УДК 517.95

©2015 р. Г.А. Снітко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта двовимірного параболічного рівняння в області, розташування частини межі якої визначається невідомими залежними від часу функціями.

The unique solvability conditions of the inverse problem of finding the minor coefficient in a two-dimensional parabolic equation in the domain for which the location of boundary part is described by the unknown time-dependent functions are established.

Одним із важливих напрямків розвитку теорії диференціальних рівняннь є дослідження обернених задач для рівнянь із частинними похідними. Здебільшого обернені задачі зводяться до відтворення невідомих параметрів математичних моделей таких, як коефіцієнти рівняння, граничні чи початкові значення невідомої функції та ін. Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з відомими межами вивчені достатньо повно. Зокрема, у працях [1]–[5] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції у параболічних рівняннях в областях з відомими межами. Результати досліджень коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь показали, що питання ідентифікації коефіцієнта, який залежав би від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Певним наближенням до вирішення цього питання можна вважати подання коефіцієнта у вигляді добутку двох функцій від різних аргументів, одна з яких відома, а інша підлягає визначенню. У роботі [6] розглянуто задачу одночасного визначення функцій, що залежать від різних аргументів, у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні.

При моделюванні процесів із фазовими переходами виникають задачі з вільними межами, що представляють важливий як і теоретичний, так і практичний інтерес. Поєднавши в одній задачі визначення невідомої межі та знаходження невідомого коефіцієнта рівняння, можна розглядати її як обернену задачу з двома невідомими параметрами. У роботах [7]–[10] вивчено обернені задачі визначення залежних від часу старших коефіцієнтів в одно- та двовимірних параболічних рівняннях в областях з вільними межами. Дослідження обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з невідомими молодшими коефіцієнтами в областях з вільними межами є актуальним.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t), 0 < x_2 < h(t), 0 < t < T\}$, де $l = l(t), h = h(t)$ – невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $c(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = \Delta u + c(t)u + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

за умов

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [0, l(0)] \times [0, h(0)], \tag{2}$$

$$u_{x_1}(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t),$$
$$u_{x_1}(l(t), x_2, t) = \mu_2(x_2, t), \quad (x_2, t) \in [0, h(t)] \times [0, T],$$
$$u_{x_2}(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t),$$

$$u_{x_2}(x_1,h(t),t)=\mu_4(x_1,t), \qquad (3)$$
$$(x_1,t)\in[0,l(t)]\times[0,T],$$
$$\int_0^{l(t)}\int_0^{h(t)} u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_5(t),$$
$$\int_0^{l(t)}\int_0^{h(t)} x_2u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_6(t),$$
$$u(0,0,t)=\mu_7(t), \qquad t\in[0,T]. \qquad (4)$$

Заміною змінних $y_1=\frac{x_1}{l(t)}$, $y_2=\frac{x_2}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(l(t),h(t),c(t),v(y_1,y_2,t))$, де $v(y_1,y_2,t)=u(y_1l(t),y_2h(t),t)$, в області $Q_T=\{(y_1,y_2,t):0<y_1<1, 0<y_2<1, 0<t<T\}$

$$v_t=\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}+\frac{y_1l'(t)}{l(t)}v_{y_1}+$$
$$+\frac{y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}+c(t)v+f(y_1l(t),y_2h(t),t), \qquad (5)$$
$$(y_1,y_2,t)\in Q_T,$$
$$v(y_1,y_2,0)=\varphi(y_1l(0),y_2h(0)), \qquad (6)$$
$$(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1],$$
$$v_{y_1}(0,y_2,t)=l(t)\mu_1(y_2h(t),t),$$
$$v_{y_1}(1,y_2,t)=l(t)\mu_2(y_2h(t),t),$$
$$(y_2,t)\in[0,1]\times[0,T],$$
$$v_{y_2}(y_1,0,t)=h(t)\mu_3(y_1l(t),t),$$
$$v_{y_2}(y_1,1,t)=h(t)\mu_4(y_1l(t),t), \qquad (7)$$
$$(y_1,t)\in[0,1]\times[0,T],$$
$$h(t)l(t)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_5(t), \qquad (8)$$
$$t\in[0,T],$$
$$h^2(t)l(t)\int_0^1\int_0^1 y_2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=$$
$$=\mu_6(t), \quad t\in[0,T], \qquad (9)$$
$$v(0,0,t)=\mu_7(t), \quad t\in[0,T]. \qquad (10)$$

2. Існування розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $f\in C^{2,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\mu_j\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j=3,4$, $\mu_k\in C^1[0,T]$, $k=\overline{5,7}$, $\varphi\in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$;

2) $f(x_1,x_2,t)\geq 0$, $(x_1,x_2,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T]$, $0<\varphi_0\leq\varphi(x_1,x_2)\leq\varphi_1<\infty$, $(x_1,x_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\mu_k(t)>0$, $k=\overline{5,7}$, $t\in[0,T]$;

3) умови узгодження нульового та першого порядків.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0<T_0\leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(l,h,c,v)\in(C^1[0,T_0])^2\times C[0,T_0]\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $l(t)>0$, $h(t)>0$, $t\in[0,T_0]$, задачі (5)–(10).

Доведення. Для доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) зведемо задачу до еквівалентної системи рівнянь відносно невідомих і застосуємо до неї теорему Шаудера про нерухому точку. Позначимо $w_i(y_1,y_2,t)=v_{y_i}(y_1,y_2,t)$, $z_i(y_1,y_2,t)=v_{y_iy_i}(y_1,y_2,t)$, $i=1,2$, $z_3(y_1,y_2,t)=v_{y_1y_2}(y_1,y_2,t)$, $p(t)=l'(t)$, $q(t)=h'(t)$. З умов (8), (9) знаходимо

$$h(t)=\frac{\mu_6(t)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_5(t)\int_0^1\int_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}, \qquad (11)$$
$$t\in[0,T],$$
$$l(t)=\frac{\mu_5^2(t)\int_0^1\int_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_6(t)\left(\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)^2}, \qquad (12)$$
$$t\in[0,T].$$

Прийнявши в (5) $y_1=0, y_2=0$, отримуємо

$$c(t)=\frac{1}{\mu_7(t)}\left(\mu_7'(t)-\frac{z_1(0,0,t)}{l^2(t)}-\frac{z_2(0,0,t)}{h^2(t)}-\right.$$
$$\left.-f(0,0,t)\right),\quad t\in[0,T]. \qquad (13)$$

Продиференціювавши умови (8), (9) за змінною t і використавши (5), одержуємо

$$p(t)=\frac{h(t)F_1(t)-F_2(t)}{h^2(t)\int\limits_0^1(1-y_2)v(1,y_2,t)dy_2}, \qquad (14)$$
$$t\in[0,T],$$

$$q(t)=\left(F_2(t)\int\limits_0^1 v(1,y_2,t)dy_2-h(t)F_1(t)\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^1 y_2v(1,y_2,t)dy_2\right)\left(l(t)\int\limits_0^1 v(y_1,1,t)dy_1\times\right.$$
$$\left.\times h(t)\int\limits_0^1(1-y_2)v(1,y_2,t)dy_2\right)^{-1}, \qquad (15)$$
$$t\in[0,T],$$

де

$$F_1(t)=\mu_5'(t)-h(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2-l(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l(t),t)-$$
$$-\mu_3(y_1l(t),t))dy_1-c(t)\mu_5(t)-$$
$$-l(t)h(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)dy_1dy_2,$$

$$F_2(t)=\mu_6'(t)-h^2(t)\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2-l(t)h(t)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1+$$
$$+l(t)\int\limits_0^1(v(y_1,1,t)-v(y_1,0,t))dy_1-c(t)\mu_6(t)-$$
$$-l(t)h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2f(y_1l(t),y_2h(t),t))dy_1dy_2.$$

За допомогою функції Гріна $G_{22}=G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)$ другої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}$$

розв'язок задачі (5)–(7) подамо у вигляді

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)\times\right.$$
$$\times\frac{\eta_1p(\tau)}{l(\tau)}+\frac{\eta_2q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+v(\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$
$$\left.\times c(\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (16)$$

де

$$G_{ij}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$
$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y_1-\eta_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^i\exp\left(-\frac{(y_1+\eta_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\exp\left(-\frac{(y_2-\eta_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^j\exp\left(-\frac{(y_2+\eta_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right),$$

$$i,j=1,2,\ \theta_1(t)=\int\limits_0^t\frac{d\sigma}{l^2(\sigma)},\ \theta_2(t)=\int\limits_0^t\frac{d\sigma}{h^2(\sigma)},$$

а $v_0(y_1,y_2,t)$ виначається рівністю

$$v_0(y_1,y_2,t)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,0)\times$$

$$\times\varphi(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0))d\eta_1 d\eta_2 -$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_1(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)}d\eta_2 d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_2(\eta_2 h(\tau), \tau)}{l(\tau)}d\eta_2 d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 0, \tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_3(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)}d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, 1, \tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_4(\eta_1 l(\tau), \tau)}{h(\tau)}d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\times$$

$$\times f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau)d\eta_1 d\eta_2 d\tau.$$

Врахувавши властивості функції Гріна

$$-G_{22\tau} = \frac{1}{l^2(\tau)}G_{22\eta_1\eta_1} + \frac{1}{h^2(\tau)}G_{22\eta_2\eta_2},$$

$$G_{22y_1} = -G_{12\eta_1}, \quad G_{22y_2} = -G_{21\eta_2},$$

продиференціємо (16) за змінними y_1, y_2

$$z_1(y_1, y_2, t) = v_{0y_1y_1}(y_1, y_2, t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{12y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\bigg(\frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times z_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}z_3(\eta_1, \eta_2, \tau)+$$

$$+\bigg(c(\tau) + \frac{p(\tau)}{l(\tau)}\bigg)w_1(\eta_1, \eta_2, \tau)\bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (17)$$

$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T,$$

$$z_2(y_1, y_2, t) = v_{0y_2y_2}(y_1, y_2, t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{21y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\bigg(\frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times z_3(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}z_2(\eta_1, \eta_2, \tau)+$$

$$+\bigg(c(\tau) + \frac{q(\tau)}{h(\tau)}\bigg)w_2(\eta_1, \eta_2, \tau)\bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (18)$$

$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T,$$

$$z_3(y_1, y_2, t) = v_{0y_1y_2}(y_1, y_2, t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{12y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\bigg(\frac{\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times z_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \frac{\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}z_3(\eta_1, \eta_2, \tau)+$$

$$+\bigg(c(\tau) + \frac{p(\tau)}{l(\tau)}\bigg)w_1(\eta_1, \eta_2, \tau)\bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (19)$$

$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T,$$

де $v_{0y_1y_1}(y_1, y_2, t)$, $v_{0y_2y_2}(y_1, y_2, t)$, $v_{0y_1y_2}(y_1, y_2, t)$ мають вигляд

$$v_{0y_1y_1}(y_1, y_2, t) =$$

$$= l^2(0)\int_0^1\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, 0)\times$$

$$\times\varphi_{\eta_1\eta_1}(\eta_1 l(0), \eta_2 h(0))d\eta_1 d\eta_2+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 0, \eta_2, \tau)\times$$

$$\times(l(\tau)(\mu_{1x_2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) - \mu_{1\tau}(\eta_2 h(\tau), \tau)-$$

$$-\eta_2 q(\tau)\mu_{1x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) + f_{x_1}(0, \eta_2 h(\tau), \tau))-$$

$$-p(\tau)\mu_1(\eta_2 h(\tau), \tau))d\eta_2 d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{22}(y_1, y_2, t, 1, \eta_2, \tau)\times$$

$$\times(l(\tau)(\mu_{2\tau}(\eta_2 h(\tau), \tau) - \mu_{2x_2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau)+$$

$$+\eta_2 q(\tau)\mu_{2x_2}(\eta_2 h(\tau), \tau) - f_{x_1}(l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau))+$$

$$+p(\tau)\mu_2(\eta_2 h(\tau), \tau))d\eta_2 d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{l^2(\tau)}{h(\tau)}\mu_{3x_1x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times\frac{l^2(\tau)}{h(\tau)}\mu_{4x_1x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times l^2(\tau)f_{x_1x_1}(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,$$

$$v_{0y_2y_2}(y_1,y_2,t)=$$

$$=h^2(0)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,0)\times$$

$$\times\varphi_{\eta_2\eta_2}(\eta_1 l(0),\eta_2 h(0))d\eta_1 d\eta_2-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{h^2(\tau)}{l(\tau)}\mu_{1x_2x_2}(\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_2 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{h^2(\tau)}{l(\tau)}\mu_{2x_2x_2}(\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_2 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$

$$\times(h(\tau)(\mu_{3x_1x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)-\mu_{3\tau}(\eta_1 l(\tau),\tau)-$$

$$-\eta_1 p(\tau)\mu_{3x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)+f_{x_2}(\eta_1 l(\tau),0,\tau))-$$

$$-q(\tau)\mu_3(\eta_1 l(\tau),\tau))d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times(h(\tau)(\mu_{4\tau}(\eta_1 l(\tau),\tau)-\mu_{4x_1x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)+$$

$$+\eta_1 p(\tau)\mu_{4x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)-f_{x_2}(\eta_1 l(\tau),h(\tau),\tau))+$$

$$+q(\tau)\mu_4(\eta_1 l(\tau),\tau))d\eta_1 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times h^2(\tau)f_{x_2x_2}(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,$$

$$v_{0y_1y_2}(y_1,y_2,t)=$$

$$=l(0)h(0)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,0)\times$$

$$\times\varphi_{\eta_1\eta_2}(\eta_1 l(0),\eta_2 h(0))d\eta_1 d\eta_2+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\eta_1}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{h(\tau)}{l(\tau)}\mu_{1x_2}(\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_2 d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\eta_1}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{h(\tau)}{l(\tau)}\mu_{2x_2}(\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_2 d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\eta_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{l(\tau)}{h(\tau)}\mu_{3x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)d\eta_1 d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\eta_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times\frac{l(\tau)}{h(\tau)}\mu_{4x_1}(\eta_1 l(\tau),\tau)d\eta_1 d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times l(\tau)h(\tau)f_{x_1x_2}(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)d\eta_1 d\eta_2 d\tau.$$

Таким чином, підставивши рівності

$$w_1(y_1,y_2,t)=l(t)\mu_1(y_2 h(t),t)+\int\limits_0^{y_1} z_1(\xi,y_2,t)d\xi,$$

$$w_2(y_1,y_2,t)=h(t)\mu_3(y_1l(t),t)+\int\limits_0^{y_2} z_2(y_1,\xi,t)d\xi$$

в (16)–(19), одержуємо систему рівнянь (11)–(19) відносно невідомих $(h(t),l(t),c(t),p(t),q(t),v(y_1,y_2,t),z_1(y_1,y_2,t),$ $z_2(y_1,y_2,t),z_3(y_1,y_2,t))$. Якщо $(l,h,c,v)\in(C^1[0,T])^2\times C[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(h,l,c,p,q,v,z_1,z_2,z_3)\in(C[0,T])^5\times(C(\overline{Q}_T))^4$ є розв'язком системи рівнянь (11)–(19). Правильним є і обернене твердження.

Нехай $(h,l,c,p,q,v,z_1,z_2,z_3)$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (11)–(19). Продиференціюємо (16) за змінними y_1,y_2. Праві частини отриманих рівностей та рівностей (17)–(19) співпадають, тому можемо зробити висновок, що $z_i(y_1,y_2,t)=v_{y_iy_i}(y_1,y_2,t)$, $i=1,2$, $z_3(y_1,y_2,t)=v_{y_1y_2}(y_1,y_2,t)$. Отже, функція $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}+\frac{y_1p(t)}{l(t)}v_{y_1}+$$
$$+\frac{y_2q(t)}{h(t)}v_{y_2}+c(t)v+f(y_1l(t),y_2h(t),t),\quad (20)$$
$$(y_1,y_2,t)\in Q_T,$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $c(t),h(t),p(t),q(t)$. Приймемо в (20) $y_1=0,y_2=0$. Віднявши від отриманої рівності (13), одержуємо умову (10). З рівностей (11), (12) випливають умови (8), (9). Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати (11), (12) за t. Використавши те, що функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (20), та віднявши від отриманих рівностей (14), (15), одержуємо

$$\mu_5(t)((p(t)-l'(t))h(t)+(q(t)-h'(t))l(t))=0,$$
$$\mu_6(t)((p(t)-l'(t))h(t)+2(q(t)-h'(t))l(t))=0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t)=l'(t)$, $q(t)=h'(t)$, $l,h\in(C^1[0,T])^2$, функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (5).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (11)–(19) у вище зазначеному сенсі доведено.

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (11)–(19). Визначимо значення невідомих функцій $l(t),h(t)$ у початковий момент часу. З умов (2),(4) отримуємо

$$\int\limits_0^{l_0}\int\limits_0^{h_0}\varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1=\mu_5(0),$$
$$\int\limits_0^{l_0}\int\limits_0^{h_0}x_2\varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1=\mu_6(0),\qquad (21)$$

$l_0=l(0),\ h_0=h(0)$. Позначивши

$$\int\limits_0^{l_0}\varphi(x_1,x_2)dx_1=\psi(l_0,x_2),$$

систему (21) подамо у вигляді

$$\int\limits_0^{h_0}\psi(l_0,x_2)dx_2=\mu_5(0),$$
$$\int\limits_0^{h_0}x_2\psi(l_0,x_2)dx_2=\mu_6(0).$$

Згідно з припущеннями теореми

$$l_0\varphi_0\le\psi(l_0,x_2)\le l_0\varphi_1.$$

Тоді

$$l_0h_0\varphi_0\le\int\limits_0^{h_0}\psi(l_0,x_2)dx_2\le l_0h_0\varphi_1.$$

Фукнція $y=\int\limits_0^{h_0}\psi(l_0,x_2)dx_2$ при довільному фіксованому $l_0>0$ монотонно зростаюча стосовно h_0. Таким чином, існує єдине значення $h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^{h_0(l_0)}\psi(l_0,x_2)dx_2=\mu_5(0).$$

Тоді

$$\frac{\mu_5(0)}{l_0\varphi_1}\le h_0(l_0)\le\frac{\mu_5(0)}{l_0\varphi_0},$$

$$\frac{\varphi_0\mu_5^2(0)}{2l_0\varphi_1^2} \le \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2\psi(l_0,x_2)dx_2 \le \frac{\varphi_1\mu_5^2(0)}{2l_0\varphi_0^2}.$$

Фукнція $y = \int\limits_0^{h_0} x_2\psi(l_0,x_2)dx_2$ монотонно спадна функція змінної l_0, яка перетне пряму $y=\mu_6(0)$ тільки в одній точці. Таким чином, існує єдиний розв'язок l_0, h_0 системи (21).

З (16) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0<t_1\le T$, що

$$v(y_1,y_2,t) \ge \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \qquad (22)$$

$$(y_1,y_2,t)\in \overline{Q}_{t_1}.$$

Очевидно, що виконання умови (22) рівносильне виконанню нерівності

$$\Bigg| -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_1(\eta_2h(\tau),\tau)}{l(\tau)}d\eta_2d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_2(\eta_2h(\tau),\tau)}{l(\tau)}d\eta_2d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_3(\eta_1l(\tau),\tau)}{h(\tau)}d\eta_1d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times\frac{\mu_4(\eta_1l(\tau),\tau)}{h(\tau)}d\eta_1d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{\eta_1p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\frac{\eta_2q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(\tau)v(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1l(\tau),\eta_2h(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1d\eta_2d\tau\Bigg| \le M_0, \quad (23)$$

$$(y_1,y_2,t)\in \overline{Q}_{t_1}.$$

Врахувавши (23), з (16) одержуємо

$$v(y_1,y_2,t)\le \varphi_1+M_0\equiv M_1<\infty, \qquad (24)$$

$$(y_1,y_2,t)\in \overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді для розв'язків рівняннь (11), (12) справедливі нерівності

$$0<H_0\le h(t)\le H_1<\infty,$$

$$0<L_0\le l(t)\le L_1<\infty, \quad t\in[0,t_1]. \quad (25)$$

Позначимо $Z_i(t) = \max\limits_{(y_1,y_2)\in([0,1])^2}|z_i(y_1,y_2,t)|$, $i=\overline{1,3}$. З (13)–(15), врахувавши (22), (24), (25) одержуємо

$$|c(t)|\le C_1+C_2Z_1(t)+C_3Z_2(t),$$

$$|p(t)|\le C_4+C_5Z_1(t)+C_6Z_2(t),$$

$$|q(t)|\le C_7+C_8Z_1(t)+C_9Z_2(t), \qquad (26)$$

$$t\in[0,t_1].$$

Використавши (25), (26) та оцінки функції Гріна [11], з (17)–(19) отримуємо

$$Z_1(t)\le C_{10}+C_{11}\int\limits_0^t(1+Z_1(\tau)+Z_2(\tau)+Z_3(\tau)+$$

$$+Z_1(\tau)Z_2(\tau)+Z_1(\tau)Z_3(\tau)+Z_2(\tau)Z_3(\tau)+$$

$$+Z_1^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,t_1],$$

$$Z_2(t)\le C_{12}+C_{13}\int\limits_0^t(1+Z_1(\tau)+Z_2(\tau)+Z_3(\tau)+$$

$$+Z_1(\tau)Z_2(\tau)+Z_1(\tau)Z_3(\tau)+Z_2(\tau)Z_3(\tau)+$$

$$+Z_2^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,t_1],$$

$$Z_3(t) \le C_{14}+C_{15}\int_0^t (1+Z_1(\tau)+Z_2(\tau)+Z_3(\tau)+$$
$$+Z_1(\tau)Z_2(\tau)+Z_1(\tau)Z_3(\tau)+Z_2(\tau)Z_3(\tau)+$$
$$+Z_1^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,t_1].$$

Звідси для функції $R(t)=R_1(t)+R_2(t)+R_3(t)$, де $R_i(t)=1+Z_i(t), i=\overline{1,3}$, одержуємо нерівність

$$R(t)\le C_{16}+C_{17}\int_0^t \frac{R(\tau)+R^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\ t\in[0,t_1].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [12]. Звідси отримуємо оцінку

$$R(t)\le M_2<\infty, \quad t\in[0,T_0],$$

де M_2 і $T_0, 0<T_0\le t_1$, визначаються відомими величинами. Тоді

$$|z_1(y_1,y_2,t)|\le M_2, \quad |z_2(y_1,y_2,t)|\le M_2,$$
$$|z_3(y_1,y_2,t)|\le M_2, \quad |c(t)|\le B_1<\infty,$$
$$|p(t)|\le B_2<\infty,\ |q(t)|\le B_3<\infty,\ t\in[0,T_0].$$

Подамо систему рівнянь (11)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

$\omega = (h(t),l(t),c(t),p(t),q(t),v(y_1,y_2,t), z_1(y_1,y_2,t),z_2(y_1,y_2,t),z_3(y_1,y_2,t))$, а оператор $P=(P_1,\ldots,P_9)$ визначається правими частинами рівнянь (11)–(19). Позначимо $N=\{(h,l,c,p,q,v,z_1,z_2,z_3)\in(C[0,T_0])^5\times(C(\overline{Q}_{T_0}))^4:\ H_0\le h(t)\le H_1,\ L_0\le l(t)\le L_1,\ |c(t)|\le B_1,\ |p(t)|\le B_2,\ |q(t)|\le B_3,\ M_0\le v(y_1,y_2,t)\le M_1,\ |z_1(y_1,y_2,t)|\le M_2,\ |z_2(y_1,y_2,t)|\le M_2,\ |z_3(y_1,y_2,t)|\le M_2\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як у [12].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (11)–(19), а, отже, існує розв'язок задачі (5)–(10) при $(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{T_0}$.

3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\mu_i\in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\mu_j\in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j=3,4$;
2) $0<\varphi_0\le\varphi(x_1,x_2)\le\varphi_1<\infty$, $(x_1,x_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\mu_i(t)>0$, $i=5,6$, $\mu_7(t)\ne0$, $t\in[0,T]$.

Тоді задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків $(l,h,c,v)\in(C^1[0,t_1])^2\times C[0,t_1]\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$, $l(t)>0$, $h(t)>0$, $t\in[0,t_1]$, *де* t_1, $0<t_1\le T$, *визначається вихідними даними.*

Доведення. Припустимо, що $(l_i(t),h_i(t),c_i(t),v_i(y_1,y_2,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{l_i'(t)}{l_i(t)}=p_i(t), \quad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=q_i(t), \quad i=1,2,$$
$$p(t)=p_1(t)-p_2(t), \quad q(t)=q_1(t)-q_2(t),$$
$$c(t)=c_1(t)-c_2(t),$$
$$v(y_1,y_2,t)=v_1(y_1,y_2,t)-v_2(y_1,y_2,t).$$

Функції $p(t),q(t),c(t),v(y_1,y_2,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t=\frac{1}{l_1^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h_1^2(t)}v_{y_2y_2}+y_1p_1(t)v_{y_1}+$$
$$+y_2q_1(t)v_{y_2}+c_1(t)v+\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)v_{2y_1y_1}+$$
$$+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)v_{2y_2y_2}+y_1p(t)v_{2y_1}+$$
$$+y_2q(t)v_{2y_2}+c(t)v_2+f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-$$
$$-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t),\ (y_1,y_2,t)\in Q_T, \quad (27)$$

та умови

$$v(y_1,y_2,0)=0, \quad (28)$$
$$(y_1,y_2)\in[0,l(0)]\times[0,h(0)],$$
$$v_{y_1}(0,y_2,t)=l_1(t)\mu_1(y_2h_1(t),t)-$$
$$-l_2(t)\mu_1(y_2h_2(t),t),$$
$$v_{y_1}(1,y_2,t)=l_1(t)\mu_2(y_2h_1(t),t)-$$
$$-l_2(t)\mu_2(y_2h_2(t),t),$$

$$v_{y_2}(y_1,0,t)=h_1(t)\mu_3(y_1l_1(t),t)-$$
$$-h_2(t)\mu_3(y_1l_2(t),t),$$
$$v_{y_2}(y_1,1,t)=h_1(t)\mu_4(y_1l_1(t),t)-$$
$$-h_2(t)\mu_4(y_1l_2(t),t), \qquad (29)$$
$$(y_1,y_2,t)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,T],$$
$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=$$
$$=\mu_5(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right),$$
$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=$$
$$=\mu_6(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}\right),$$
$$v(0,0,t)=0,\quad t\in[0,T]. \qquad (30)$$

Задача (27)–(29) еквівалентна рівнянню

$$v(y_1,y_2,t)=\tilde v_0(y_1,y_2,t)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)(\eta_1p_1(\tau)\times$$
$$\times v_{\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\eta_2q_1(\tau)v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c_1(\tau)\times$$
$$\times v(\eta_1,\eta_2,\tau))d\eta_1d\eta_2d\tau,\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \quad (31)$$

де $\tilde G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)$ – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{1}{l_1^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h_1^2(t)}v_{y_2y_2},$$

а $\tilde v_0(y_1,y_2,t)$ визначається рівністю

$$\tilde v_0(y_1,y_2,t)=-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$
$$\times(l_1(\tau)\mu_1(\eta_2h_1(\tau),\tau)-l_2(\tau)\mu_1(\eta_2h_2(\tau),\tau))\times$$
$$\times\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)\times$$
$$\times(l_1(\tau)\mu_2(\eta_2h_1(\tau),\tau)-l_2(\tau)\mu_2(\eta_2h_2(\tau),\tau))\times$$
$$\times\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$
$$\times(h_1(\tau)\mu_3(\eta_1l_1(\tau),\tau)-h_2(\tau)\mu_3(\eta_1l_2(\tau),\tau))\times$$
$$\times\frac{1}{h_1^2(\tau)}d\eta_1d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$
$$\times(h_1(\tau)\mu_4(\eta_1l_1(\tau),\tau)-h_2(\tau)\mu_4(\eta_1l_2(\tau),\tau))\times$$
$$\times\frac{1}{h_1^2(\tau)}d\eta_1d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde G_{22}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+\eta_1p(\tau)v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(t)v_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+\eta_2q(\tau)v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1l_1(\tau),\eta_2h_1(\tau),\tau)-$$
$$\left.-f(\eta_1l_2(\tau),\eta_2h_2(\tau),\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau.$$

Оскільки для $c_i(t),p_i(t),q_i(t),i=1,2,$ справджуються рівності, аналогічні до (13)–(15), то звідси отримуємо

$$p(t)\int\limits_0^1 v_2(1,y_2,t)dy_2+q(t)\int\limits_0^1 v_2(y_1,1,t)dy_1+$$
$$+\frac{\mu_5(t)c(t)}{l_1(t)h_1(t)}=-p_1(t)\int\limits_0^1 v(1,y_2,t)dy_2-$$
$$-q_1(t)\int\limits_0^1 v(y_1,1,t)dy_1+\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\mu_5'(t)}{l_1(t)}-\frac{c_2(t)\mu_5(t)}{l_1(t)}-\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_2(t),t)-\right.$$
$$\left.-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1\right)+\left(\frac{1}{l_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\mu_5'(t)}{h_2(t)}-\frac{c_2(t)\mu_5(t)}{h_2(t)}-\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\right.$$

$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\Big) - \frac{1}{l_1(t)}\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-$$

$$-\mu_2(y_2h_2(t),t) - \mu_1(y_2h_1(t),t)+$$

$$+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2 - \frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_1(t),t)-$$

$$-\mu_4(y_1l_2(t),t) - \mu_3(y_1l_1(t),t)+$$

$$+\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1 - \int\limits_0^1\int\limits_0^1(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-$$

$$-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2,\ t\in[0,T],\quad (32)$$

$$p(t)\int\limits_0^1(1-y_2)v_2(1,y_2,t)dy_2 + \frac{c(t)}{l_1(t)h_1^2(t)}\times$$

$$\times(h_1(t)\mu_5(t)-\mu_6(t)) = -\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1(v(y_1,1,t)-$$

$$-v(y_1,0,t))dy_1 - p_1(t)\int\limits_0^1(1-y_2)v(1,y_2,t)dy_2+$$

$$+\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\left(\frac{\mu_5'(t)}{l_1(t)} - \frac{c_2(t)\mu_5(t)}{l_1(t)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\mu_3(y_1l_2(t),t)dy_1\right) - \left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\mu_6'(t)}{l_1(t)} - \frac{c_2(t)\mu_6(t)}{l_1(t)} + \int\limits_0^1(v_2(y_1,1,t)-\right.$$

$$\left.-v_2(y_1,0,t))dy_1\right) + \left(\frac{1}{l_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)}\right)\left(\frac{1}{h_2^2(t)}\times\right.$$

$$\times(\mu_5'(t)h_2(t)-\mu_6'(t)) - \frac{c_2(t)}{h_2^2(t)}(\mu_5(t)h_2(t)-$$

$$-\mu_6(t)) - \int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$

$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\Big) - \frac{1}{l_1(t)}\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$

$$-\mu_1(y_2h_1(t),t)+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+$$

$$+\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1(\mu_3(y_1l_1(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-$$

$$-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2,\ t\in[0,T],\quad (33)$$

$$c(t) = -\frac{1}{\mu_7(t)}\left(\frac{v_{y_1y_1}(0,0,t)}{l_1^2(t)} + v_{2y_1y_1}(0,0,t)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)+\frac{v_{y_2y_2}(0,0,t)}{h_1^2(t)}+v_{2y_2y_2}(0,0,t)\times$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\right),\quad t\in[0,T].\qquad (34)$$

Зауважимо, що для $v_i(y_1,y_2,t)$, $i=1,2$, виконується нерівність (22). Тоді

$$\int\limits_0^1 v_2(1,y_2,t)dy_2\neq 0,\ \int\limits_0^1 y_2v_2(1,y_2,t)dy_2\neq 0,$$

$$\int\limits_0^1 v_2(y_1,1,t)dy_1\neq 0,\ t\in[0,t_1].$$

Продиференціювавши (31) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t) = \tilde{v}_{0y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1\tilde{G}_{22y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)(\eta_1p_1(\tau)\times$$

$$\times v_{\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\eta_2q_1(\tau)v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c_1(\tau)\times$$

$$\times v(\eta_1,\eta_2,\tau))d\eta_1d\eta_2d\tau,\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T,\quad (35)$$

$$v_{y_2}(y_1,y_2,t) = \tilde{v}_{0y_2}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1\tilde{G}_{22y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)(\eta_1p_1(\tau)\times$$

$$\times v_{\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\eta_2q_1(\tau)v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c_1(\tau)\times$$

$$\times v(\eta_1,\eta_2,\tau))d\eta_1d\eta_2d\tau,\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T,\quad (36)$$

$$\tilde{v}_{0y_1}(y_1,y_2,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1\tilde{G}_{12\eta_1}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times(l_1(\tau)\mu_1(\eta_2h_1(\tau),\tau)-l_2(\tau)\mu_1(\eta_2h_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau-\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{12\eta_1}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times(l_1(\tau)\mu_2(\eta_2h_1(\tau),\tau)-l_2(\tau)\mu_2(\eta_2h_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau-\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{12}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\frac{1}{h_1^2(\tau)}\times$$

$$\times(l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{3x_1}(\eta_1l_1(\tau),\tau)-\mu_{3x_1}(\eta_1l_2(\tau),\tau)\times$$

$$\times l_2(\tau)h_2(\tau))d\eta_1d\tau+\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{12}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times\frac{1}{h_1^2(\tau)}(l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{4x_1}(\eta_1l_1(\tau),\tau)-$$

$$-l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{4x_1}(\eta_1l_2(\tau),\tau))d\eta_1d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1\tilde{G}_{22y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\eta_1p(\tau)v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(t)v_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\eta_2q(\tau)v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1l_1(\tau),\eta_2h_1(\tau),\tau)-$$

$$\left.-f(\eta_1l_2(\tau),\eta_2h_2(\tau),\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau,$$

$$\tilde{v}_{0y_2}(y_1,y_2,t)=-\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{21}(y_1,y_2,t,0,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times(l_1(\tau)h_1(\tau)\mu_{1x_2}(\eta_2h_1(\tau),\tau)-$$

$$-l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{1x_2}(\eta_2h_2(\tau),\tau))\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{21}(y_1,y_2,t,1,\eta_2,\tau)(\mu_{2x_2}(\eta_2h_1(\tau),\tau)\times$$

$$\times l_1(\tau)h_1(\tau)-l_2(\tau)h_2(\tau)\mu_{2x_2}(\eta_2h_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{l_1^2(\tau)}d\eta_2d\tau+\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{21\eta_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,0,\tau)\times$$

$$\times(h_1(\tau)\mu_3(\eta_1l_1(\tau),\tau)-h_2(\tau)\mu_3(\eta_1l_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{h_1^2(\tau)}d\eta_1d\tau-\int_0^t\int_0^1\tilde{G}_{21\eta_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,1,\tau)\times$$

$$\times(h_1(\tau)\mu_4(\eta_1l_1(\tau),\tau)-h_2(\tau)\mu_4(\eta_1l_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{h_1^2(\tau)}d\eta_1d\tau+\int_0^t\int_0^1\int_0^1\tilde{G}_{22y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\eta_1p(\tau)v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(t)v_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\eta_2q(\tau)v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1l_1(\tau),\eta_2h_1(\tau),\tau)-$$

$$\left.-f(\eta_1l_2(\tau),\eta_2h_2(\tau),\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau.$$

Виразимо $l_i(t),h_i(t)$ через $p_i(t)$, $q_i(t)$

$$l_i(t)=l_i(0)\exp\left(\int_0^t p_i(\tau)d\tau\right),$$

$$h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau)d\tau\right),\ i=1,2,$$

де $l_1(0)=l_2(0)=l_0$, $h_1(0)=h_2(0)=h_0$. Звідси, використавши рівності

$$e^x-e^y=(x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

$$f(yh_1(t))-f(yh_2(t))=y(h_1(t)-h_2(t))\times$$

$$\times\int_0^1 f_y(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,$$

отримуємо

$$\frac{1}{l_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)}=$$

$$=-\frac{1}{l_0}\int_0^t p(\tau)d\tau\int_0^1\exp\Big(-\int_0^t(\sigma p(\tau)+$$

$$+p_2(\tau))d\tau\Big)d\sigma,$$

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=$$

$$=-\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t q(\tau)d\tau\int\limits_0^1 \exp\Big(-\int\limits_0^t(\sigma q(\tau)+$$

$$+q_2(\tau))d\tau\Big)d\sigma,$$

$$\mu_i(y_2h_1(t),t)-\mu_i(y_2h_2(t),t)=$$

$$=y_2(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 \mu_{ix_2}(y_2(h_2(t)+$$

$$+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,\ i=1,2,$$

$$\mu_j(y_1l_1(t),t)-\mu_j(y_1l_2(t),t)=$$

$$=y_1(l_1(t)-l_2(t))\int\limits_0^1 \mu_{jx_1}(y_1(l_2(t)+$$

$$+\sigma(l_1(t)-l_2(t))),t)d\sigma,\ j=3,4. \qquad (37)$$

Продиференціювавши (35), (36) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$v_{y_1y_1}(y_1,y_2,t)=\tilde{v}_{0y_1y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde{G}_{22y_1y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)(\eta_1p_1(\tau)\times$$

$$\times v_{\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\eta_2q_1(\tau)v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c_1(\tau)\times$$

$$\times v(\eta_1,\eta_2,\tau))d\eta_1d\eta_2d\tau,\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \quad (38)$$

$$v_{y_2y_2}(y_1,y_2,t)=\tilde{v}_{0y_2y_2}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde{G}_{22y_2y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)(\eta_1p_1(\tau)\times$$

$$\times v_{\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\eta_2q_1(\tau)v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c_1(\tau)\times$$

$$\times v(\eta_1,\eta_2,\tau))d\eta_1d\eta_2d\tau,\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \quad (39)$$

Підставивши (38), (39) в (32)–(34) і використавши (37), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (31)–(36) відносно невідомих $(v(y_1,y_2,t),c(t),p(t),q(t),v_{y_1}(y_1,y_2,t),$ $v_{y_2}(y_1,y_2,t))$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З властивостей розв'язків таких систем випливає, що система має тільки тривіальний розв'язок.

Отже, $l_1(t)=l_2(t)$, $h_1(t)=h_2(t)$, $c_1(t)=c_2(t)$, $v_1(y_1,y_2,t)=v_2(y_1,y_2,t)$, $(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_1}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Cannon J.R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**, № 2. – P. 149–163.

2. *Мамаюсупов О.Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям (Фрунзе). – 1989. – Вып. 22. – С. 157–160.

3. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.

4. *Koval'chuk S.M.* Determination of the coefficient of thermal conductivity and heat capacity per unit volume in a multilayer medium // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, № 2. – P. 2042–2047.

5. *Пабирівська Н.В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. – **43**, № 1. – С. 51–58.

6. *Саватеев Е.Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа // Докл. РАН. – 1994. – **334**, № 5. – С. 562–563.

7. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

8. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.

9. *Баранська І.Є.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2.– С. 17–28.

10 . *Баранська І.Є., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457–484.

11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)