

ПОТОЧКОВІ ГРАНИЦІ НЕПЕРЕРВНИХ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ ТА ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Доведено аналог теореми Гана про проміжну функцію для зростаючих функцій і з допомогою нього з'ясовано, що кожна зростаюча функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є поточною границею послідовності неперервних зростаючих функцій $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

An analog of Hahn's insertion theorem is proven. With its help we obtain that every increasing function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is the pointwise limit of a sequence of increasing continuous functions $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Вступ. Рене Бер [1, 2] ввів класифікацію розривних дійснозначних функцій дійсної змінної, яка потім була перенесена на відображення $f : X \rightarrow Y$ між довільними топологічними просторами X і Y . При цьому функціями нульового класу Бера вважаються неперервні відображення, сукупність яких позначається символами $C(X, Y) = B_0(X, Y)$. Функція $f : X \rightarrow Y$ належить до першого класу Бера, якщо існує така послідовність неперервних функцій $f_n : X \rightarrow Y$, що $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для кожного $x \in X$, тобто f є поточною границею послідовності неперервних функцій f_n . Сукупність всіх відображень $f : X \rightarrow Y$ першого класу Бера позначається символом $B_1(X, Y)$, а якщо $Y = \mathbb{R}$ – це числова пряма, то покладають $B_1(X, \mathbb{R}) = B_1(X)$, і так само $C(X, \mathbb{R}) = C(X)$. Якщо $X = [a, b]$ – це відрізок числової прямої, то для скорочення запису пишуть $C[a, b]$ замість $C([a, b])$ і $B_1[a, b]$ замість $B_1([a, b])$.

В теорії функцій і функціональному аналізі часто використовується клас $V[a, b]$ функцій $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмеженої варіації [3, с.86]. Нехай $V_0[a, b] = V[a, b] \cap C[a, b]$ і $V_1[a, b]$ – це сукупність функцій $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, які є поточковими границями послідовностей функцій f_n з $V_0[a, b]$. Зрозуміло, що $V_1[a, b] \subseteq B_1[a, b]$. Виникає природне питання: чи має місце рівність: $V_1[a, b] = B_1[a, b]$? Використовуючи теорему Вейерштрасса про рівномірне наближення неперервної функції

на $[a, b]$ многочленами, неважко переконатися в тому, що відповідь на це питання ствердна (Теорема 2).

Функції обмеженої варіації на $[a, b]$ пов'язані з монотонними функціями. А саме, $f \in V[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли існують такі зростаючі функції $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $f = g - h$. Позначимо символом $M^+[a, b]$ множину всіх зростаючих (в нестрогому розумінні) функцій $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Нехай $M_0^+[a, b] = M^+[a, b] \cap C[a, b]$ і $M_1^+[a, b]$ – це сукупність усіх поточкових границь послідовностей функцій $(f_n)_{n=1}^\infty$ з $M_0^+[a, b]$. Зрозуміло, що $M_1^+[a, b] \subseteq M^+[a, b]$. Але чи має тут місце рівність? Тут ми дамо ствердну відповідь і на це питання, використовуючи відкритий нами аналог відомої теореми Гана про напівнеперервні функції (теорема 3). Так само ми розглядаємо класи $M^-[a, b]$, $M_0^-[a, b]$ і $M_1^-[a, b]$, де замість зростаючих функцій беруться спадні, і класи $M[a, b]$, $M_0[a, b]$ і $M_1[a, b]$, де фігурують вже довільні монотонні функції, і показуємо, що $M_1^-[a, b] = M^-[a, b]$ і $M_1[a, b] = M[a, b]$.

2. Поточкові границі неперервних функцій обмеженої варіації Добре відомо [3, с.91], що кожна неперервно диференційовна функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ належить до $V[a, b]$, адже її похідна f' буде обмеженою на $[a, b]$ за першою теоремою Вейерштрасса [5, с.134] і тому за формулою Лагранжа [5, с.181] функція f задовольняє умову Ліпшиця на $[a, b]$, а значить, є функцією обмеженої

варіації. Звідси легко випливає

Теорема 1. Кожна неперервна функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є рівномірною границею послідовності функцій $f_n \in V_0[a, b]$.

Доведення. За теоремою Вейерштрасса [6, с. 98] для неперервної функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ існує послідовність многочленів $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка рівномірно на $[a, b]$ збігається до f . Кожний многочлен g є неперервною функцією, його похідна g' – це теж многочлен, отже, g є неперервно диференційовною функцією, а значить, функцією обмеженої варіації на $[a, b]$. Тому $f_n \in V[a, b]$ і $f_n \in C[a, b]$, тобто $f_n \in V_0[a, b]$ для кожного n .

Теорема 2. $V_1[a, b] = B_1[a, b]$

Доведення. Нехай $f \in B_1[a, b]$. Тоді існує послідовність функцій $f_n \in C[a, b]$, така, що $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$. Для кожної функції f_n за теоремою 1 існує така функція $g_n \in V_0[a, b]$, що $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$ на $[a, b]$. Тоді для кожного $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - g_n(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g_n(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Але $|f(x) - f_n(x)| + 1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому і $|f(x) - g_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, звідки випливає, що $g_n(x) \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$, отже, $f \in V_1[a, b]$.

3. Аналог теореми Гана для зростаючих функцій. Нагадаємо, що функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, яка визначена на топологічному просторі X , називається напівнеперервною зверху/знизу/ в точці x_0 в X , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки $x_0 \in X$, що для всіх $x \in U$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ / $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ /. Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається напівнеперервною зверху чи знизу, якщо вона є такою у кожній точці x з простору X .

Г.Ган [4] довів, що для кожної пари функцій $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, заданих на метричному просторі X і таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X існує така неперервна функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X . Зрозуміло, що це твердження буде справедливим для функцій, заданих на відрізку $X = [a, b]$ числової

прямої. В даний час відомо, що теорема Гана справджується і для нормальних просторів X і є для них характеристичною в класі T_1 -просторів, вона ж має і свої аналоги (див. [7] і вказану там літературу).

Тут ми доведемо наступний аналог теореми Гана.

Теорема 3. Нехай $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – зростаючі функції, для яких g – напівнеперервна зверху, h – напівнеперервна знизу і $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. Тоді існує така зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$.

Доведення. За теоремою Гана існує така неперервна функція $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq \varphi(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. Для кожного $x \in [a, b]$ звуження $\varphi|_{[a, x]}$ – це неперервна функція. Тому можна розглянути функцію:

$$f(x) = \max_{a \leq t \leq x} \varphi(t),$$

яка визначена на $[a, b]$. Покажемо, що f і є шуканою функцією. Легко перевірити, що функція f зростає. Справді, якщо $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, то $[a, x_1] \subseteq [a, x_2]$, отже, $\{\varphi(t) : a \leq t \leq x_1\} \subseteq \{\varphi(t) : a \leq t \leq x_2\}$, а тому:

$$f(x_1) = \max_{a \leq t \leq x_1} \varphi(t) \leq \max_{a \leq t \leq x_2} \varphi(t) = f(x_2).$$

Далі, оскільки функції g і h зростають і $g(t) \leq \varphi(t) \leq h(t)$ на $[a, b]$, то і для кожного $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{a \leq t \leq x} g(t) \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq x} \varphi(t) \leq \max_{a \leq t \leq x} h(t) = h(x), \end{aligned}$$

отже, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$.

Залишилось довести, що функція f неперервна. Розглянемо довільну точку x_0 з $[a, b]$ і доведемо, що функція f неперервна в точці x_0 . Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нам потрібно довести, що існує таке $\delta > 0$, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in [a, b]$ і $|x - x_0| < \delta$. З неперервності функції φ у точці x_0 випливає, що існує таке $\delta_0 > 0$, що $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in [a, b]$ і $|x - x_0| < \delta_0$. Оскільки $f(x_0) = \max_{a \leq t \leq x_0} \varphi(t)$, то існує така точка $t_0 \in [a, x_0]$, що $f(x_0) = \varphi(t_0)$.

Нехай $t_0 < x_0$. Тоді $f(x) = f(x_0)$ на $[t_0, x_0]$, отже, для числа $\delta_1 = x_0 - t_0 > 0$ будемо мати, що $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, як тільки $x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0$.

Якщо ж $t_0 = x_0$, то $f(x_0) = \varphi(x_0)$ і при $x_0 - \delta_0 < x \leq x_0$ будемо мати:

$f(x_0) - \varepsilon = \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq f(x_0)$, отже, $f(x_0) - \varepsilon < f(x) \leq f(x_0)$, як тільки $x_0 - \delta_0 < x \leq x_0$.

Розглянемо тепер точку $x \in [a, b]$, для якої $x_0 \leq x < x_0 + \delta_0$. Для неї існує така точка $u \in [a, x]$, що $f(x) = \varphi(u)$. Оскільки $f(x) \geq f(x_0)$, то $\varphi(u) \geq f(x_0)$. Якщо $f(x) = \varphi(u) = f(x_0)$, то функція f стала на відрізку $[x_0, x]$, отже, $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Якщо ж $\varphi(u) > f(x_0)$, то $u > x_0$, адже при $u \leq x_0$ виконуються нерівності:

$$\varphi(u) \leq f(u) \leq f(x_0),$$

звідки $\varphi(u) \leq f(x_0)$, що приводить до суперечності. Але $u \leq x$, отже, $x_0 < u \leq x < x_0 + \delta_0$. В такмоу разі:

$$f(x) = \varphi(u) < \varphi(x_0) + \varepsilon \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

отже, при $x_0 \leq x < x_0 + \delta_0$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Таким чином, покладаючи $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, ми будемо мати, що при $|x - x_0| < \delta$ і $x \in [a, b]$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

4. Рівномірна апроксимація зростаючих функцій З допомогою теореми 3 ми встановимо далі, що $M_1^+[a, b] = M[a, b]$. Для цього ми тут отримаємо наслідок теореми 3 про рівномірну апроксимацію зростаючої функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ неперервною зростаючою функцією $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Нагадаємо, що коливання $\omega_f(x)$ функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, заданої на топологічному просторі X , у точці $x \in X$ визначається формулою

$$\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U),$$

де $\mathcal{U}_x$ — система всіх околів точки x в X , а

$$\omega_f(U) = \sup_{x', x'' \in U} |f(x') - f(x'')|$$

— це коливання функції f на множині U .

Для зростаючої функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ розглянемо числа

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t) \text{ при } a \leq x < b,$$

$$f(b-0) = f(b),$$

$$f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \text{ при } a < x \leq b, \text{ і}$$

$$f(a+0) = f(a).$$

Ясно, що $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$ на $[a, b]$.

Лема 1. Для зростаючої на $[a, b]$ функції f коливання

$$\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$$

на $[a, b]$.

Доведення. Припустимо, що $a < x < b$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U)$, де $\mathcal{U}_x$ — система всіх околів точки x , а $\omega_f(U) = \sup_{x', x'' \in U} |f(x') - f(x'')|$ — коливання f на околі U , то існує такий окіл U точки x , що $\omega_f(U) < \omega_f(x) + \varepsilon$. Зрозуміло, що існує таке $\delta > 0$, що $U_\delta[x] = [x-\delta, x+\delta] \subseteq (a, b) \cap U$. Оскільки функція f зростає на $[a, b]$, то

$$f(x+\delta) - f(x-\delta) = \omega_f(U_\delta[x]) \leq \omega_f(U) < \omega_f(x) + \varepsilon.$$

Ясно, що $f(x+0) \leq f(x+\delta)$ і $f(x-0) \geq f(x-\delta)$, отже,

$$f(x+0) - f(x-0) \leq f(x+\delta) - f(x-\delta) < \omega_f(x) + \varepsilon,$$

звідки випливає, що $f(x+0) - f(x-0) < \omega_f(x) + \varepsilon$. Перейшовши у цій нерівності до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо, що $f(x+0) - f(x-0) \leq \omega_f(x)$.

Оскільки $f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$ і $f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$, то існує таке $\delta > 0$, що $x \pm \delta \in (a, b)$,

$$0 \leq f(x+\delta) - f(x+0) < \varepsilon,$$

і

$$0 \leq f(x-0) - f(x-\delta) < \varepsilon.$$

Тоді

$$f(x+0) > f(x+\delta) - \varepsilon,$$

і

$$f(x-0) < f(x-\delta) + \varepsilon,$$

отже,

$$\begin{aligned} f(x+0) - f(x-0) &> f(x+\delta) - \varepsilon - f(x-\delta) + \varepsilon > \\ &> \omega_f(U_\delta) - 2\varepsilon \geq \omega_f(x) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

а значить, $f(x+0) - f(x-0) > \omega_f(x) - 2\varepsilon$. Спрямувавши в цій нерівності ε до нуля. Отримаємо, що $f(x+0) - f(x-0) \geq \omega_f(x)$

Таким чином, $\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$. Так само розглядаються випадки $x = a$ і $x = b$.

Лема 2. Для зростаючої функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функція $y = f(x+0)$ напівнеперервна зверху, а функція $y = f(x-0)$ напівнеперервна знизу, при цьому ці обидві функції зростають на $[a, b]$.

Доведення. Нехай $x_0 \in [a, b]$. Оскільки $f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то для даного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $x_0 + \delta < b$ і

$$f(x_0+0) \leq f(x) < f(x_0+0) + \varepsilon,$$

як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta$. Для даного $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ і довільного $u \in (x, x_0 + \delta)$ будемо мати, що $f(u) < f(x_0+0) + \varepsilon$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $u \rightarrow x+0$, отримаємо, що $f(x+0) \leq f(x_0+0) + \varepsilon$. При $a \leq x \leq x_0$ будемо мати, що $f(u) < f(x_0+0) + \varepsilon$, отже, нерівність $f(x+0) \leq f(x_0+0) + \varepsilon$ виконується на околі $U = [a, x_0 + \delta)$ точки x_0 на відрізку $[a, b]$, а це і дає нам напівнеперервність зверху функції $y = f(x+0)$ в точці x_0 . Її напівнеперервність зверху у точці b впливає з того, що $f(b+0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Так само доводиться, що функція $y = f(x-0)$ напівнеперервна знизу. Те, що функції $y = f(x+0)$ і $y = f(x-0)$ зростають разом з функцією f отримується безпосереднім граничним переходом.

Теорема 4. Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – зростаюча функція, для якої $\omega_f(x) \leq \varepsilon$ на $[a, b]$.

Тоді існує така неперервна і зростаюча функція $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ на $[a, b]$.

Доведення. За лемою 2 функція $g(x) = f(x+0) - \frac{\varepsilon}{2}$ напівнеперервна зверху, а функція $h(x) = f(x-0) + \frac{\varepsilon}{2}$ напівнеперервна знизу, при цьому обидві функції зростають. Далі за лемою 1 коливання $\omega_f(x) = f(x+0) - f(x-0)$, отже, $f(x+0) - f(x-0) \leq \varepsilon$ на $[a, b]$, звідки випливає, що $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. За теоремою 3 існує така неперервна зростаюча функція $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $g(x) \leq \varphi(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. Оскільки $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$ на $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi(x) &\leq f(x+0) - g(x) = \\ &= f(x+0) - (f(x+0) - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi(x) &\geq f(x-0) - h(x) = \\ &= f(x-0) - (f(x-0) + \frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

на $[a, b]$, отже, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ на $[a, b]$ і φ – шукана функція.

5. Поточкові границі послідовностей неперервних зростаючих функцій

Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – скінченна множина на інтервалі (a, b) , причому $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$. Покладемо $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ при $k = 0, 1, \dots, n$ і $\eta = \eta_A = \frac{1}{2} \min_{k=0, n} \Delta a_k$. Ясно, що $\eta > 0$.

Для довільного $\delta \in (0, \eta)$ визначимо числа $a_k^+ = a_k + \delta$ для $k = 0, 1, \dots, n$, $a_k^- = a_k - \delta$ для $k = 1, \dots, n+1$ і відповідні їм проміжки $I_k^+ = [a_k, a_k^+]$, $I_k^- = [a_k^-, a_k]$ і $I_k = [a_k^-, a_k^+]$ при $k = 1, \dots, n$, $I_0 = I_0^+$ та $I_{n+1} = I_{n+1}^-$. Розглянемо також проміжки $J_k = [a_k^+, a_{k+1}^-]$ для $k = 0, 1, \dots, n$. Нехай $I = \bigcup_{k=0}^{n+1} I_k$, $J = \bigcup_{k=0}^n J_k$. Зрозуміло, що $I \cup J = [a, b]$. Поставимо у відповідність кожній функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функцію $g = L_{A, \delta} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що визначається таким чином:

$$g(x) = f(x), \quad x \in J;$$

$$g(x) = f(a_k) + \frac{f(a_k^+) - f(a_k)}{a_k^+ - a_k} (x - a_k),$$

$$x \in I_k^+, k = 0, \dots, n;$$

$$g(x) = f(a_k) + \frac{f(a_k^-) - f(a_k)}{a_k^- - a_k}(x - a_k),$$

$$x \in I_k^-, k = 1, \dots, n + 1.$$

Зауважимо, що визначення функції f коректне, бо для точок a_k^+ і a_k^- і одна, і друга формули дають, що $g(a_k^+) = f(a_k^+)$ і $g(a_k^-) = f(a_k^-)$. Крім того $g(a_k) = f(a_k)$ для $k = 0, 1, \dots, n + 1$. Коли функція f зростає, то кутові коефіцієнти $\alpha_k^+ = \frac{f(a_k^+) - f(a_k)}{a_k^+ - a_k} \geq 0$ і $\alpha_k^- = \frac{f(a_k^-) - f(a_k)}{a_k^- - a_k} \geq 0$ і лінійні функції $g|_{I_k^+}$ та $g|_{I_k^-}$ зростають, а тому і g буде зростаючою функцією на $[a, b]$. При цьому $f(a_k) \leq g(x) \leq f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$ і $f(a_k^-) \leq g(x) \leq f(a_k)$ при $x \in I_k^-$. Так само $f(a_k) \leq g(x) \leq f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$. Так само $f(a_k) \leq f(x) \leq f(a_k^+)$ при $x \in I_k^+$ і $f(a_k^-) \leq f(x) \leq f(a_k)$ при $x \in I_k^-$. Тому

$$|g(x) - f(x)| \leq f(a_k^+) - f(a_k) = \omega_f(I_k^+) \text{ на } I_k^+$$

і

$$|g(x) - f(x)| \leq f(a_k) - f(a_k^-) = \omega_f(I_k^-) \text{ на } I_k^-,$$

а значить,

$$|g(x) - f(x)| \leq \omega_f(I_k) \text{ на } I_k.$$

Для зростаючої функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і її точки розриву x покладемо $\Delta(x) = (f(x-0), f(x+0))$. Символом $D(f)$ ми позначаємо множину точок розриву функції f , а через $C(f)$ - множину її точок неперервності.

Лема 3. Нехай x_1 і x_2 - це різні точки з $D(f)$. Тоді $\Delta(x_1) \cap \Delta(x_2) = \emptyset$.

Доведення. Для певності припустимо, що $x_1 < x_2$. Покажемо, що тоді $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\delta_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Оскільки $x_1 < b$, то $f(x_1 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x)$, а значить, існує таке $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, що $f(x) > f(x_1 + 0) - \varepsilon$, як тільки $x_1 < x \leq x_1 + \delta_1$. Так само $a < x_2$, отже, $f(x_2 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_2 - 0} f(x)$, а значить, існує таке $\delta_2 \in (0, \delta_0)$, що $f(x) < f(x_2 - 0) + \varepsilon$, як тільки $x_2 - \delta_2 \leq x < x_2$. Зауважимо, що при цьому:

$$x_1 + \delta_1 < x_1 + \delta_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_2 - \delta_0 < x_2 - \delta_2.$$

В такому разі

$$f(x_1 + 0) < f(x_1 + \delta_1) + \varepsilon \leq$$

$$\leq f(x_2 + \delta_2) + \varepsilon < f(x_2 - 0) + 2\varepsilon,$$

отже, $f(x_1 + 0) < f(x_2 - 0) + 2\varepsilon$, звідки при $\varepsilon \rightarrow 0$ отримаємо нерівність

$$f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0).$$

Тому $\Delta(x_1) \cap \Delta(x_2) = \emptyset$.

Наступне твердження добре відоме, але ми дамо його доведення для повноти міркувань.

Лема 4. Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - зростаюча функція і $\varepsilon > 0$. Тоді множина $D^\varepsilon(f) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ скінченна.

Доведення. За лемою 1 $\omega_f(x) = f(x + 0) - f(x - 0)$ для кожного $x \in D(f)$. Припустимо, що множина $D^\varepsilon(f)$ містить n різних точок $x_1, \dots, x_n$. Розглянемо множину $E = \bigcup_{k=1}^n \Delta(x_k)$ і оцінимо її міру Лебега $\mu(E)$. Маємо

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^n \mu(\Delta(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) = \sum_{k=1}^n \omega_f(x_k) \geq n\varepsilon$$

і $\mu(E) \leq f(b) - f(a)$, адже $E \subseteq [f(a), f(b)]$. Тому $n\varepsilon \leq f(b) - f(a)$, а значить, $n \leq \frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$. Отже множина $D^\varepsilon(f)$ не може мати більше як $\lceil \frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon} \rceil$ точок, а значить, є скінченною.

З леми 4 негайно випливає, що у зростаючої функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ множина її точок розриву $D(f)$ не більш ніж злічenna, адже $D(f) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^{1/n}(f)$ і множини $D^{1/n}(f)$ скінченні за лемою 4.

Приступимо тепер до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 5. Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - зростаюча функція. Тоді існує послідовність неперервних зростаючих функцій $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$.

Доведення. Розглянемо скінченні множини $A_n = D^{1/n}(f) \setminus \{a, b\}$ і $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$

при $n \in \mathbb{N}$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина B_n скінченна і $B_n \subseteq (a, b)$, причому $\omega_f(x) < \frac{1}{n}$ для кожного $x \in B_n$, то існує таке число $\varepsilon_n > 0$, що для кожного $x \in B_n$ виконується нерівність $\omega_f([x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]) < \frac{1}{n}$. Для кожного номера n виберемо таке число $\delta_n > 0$, що $\delta_n < \min\{\frac{1}{n}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \eta_{A_n}\}$ і розглянемо функції $g_n = L_{A_n, \delta_n} f$.

Покладемо $A_n = \{a_{n,1}, \dots, a_{n,m_n}\}$, де $a = a_{n,0} < a_{n,1} < \dots < a_{n,m_n} < a_{n,m_n+1} = b$, $a_{n,k}^+ = a_{n,k} + \delta_n$ і $I_{n,k}^+ = [a_{n,k}, a_{n,k}^+]$ для $k = 0, 1, \dots, m_n$, $a_{n,k}^- = a_{n,k} - \delta_n$ і $I_{n,k}^- = [a_{n,k}^-, a_{n,k}]$ для $k = 1, \dots, m_n + 1$, $I_{n,k} = I_{n,k}^- \cup I_{n,k}^+$ для $k = 1, \dots, m_n$, $I_{n,0} = I_{n,0}^+$, $I_{n,m_n+1} = I_{n,m_n+1}^-$. Нехай $J_{n,k} = [a_{n,k}^+, a_{n,k+1}^-]$ і $J_n = \bigcup_{k=0}^{m_n} J_{n,k}$.

Нехай $x \in (a, b)$. Покажемо, що $g_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Нехай $A = D(f) \cup \{a, b\}$. Зрозуміло, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{a, b\}$. Зауважимо, що за побудовою функцій g_n виконуються рівності $g_n(x) = f(x)$ для $x \in \widetilde{A_n} = A_n \cup \{a, b\}$ і для $x \in J_n$.

Якщо $x \in A$, то існує такий номер N , що $x \in \widetilde{A_N}$. Але $\widetilde{A_n} \supseteq \widetilde{A_N}$ при $n \geq N$. В такому разі $g_n(x) = f(x)$ при $n \geq N$, отже, $g_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Нехай $x \in [a, b] \setminus A$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і виберемо такий номер N_1 , що $1/N_1 < \varepsilon$. Оскільки $x \notin A$, то $x \notin \widetilde{A_{N_1}}$. Множина $\widetilde{A_{N_1}}$ скінченна, тому відстань $d(x) = d(x, \widetilde{A_{N_1}}) = \frac{1}{2} \min\{|x - a_{N_1,k}| : k = 0, 1, \dots, m_{N_1+1}\} > 0$. Оскільки $0 < \delta_n \leq \frac{1}{n}$ для кожного n , то $\delta_n \rightarrow 0$, отже, існує такий номер N_2 , що $\delta_n < d(x)$, як тільки $n \geq N_2$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$ і $n \geq N$. Покажемо, що тоді $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Якщо $x \in J_n$, то $g_n(x) = f(x)$ і $|g_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$. Нехай $x \notin J_n$, тоді $x \in I_{n,k}$ для деякого $k = 0, 1, \dots, m_n + 1$, зокрема, $|x - a_{n,k}| < \delta_n$. Оскільки $|x - a_{N_1,k}| \geq d(x) > \delta_n$ для $k = 0, 1, \dots, m_{N_1} + 1$, бо $n \geq N_2$, то $a_{n,k} \neq a_{N_1,k}$ при $k = 0, 1, \dots, m_{N_1} + 1$, тобто $a_{n,k} \notin \widetilde{A_{N_1}}$, а значить, $a_{n,k} \in B_m$ для деякого m , такого, що $N_1 \leq m < n$. Тоді

$$\begin{aligned} |g_n(x) - f(x)| &\leq \omega_f(I_{n,k}) = \\ &= \omega_f([a_{n,k} - \delta_n, a_{n,k} + \delta_n]) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \omega_f([a_{n,k} - \delta_n, a_{n,k} + \delta_n]) < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N_1} < \varepsilon.$$

Таким чином, $g_n(x) \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$.

З побудови функції g_n випливає, що вона зростає на $[a, b]$. В точках з інтервалів $I_{n,0}^o$ при $k = 0, 1, \dots, m_n$ і з проміжків $I_{n,0} = [a, a + \delta_n]$ та $I_{n,m_n+1} = (b - \delta_n, b]$ функція g_n неперервна, отже, $\omega_{g_n}(x) = 0$ в таких точках. На множині $J_n = \bigcup_{k=0}^{m_n} J_{n,k}$ маємо, що $g_n(x) = f(x)$. Тому на інтервалах $I_{n,k}^o$ обов'язково $\omega_{g_n}(x) = \omega_f(x) < \frac{1}{n}$, бо $x \notin \widetilde{A_n}$, якщо $x \in J_{n,k}$. Якщо x_0 - крайня точка з $J_{n,k}$, то $\omega_{g_n}(x_0) \leq \omega_f(x_0) < \frac{1}{n}$, бо і тут $x_0 \notin \widetilde{A_n}$. Таким чином, справді $\omega_{g_n}(x) < \frac{1}{n}$ на $[a, b]$.

За теоремою 4 існує неперервна зростаюча функція $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n}$ на $[a, b]$. Зрозуміло, що тоді $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на $[a, b]$ і теорема доведена.

6. Поточкові границі послідовностей монотонних функцій

З теореми 5 легко вивести наступний результат.

Теорема 6. Кожна спадна функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є поточною границею послідовностей неперервних спадних функцій $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Доведення. Розглянемо функцію $g = -f$. Зрозуміло, що g - зростаюча функція на $[a, b]$. За теоремою 5 існує послідовність неперервних зростаючих функцій $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $g_n(x) \rightarrow g(x)$ на $[a, b]$. Функції $g_n(x) = -f_n(x)$ будуть неперервними і спадними на $[a, b]$, причому

$$f_n(x) = -g_n(x) \rightarrow -g(x) = f(x)$$

на $[a, b]$.

Додамо до цього ще один результат.

Теорема 7. Нехай X - невикористаний проміжок числової прямої, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ монотонні функції при $n = 1, 2, \dots$ і $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - це поточкова границя послідовності функцій f_n . Тоді:

- (i) функція f монотонна;
- (ii) якщо f не стала, то існує такий номер

N , що при $n \geq N$ або всі функції f_n зростають, або всі вони спадають;

(iii) якщо f стала то серед функцій f_n безліч функцій може зростати і безліч функцій може спадати.

Доведення. а). Припустимо, що гранична функція f не є монотонною. Тоді існують точки $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, що $x_1 < x_2$ і $f(x_1) > f(x_2)$, $x_3 < x_4$ і $f(x_3) < f(x_4)$. Розглянемо число $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{f(x_1) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3)\}$ яке, зрозуміло, додатне. Оскільки $f_n(x_i) \rightarrow f(x_i)$ при $n \rightarrow \infty$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то для кожного $i = 1, 2, 3, 4$ існує такий номер N_i , що $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$, при $n \geq N_i$ для всіх $i = 1, 2, 3, 4$. Розглянемо номер $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Для ф-ції f_N отримаємо:

$$f_N(x_1) > f(x_1) - \varepsilon \geq f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

і

$$f_N(x_2) < f(x_2) + \varepsilon \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

Отже, $f_N(x_1) > f_N(x_2)$. Так само:

$$f_N(x_3) < f(x_3) + \varepsilon \leq f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{2} = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}$$

і

$$f_N(x_4) > f(x_4) - \varepsilon \geq f(x_4) - \frac{f(x_4) - f(x_3)}{2} = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2},$$

Отже, $f_N(x_3) < f_N(x_4)$. Виходить, що функція f_N не монотонна, що суперечить умові.

б). Нехай f не стала функція. Тоді існують такі дві точки $x_1, x_2 \in X$, що $x_1 < x_2$ і $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Припустимо, що $f(x_1) < f(x_2)$. Розглянемо додатне число $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x_2) - f(x_1))$.

Для $i = 1, 2$ існує номер N_i , такий, що $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N_i$. Візьмемо номер $N = \max\{N_1, N_2\}$. Нехай $n \geq N$. Тоді:

$$\begin{aligned} f_n(x_1) &< f(x_1) + \varepsilon = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \\ f_n(x_2) &> f(x_2) - \varepsilon = f(x_2) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{2} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \end{aligned}$$

отже, $f_n(x_1) < f_n(x_2)$. В такому разі обов'язково $f_n(x') < f_n(x'')$, як тільки $x' < x''$ і $x', x'' \in X$. Справді, якби $f_n(x_3) > f_n(x_4)$ для деяких x_3 і x_4 з X , таких, що $x_3 < x_4$, то функція f_n не була б монотонною, що суперечить умові. Таким чином, всі функції f_n при $n \geq N$ будуть зростати. У випадку $f(x_1) > f(x_2)$ так само доводиться, що всі функції f_n будуть спадними, починаючи з деякого номера N .

в). Нехай $f(x) = c$ на X . Припустимо, що $X =]a, b[$, тобто, що X — це проміжок з кінцями a і b з розширеної числової прямої $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Оскільки проміжок X не вироджений, то $a < b$. Тоді існують такі числа x_1, x_0 і x_2 , що $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ і $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Покладемо $g_k(x) = c + \frac{1}{k}(x - x_0)$ і $h_k(x) = c - \frac{1}{k}(x - x_0)$ для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Очевидно, що функції g_k строго зростають на X , а h_k строго спадають на X , причому $g_k \rightarrow c = f(x)$ і $h_k \rightarrow c = f(x)$ на X . Покладаючи $f_n = g_k$ при $n = 2k$ і $f_n = h_k$ при $n = 2k - 1$, ми отримаємо шукану послідовність функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фіхтенгольц Ф.М. Курс диференціального та інтегрального числення. Том 1.
2. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2. - Чернівці: ЧНУ, 2010. - 192с.
3. Baire R. Sur les fonctions des variables réelles // An. Mat. Pura Appl., ser. 3. - 1899. - 3. - P.1-123.
4. Baire R. Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues // C.R. - 1898. - 126. - P. 1521-1523.

5. *Hahn. H.* Über halbstetige und unstetige Funktionen// Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa.– 126. – S. 91-110.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.1. – С.-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. – 448с.

7. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.2. – С.-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. – 464с.

8. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій.// Збірник праць Інституту математики НАН України. Теорія наближень функцій та суміжні питання. – 2014. – 11, №3. – С. 182-183.