$ і $\widehat{g}(x,t) \geq 0$ при $(x,t) \in Q$. Звідси на підставі відповідної умови леми впливає (12). В силу нерівностей $\widehat{P}w(x,t) \leq 0$ і (12) приходимо до висновку, що права частина рівності (11) від'ємна на Q , тобто $\widehat{P}w^\lambda(x,t) < 0 \forall (x,t) \in Q$. Легко бачити, що $Rw^\lambda(x,t) = Rw(x,t) - \lambda e^t < 0 \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gw^\lambda(x,t) = Gw(x,t) - \lambda e^t < 0 \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Звідси на підставі наслідку 4 отримуємо нерівність $w^\lambda(x,t) < 0 \forall (x,t) \in Q$, тобто $w(x,t) < \lambda e^t \forall (x,t) \in Q$. Зафіксувавши в цій нерівності $(x,t) \in Q$ та спрямувавши λ до 0, отримуємо нерівність $w(x,t) \leq 0 \forall (x,t) \in Q$, тобто $u(x,t) \leq v(x,t) \forall (x,t) \in Q$. \square

Твердження 1. Нехай $\widehat{g} \geq 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. Тоді для довільного розв'язку u задачі (7),(2),(3) виконується оцінка

$$\min \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s), \min_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s), \min_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\} \leq u(x,t) \leq \max \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s), \max_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s), \max_{(x,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\}, (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup [0, T]).$$

Доведення. Нехай u – розв'язок задачі (7),(2),(3). Приймемо

$$C_1 := \max \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s), \max_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s), \max_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\} \geq 0.$$

Тоді для функції $v(x,t) = C_1$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$, маємо

$$\widehat{P}v(x,t) = (\widehat{a}(x,t) - \widehat{g}(x,t)) C_1 \geq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+) C_1 \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+) \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y,s) \geq \\ &\geq f(x,t) = \widehat{P}u(x,t), (x,t) \in Q, \\ &Rv(x,t) = C_1 \geq \max_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s) \geq \\ &\geq h(x,t) = Ru(x,t), (x,t) \in \overline{\Sigma}, \\ &Gv(x,t) = C_1 \geq \max_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s) \geq \\ &\geq u_0(x,t) = Gu(x,t), (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0. \end{aligned}$$

Звідси на підставі леми 2 маємо $u(x,t) \leq C_1 \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$.

Тепер покладемо

$$C_2 := \min \left\{ \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s), \min_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s), \min_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s), 0 \right\} \leq 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \widehat{P}v(x,t) &= (\widehat{a}(x,t) - \widehat{g}(x,t)) C_2 \leq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+) C_2 \leq \\ &\leq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+) \frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s) = \\ &= \inf_{(y,s) \in Q} f(y,s) \leq f(x,t) = \widehat{P}u(x,t), (x,t) \in Q, \\ &Rv(x,t) = C_2 \leq \min_{(y,s) \in \overline{\Sigma}} h(y,s) \leq Ru(x,t), \\ &(x,t) \in \overline{\Sigma}, \\ &Gv(x,t) = C_2 \leq \min_{(y,s) \in \overline{\Omega} \times E_0} u_0(y,s) \leq Gu(x,t), \\ &(x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0. \end{aligned}$$

Звідси на підставі леми 2 маємо $u(x,t) \geq C_2 \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$. \square

Лема 3 Для довільних $(x,t) \in Q$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$\begin{aligned} &g(x,t, \xi_1, \eta_1) - g(x,t, \xi_2, \eta_2) = \\ &= (\xi_1 - \xi_2) G_1(x,t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + \\ &+ (\eta_1 - \eta_2) G_2(x,t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \end{aligned}$$

де

$$G_1(x,t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) := \int_0^1 g_\xi(x,t, z(\xi_1 - \xi_2) +$$

$$+ \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz, \quad (14) \quad u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t)), \quad (x, t) \in Q,$$

$$G_2(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) := \int_0^1 g_\eta(x, t, z(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz, \quad (15) \quad \widehat{g}(x, t) := G_2(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))), \quad (x, t) \in Q,$$

причому

$$0 \leq G_i(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \leq g_i(x, t) \quad (i = 1, 2). \quad (16) \quad \widetilde{f}(x, t) := Pu_1(x, t) - Pu_2(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

Доведення. На підставі леми Адамара маємо для будь-яких $(x, t) \in Q$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$

$$g(x, t, \xi_1, \eta_1) - g(x, t, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1 - \xi_2) \times \int_0^1 g_\xi(x, t, z(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz + (\eta_1 - \eta_2) \int_0^1 g_\eta(x, t, z(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2, z(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) dz = (\xi_1 - \xi_2)G_1(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + (\eta_1 - \eta_2)G_2(x, t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2).$$

З умови (\mathcal{A}_2) випливає (16). \square

3. Обґрунтування основних результатів.

Доведення теореми 1. Позначимо $w(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$. Розглядаючи різницю виразів $Pu_1(x, t)$ і $Pu_2(x, t)$ та використовуючи лему 3, отримаємо рівність

$$\widehat{P}w(x, t) := w_t(x, t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t)w_{x_k x_l}(x, t) + \sum_{k=1}^n a_k w_{x_k}(x, t) + \widehat{a}_0(x, t)w(x, t) - \widehat{g}(x, t)w(x, t - \tau(t)) = \widetilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (17)$$

де

$$\widehat{a}_0(x, t) := a_0(x, t) - G_1(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t),$$

$$Ru(x, t) = \widetilde{h}(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (18)$$

$$Gw(x, t) = \widetilde{u}_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times E_0, \quad (19)$$

де

$$\widetilde{h}(x, t) := Ru_1(x, t) - Ru_2(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma,$$

$$\widetilde{u}_0(x, t) := Gu_1(x, t) - Gu_2(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times E_0.$$

Перевіримо виконання умов твердження 1, а точніше, переконаємося, що $\widehat{g} \geq 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. З леми 3 (див. (16)) випливає, що $\widehat{g}(x, t) \geq 0$ для будь-яких $(x, t) \in Q$. Використовуючи умову (\mathcal{A}_2) та лему 3, отримаємо

$$\widehat{a}_0^- := \inf \widehat{a}_0(x, t) = \inf_{(x,t) \in Q} [a_0(x, t) -$$

$$-G_1(x, t, u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)),$$

$$u_2(x, t - \tau(t)))] \geq$$

$$\geq \inf_{(x,t) \in Q} (a_0(x, t) - g_1(x, t)) = a_0^-,$$

$$\widehat{g}^+ := \sup_{(x,t) \in Q} \widehat{g}(x, t) = \sup_{(x,t) \in Q} G_2(x, t,$$

$$u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t - \tau(t)), u_2(x, t - \tau(t))) \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t) \in Q} g_2(x, t) = g_2^+.$$

Так як $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ \geq a_0^- - g_2^+$, а з умови нашого твердження маємо $a_0^- - g_2^+ > 0$, то умови твердження 1 виконуються. Отож, для функції w , яка задовольняє рівності (17) – (19), правильна нерівність типу (13). Звідси випливає оцінка (5). \square

Доведення наслідку 1. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (1)–(3). Тоді з теореми 1 маємо,

що $0 \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in \bar{Q}$, тобто $u_1 = u_2$ на \bar{Q} , а це протирічить нашому припущенню. Отож, наше твердження є правильним. \square

Доведення наслідку 2. Дане твердження безпосередньо випливає з теореми 1, поклавши $u_1 = u$, $u_2 = 0$. \square

Доведення наслідку 3. З умови наслідку маємо, що $a_0^- - g_2^+ > 0$ і $\tilde{f}(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in Q$, $\tilde{h}(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in \Sigma$. З (5) отримуємо $u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in Q$, тобто $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$, $(x, t) \in Q$. \square

Зауваження 1. При виконанні умов $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$, наслідок 3 є правильним і у випадку $g \equiv 0$.

Справді, з умови (\mathcal{A}_1) та того, що $g \equiv 0$, випливає виконання умов наслідку 3, а отже, правильність даного твердження.

Доведення теореми 2. Покладемо

$$C_1 := \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q} f(y, s), \max_{(y,s) \in \Sigma} h(y, s), \max_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y, s), 0\right\}, \quad (20)$$

$$C_2 := \min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s) \in Q} f(y, s), \min_{(y,s) \in \Sigma} h(y, s), \min_{(y,s) \in \bar{\Omega} \times E_0} u_0(y, s), 0\right\}. \quad (21)$$

Визначимо послідовність функцій $\{v_p\}_{p=0}^\infty \subset C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])) \cap C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$ таким чином. Спочатку приймемо $v_0(x, t) = C_1$, $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$. Наступні члени цієї послідовності визначимо так: якщо відома функція v_{p-1} , то функцію v_p знаходимо як розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \tilde{P}v_p(x, t) &\equiv \frac{\partial v_p(x, t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x, t) \frac{\partial v_p(x, t)}{\partial x_k \partial x_l} + \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k(x, t) \frac{\partial v_p(x, t)}{\partial x_k} + a_0(x, t) v_p(x, t) = \\ &= g(x, t, v_{p-1}(x, t), v_{p-1}(x, t - \tau(t))) + \\ &+ f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (22)$$

$$v_p(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (23)$$

$$v_p(x, t) = u_0(x, t), \quad x \in \bar{\Omega} \times E_0. \quad (24)$$

Покажемо, що так визначити послідовність $\{v_p\}$ можна. Нехай p – довільне фіксоване натуральне число. Позначимо

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p(x, t) &:= g(x, t, v_{p-1}(x, t), v_{p-1}(x, t - \tau(t))) + \\ &+ f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}. \end{aligned} \quad (25)$$

Оскільки $v_{p-1} \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T]))$, то з умов (\mathcal{B}_2) , (\mathcal{B}_4) випливає, що $\tilde{f}_p \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q})$. Звідси, а також умов $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$ та $(\mathcal{B}_1) - (\mathcal{B}_3)$, за теоремою 9 монографії [6, ст. 93], функція $v_p \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}) \cap C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$ знаходиться однозначно для кожного $p \in \mathbb{N}$. Використовуючи умову (24) та те, що $u_0 \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times E_0)$, легко переконатися, що функція v_p належить до простору $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])) \cap C_{loc}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$.

Покажемо, що правильні нерівності

$$C_2 \leq v_{p+1}(x, t) \leq v_p(x, t) \leq C_1, \quad (x, t) \in Q, \quad (26)$$

для довільного $p \in \mathbb{N}$, де C_1, C_2 визначені, відповідно, в (20), (21). Для цього використаємо метод математичної індукції. Доведемо спочатку, що $v_1(x, t) \leq v_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$. З означення v_1 маємо

$$v_1(x, t) \leq C_1 = v_0(x, t), \quad x \in \bar{\Omega} \times E_0,$$

$$v_1(x, t) \leq C_1 = v_0(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma.$$

Використовуючи лему 3 та умову (\mathcal{A}_2) , а точніше те, що $g_\xi \geq 0$, $g_\eta \geq 0$, $g(x, t, 0, 0) = 0$, матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{P}v_1(x, t) - \tilde{P}v_0(x, t) &= g(x, t, C_1, C_1) + f(x, t) - \\ &- a_0(x, t)C_1 = f(x, t) - C_1(a_0(x, t) - \\ &- G_1(x, t, C_1, 0, C_1, 0) - G_2(x, t, C_1, 0, C_1, 0)) \leq \\ &\leq f(x, t) - C_1(a_0(x, t) - g_1(x, t) - g_2(x, t)) \leq \\ &\leq f(x, t) - (a_0^- - g_2^+)C_1 = \\ &= f(x, t) - \sup_{(x,t) \in Q} |f(y, s)| \leq 0, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Звідси та із зауваження 1 випливає, що $v_1(x, t) \leq v_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$.

Тепер покажемо, що для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ з нерівності $v_p(x, t) \leq$

$v_{p-1}(x, t), (x, t) \in Q$, випливає нерівність
 $v_{p+1}(x, t) \leq v_p(x, t), (x, t) \in Q$.

Згідно з (23), (24) маємо

$$\begin{aligned} v_{p+1}(x, t) &= v_p(x, t) = u_0(x, t), \quad x \in \bar{\Omega} \times E_0, \\ v_{p+1}(x, t) &= v_p(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma. \end{aligned}$$

На підставі леми 3 легко бачити, що

$$\begin{aligned} &\tilde{P}v_{p+1}(x, t) - \tilde{P}v_p(x, t) = \\ &= g(x, t, v_p(x, t), v_p(x, t - \tau(t))) - \\ &- g(x, t, v_{p-1}(x, t), v_{p-1}(x, t - \tau(t))) = \\ &= G_2(x, t, v_p(x, t), v_{p-1}(x, t), v_p(x, t - \tau(t)), \\ &v_{p-1}(x, t - \tau(t))) \times (v_p(x, t) - v_{p-1}(x, t)) + \\ &+ G_2(x, t, v_p(x, t), v_{p-1}(x, t), v_p(x, t - \tau(t)), \\ &v_{p-1}(x, t - \tau(t))) \times (v_p(x, t - \tau(t)) - \\ &- v_{p-1}(x, t - \tau(t))) \leq 0, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Звідси та із зауваження 1 отримаємо потрібне твердження. Отже, на підставі принципу математичної індукції маємо $v_{p+1}(x, t) \leq v_p(x, t) \leq C_1, (x, t) \in Q$, для довільного $p \in \mathbb{N}$.

Залишилось показати, що $C_2 \leq v_p(x, t), (x, t) \in Q$, для кожного $p \in \mathbb{N}$. Знову використаємо метод математичної індукції. Очевидно, що $C_2 \leq v_0(x, t), (x, t) \in \bar{Q}$. Нехай $C_2 \leq v_{p-1}(x, t), (x, t) \in \bar{Q}$, для деякого $p \in \mathbb{N}$. Доведемо, що тоді $C_2 \leq v_p(x, t), (x, t) \in \bar{Q}$. Покладемо $v_*(x, t) = C_2, (x, t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$. Враховуючи означення C_2 , отримаємо

$$\begin{aligned} v_*(x, t) &= C_2 \leq v_p(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times E_0, \\ v_*(x, t) &= C_2 \leq v_p(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \tilde{P}v_*(x, t) - \tilde{P}v_p(x, t) &= a_0(x, t)C_2 - \\ &- g(x, t, v_{p-1}(x, t), v_{p-1}(x, t - \tau(t))) - \\ &- f(x, t) \leq C_2(a_0(x, t) - g_1(x, t) - g_2(x, t)) - \\ &- f(x, t) \leq (a_0^- - g_2^+)C_2 - f(x, t) = \\ &= \inf_{(x, t) \in \bar{Q}} |f(y, s)| - f(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Звідси на підставі зауваження 1 отримаємо

$$v_*(x, t) \leq v_p(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q},$$

що і потрібно було довести.

Отже, послідовність $\{v_p\}$ – монотонна і обмежена. Звідси випливає, що існує визначена на $\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$ функція u така, що для кожної точки $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T])$ маємо $v_p(x, t) \rightarrow u(x, t)$ при $p \rightarrow \infty$ і u задовольняє умови (2), (3). Покажемо, що u – шуканий розв'язок.

З (22) – (24) та (26) в силу теореми 10.1 монографії [3, ст.238,239] отримаємо

$$\|v_p\|_{\alpha, \alpha/2}^Q \leq C_3, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка не залежить від p . Отже, для довільного фіксованого $\gamma \in (0, \alpha)$ існує підпослідовність послідовності $\{v_p\}_{p=1}^\infty$ (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{v_p\}_{p=1}^\infty$) така, що

$$v_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} u \quad \text{в } C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{Q}). \quad (28)$$

Із властивостей просторів Гельдера отримаємо, що $u \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q})$. Звідси та умов (3), (\mathcal{B}_2) і того, що $u(x, 0) = u_0(x, 0)$ випливає, що $u \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times (E_0 \cup (0, T]))$.

Тепер відмітимо, що з умов $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B}_2) - (\mathcal{B}_4)$ та оцінки (27) маємо

$$\|\tilde{f}_p\|_{\alpha, \alpha/2}^Q \leq C_4 \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від p .

Для довільного $\delta > 0$ позначимо $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta\}$. Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонна послідовність чисел така, що $0 < \delta_k < T, \delta_k \downarrow 0$ і Ω_{δ_k} – область в \mathbb{R}^n . Очевидно, що $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_{\delta_k} = \Omega$. Позначимо $Q_k := \Omega_{\delta_k} \times (\delta_k, T]$. Враховуючи (29) і умови нашої теореми, з теореми 5 монографії [6, ст. 86,87] для кожного $k \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\|v_p\|_{2+\alpha, 1+\alpha/2}^{Q_k} \leq C_5, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка від p не залежить, але залежить від C_3, C_4 , і може залежати від k .

Із (28) та (30) випливає, що для довільного фіксованого $\gamma \in (0, \alpha)$ із послідовності $\{v_p\}$ діагональним методом можна вибрати таку підпослідовність $\{v_{p_j}\}_{j=1}^\infty$, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{v_{p_j|Q_k}\}$ ($v_{p_j|Q_k}$

– звуження v_{p_j} на $\overline{Q_k}$) збігається до u за нормою простору $C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q_k})$. Звідси, зокрема, випливає, що $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q_k})$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, тобто $u \in C_{\text{loc}}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$. Показавши в (22) $p = p_j$ та спрямувавши j до нескінченності, на підставі сказаного вище матимемо, що u задовольняє рівняння (1). Як уже зазначалось, u також задовольняє умови (2), (3), а отже, ця функція є розв'язком задачі (1)-(3). \square

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бокало М., Дмитрів В. Задача Фур'є для різнокомпонентної еволюційної системи рівнянь із інтегральним запізненням // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – **60**. – С. 32-49.
2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971.
3. Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
4. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972.
5. Слюсарчук В.Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем з післядією. – Рівне: УДУВГ, 2003.
6. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. – М.: Мир, 1968.
7. Хусайнов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – **2**. – С. 362-368.
8. Bainov D., Petrov V. Asymptotic Properties of the Nonoscillatory Solutions of Second-Order Neutral Equations with a Deviating Argument // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1995. – **190**. – С. 645-653.
9. Burton T.A., Haddock J.R. On the Delay-Differential Equations $x'(t) + a(t)f(x(t-r(t))) = 0$ and $x''(t) + a(t)f(x(t-r(t))) = 0$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1976. – **54**. – С. 37-48.
10. Culshaw R.V., Shigui R. A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells // Mathematical Biosciences. – 2000. – **165**. – С. 27-39.
11. Dmytriv V.M. On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays // Mat. Stud. – 2001. – **16**. – С. 141-156.
12. Dumrongpokaphan T., Lenbury Y., Ouncharoen R., Xu Y. An Intracellular Delay-Differential Equation Model of the HIV Infection and Immune Control // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2007. – **2**. – С. 75-99.
13. Feng W., Pao C.V., Lu X. Global Attractors of Reaction-Diffusion Systems Modeling Food Chain

Populations with Delays // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2011. – **10**. – С. 1463-1478.

14. Kuang Y., Zhang B., Zhao T. Qualitative Analysis of a Nonautonomous Nonlinear Delay Differential Equation // Tohoku Mathematical Journal. – 1991. – **43**. – С. 509-528.

15. Song X., Cheng Sh. A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells // Journal Korean Mathematical Society. – 2005. – **5**. – С. 1071-1086.

16. Pao C.V. Coupled nonlinear parabolic systems with time delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1995. – **196**. – С. 237-265.

17. Pao C.V. Dynamics of Nonlinear Parabolic Systems with Time Delays // Journal of Mathematical Analysis And Applications. – 1996. – **198**. – С. 751-779.

18. Pao C.V. Systems of Parabolic Equations with Continuous and Discrete Delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1997. – **205**. – С. 157-185.

19. Pao C.V. Time delayed parabolic systems with coupled nonlinear boundary conditions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2001. – **130**. – С. 1079-1086.

20. Wang X., Li Z. Global Attractivity and Oscillations in a Nonlinear Impulsive Parabolic Equation with Delay // Kyungpook Mathematical Journal. – 2008. – **48**. – С. 593-611.

21. Zhihong Zh., Weigao G. Traveling Wavefront Solutions for Reaction-Diffusion Equation with Small Delay // Funkcialaj Ekvacioj. – 2011. – **54**. – С. 225-236.