УДК 517.949

©2013 р. О.В. Осипова, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ

Наведена схема розщеплення лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами. Досліджена задача про побудову асимптотичних розкладів розщеплюючого перетворення.

We provide a splitting scheme for linear singularly perturbed systems with two small parameters. We also find asymptotic expansions of the splitting operator.

Вступ

Декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь розглядалась багатьма авторами. Зручним апаратом, який дозволяє ефективно розв'язувати важливу для застосувань задачу пониження розмірності, є метод інтегральних многовидів [1–3]. Для лінійних сингулярно збурених систем метод інтегральних много видів дозволяє здійснити розщеплення вихідної системи на незалежні швидку і повільну підсистеми [4–5].

Аналогічні задачі для лінійних сингулярно збурених систем з декількома малими параметрами досліджувались в роботах [6–8].

У даній роботі для лінійних сингулярно збурених систем з двома малими параметрами досліджується побудова асимптотичних розкладів інтегральних многовидів, за допомогою яких здійснюється розщеплення вихідної системи.

1. Схема розщеплення

Розглянемо лінійну сингулярно збурену систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2, \\ \varepsilon_1\dot{x}_1 &= A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 &= A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x_i \in R^{n_i}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,2}$ – $n_i \times n_j$ матриці, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малі додатні параметри.

Нехай для системи (1) справджуються умови:

I) матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,2}$ рівномірно обмежені для $t \in R$ додатною сталою M;

II) власні значення матриці $A_{22}(t)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_{22}) \le -2\beta, \quad \beta > 0.$$

Розщеплення системи (1) здійснюється у два етапи [6, 7]. На першому кроці за допомогою заміни змінних

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, \\ x_1 &= y_1 + \varepsilon_2 H_1 w, \\ x_2 &= w + P_0x_0 + P_1x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

система (1) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= B_{00}y_0 + B_{01}y_1, \\ \varepsilon_1\dot{y}_1 &= B_{10}y_0 + B_{11}y_1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} &= B_{22}w, \end{aligned} \tag{3}$$

де $B_{ij} = A_{ij} + A_{i2}P_j$, $i, j = 0, 1$, $B_{22} = A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0A_{02} - \varepsilon_2P_1A_{12}$.

При цьому матричні функції P_0, P_1 – обмежені розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_0 &= A_{20} + A_{22}P_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{00} - \\ &-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_0 - \varepsilon_2P_1A_{10} - \varepsilon_2P_1A_{12}P_0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{P}_1 &= A_{21} + A_{22}P_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{01} - \\ &-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}P_1 - \varepsilon_2P_1A_{11} - \varepsilon_2P_1A_{12}P_1, \end{aligned} \tag{4}$$

а матричні функції H_0, H_1 – обмежені розв'язки системи

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_0 &= \varepsilon_1\varepsilon_2A_{00}H_0 + \varepsilon_2A_{01}H_1 + \\ &+A_{02}R_1 - H_0R_2, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{H}_1 &= \varepsilon_1\varepsilon_2A_{10}H_0 + \varepsilon_2A_{11}H_1 + \\ &+A_{12}R_1 - H_1R_2, \end{aligned} \tag{5}$$

де $R_1 = (E + \varepsilon_1\varepsilon_2P_0H_0 + \varepsilon_2P_1H_1)$, $R_2 = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02} - \varepsilon_2P_1A_{12})$.

На другому кроці розщеплення припускаємо, що справджується умова

III) власні значення матриці $B_{11}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(B_{11}) \le -2\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Тоді за допомогою заміни

$$y_0 = u + \varepsilon_1 H v, \quad y_1 = v + P y_0 \tag{6}$$

система із перших двох рівнянь системи (3) зводиться до незалежних підсистем [4,7]

$$\begin{array}{l} \dot{u} = (B_{00} + B_{01}P)u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} = (B_{11} - \varepsilon_1 P B_{01})v. \end{array} \tag{7}$$

Матричні функції P, H є рівномірно обмеженими розв'язками системи

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1 \dot{P} = \varepsilon_1 (B_{00} + B_{01}H)P + B_{01} - \\ -P(B_{11} - \varepsilon H B_{01}), \\ \varepsilon_1 \dot{H} = B_{10} + B_{11}H - \varepsilon_1 H(B_{00} + \\ +B_{01}H). \end{array} \tag{8}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 [7]. *Нехай виконуються умови I)–III). Тоді для достатньо малих $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ існує невироджена заміна змінних за допомогою якої система (1) зводиться до трьох незалежних підсистем*

$$\begin{array}{l} \dot{u} = (B_{00} + B_{01}P)u, \\ \varepsilon_1 \dot{v} = (B_{11} - \varepsilon_1 P B_{01})v, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{w} = B_{22} w. \end{array} \tag{9}$$

Зауваження 1. Умова III) є складною для перевірки, оскільки матриці P_0 та P_1 вдається знайти в явному вигляді тільки у найпростіших випадках. Легко переконатися, що умова III) буде справджуватися при малих ε_1, якщо $A_{12} = \varepsilon_1 \bar{A}_{12}$, і власні значення матриці A_{11} задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(A_{11}) \le -2\gamma, \quad \gamma > 0.$$

2. Асимптотичні розклади розщеплюючого перетворення

Знайти точний вигляд коефіцієнтів розщеплюючого перетворення (2), (6) вдається тільки у найпростіших випадках, тому представляє інтерес виписати відповідні розщеплені системи при наближеному знаходженні асимптотичних розкладів цих коефіцієнтів.

IV) Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i,j = \overline{0,2}$, $A_{22}^{-1}(t)$ рівномірно обмежені для $t \in R$ разом із своїми похідними до $(n+1)$ порядку включно.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T(u) = A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}u - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{d}{dt}u. \tag{10}$$

Покажемо, що існує функція $u(t, x_0(t), x_1(t), \varepsilon_2)$, яку можна представити у вигляді

$$\begin{array}{c} u = \overline{P}_0(t,\varepsilon_2)x_0 + \overline{P}_1(t,\varepsilon_2)x_1 = \\ = (P_0^0(t) + \varepsilon_2 P_0^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_0^n(t))x_0 + \\ +(P_1^0(t) + \varepsilon_2 P_1^1(t) + ... + \varepsilon_2^n P_1^n(t))x_1, \end{array} \tag{11}$$

де $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0,n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n-i+1)$ похідними, така, що на обмежених розв'язках системи (1)

$$T(u) = o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (11) у рівність (10) і підберемо функції $P_0^i(t)$, $P_1^i(t)$, $i = \overline{0,n}$ так, щоб у рівності (10) перетворилися в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені, меншій, ніж $n+1$. Обгрунтування можливості такого вибору неважко провести за індукцією. При цьому для коефіцієнтів у представленні (11) одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{array}{l} P_0^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{20}(t), \\ P_1^0(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \\ P_0^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\Big(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{00}(t) + \\ +\varepsilon_1 \sum\limits_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + P_1^{k-1}(t)A_{10}(t) + \\ + \sum\limits_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_0^{k-i-1}(t)\Big), \\ P_1^k(t) = A_{22}^{-1}(t)\Big(\varepsilon_1 \dot{P}_1^{k-1}(t) + \varepsilon_1 P_0^{k-1}(t)A_{01}(t) + \\ +\varepsilon_1 \sum\limits_{i=0}^{k-1} P_0^i(t)A_{02}(t)P_0^{k-i-1}(t) + P_1^{k-1}(t)A_{11}(t) + \\ + \sum\limits_{i=0}^{k-1} P_1^i(t)A_{12}(t)P_1^{k-i-1}(t)\Big), \quad k = 1,2,...,n. \end{array} \tag{12}$$

Обмеженість P_0^i, P_1^i та їх частинних похідних до $(n-i+1)$ порядку випливає із умови IV). Якщо функції P_0^i, P_1^i вибрані за формулами (12), то диференціальне співвідношення (10) набуде вигляду

$$T(u)=\varepsilon_2^{n+1}(\eta_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_0+\eta_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_1),$$

де η_0,η_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (1) зробити заміну

$$x_2=\overline{P}_0x_0+\overline{P}_1x_1+\varepsilon_2^{n+2}z,$$

то для змінних x_0,x_1,z одержимо систему

$$\begin{array}{l}\dot{x}_0=(A_{00}(t)+A_{02}(t)\overline{P}_0)x_0+(A_{01}(t)+\\+A_{02}(t)\overline{P}_1\big)\,x_1+\varepsilon_2^{n+1}A_{02}(t)z,\\ \varepsilon_1\dot{x}_1=(A_{10}(t)+A_{12}(t)\overline{P}_0)x_0+(A_{11}(t)+\\+A_{12}(t)\overline{P}_1\big)\,x_1+\varepsilon_2^{n+1}A_{12}(t)z,\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{z}=\eta_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_0+\eta_1(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x_1+\\+A_{22}(t)z.\end{array}\tag{13}$$

Система (13) – це система типу (1), для якої існує інтегральний многовид [7]

$$z=P_0^*(t,\varepsilon)x_0+P_1^*(t,\varepsilon)x_1,\tag{14}$$

де P_0^*, P_1^* – рівномірно обмежені функції.

Якщо система (13) має інтегральний многовид (14), то система (1) має інтегральний многовид

$$x_2=(\overline{P}_0+\varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0+(\overline{P}_1+\varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1=$$

$$=P_0x_0+P_1x_1,$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$x_2=(P_0^0+\varepsilon_2P_0^1+...+\varepsilon_2^nP_0^n+\varepsilon_2^{n+1}P_0^*)x_0+$$

$$+(P_1^0+\varepsilon_2P_1^1+...+\varepsilon_2^nP_1^n+\varepsilon_2^{n+1}P_1^*)x_1.\tag{15}$$

Здійснимо в системі (1) заміну змінних

$$x_2=P_0x_0+P_1x_1+w,$$

одержимо систему

$$\begin{array}{l}\dot{x}_0=(A_{00}+A_{02}P_0)x_0+\\+(A_{01}+A_{02}P_1)x_1+A_{02}w,\\ \varepsilon_1\dot{x}_1=(A_{10}+A_{12}P_0)x_0+\\+(A_{11}+A_{12}P_1)x_2+A_{12}w,\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w}=(A_{22}-\varepsilon_1\varepsilon_2P_0A_{02}-\\-\varepsilon_2P_1A_{12})\,w.\end{array}\tag{16}$$

Розглянемо тепер диференціальні вирази

$$\begin{array}{l}T_0(u_0,u_1)=\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{00}+A_{02}P_0)u_0+\\+\varepsilon_2(A_{01}+A_{02}P_1)u_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{d}{dt}u_0+A_{02}w,\\ T_1(u_0,u_1)=\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{10}+A_{12}P_0)u_0+\\+\varepsilon_2(A_{11}+A_{12}P_1)u_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{d}{dt}u_1+A_{12}w.\end{array}\tag{17}$$

Покажемо, що існують функції $u_0(t,\varepsilon_2,w)$, $u_1(t,\varepsilon_2,w)$, які можна представити у вигляді

$$\begin{array}{l}u_0=\overline{H}_0w=\sum\limits_{i=0}^{n}\varepsilon_2^iH_0^iw,\\ u_1=\overline{H}_1w=\sum\limits_{i=0}^{n}\varepsilon_2^iH_1^iw,\end{array}\tag{18}$$

де H_0^i, H_1^i, $i=\overline{0,n}$ – рівномірно обмежені разом із своїми $(n-i+1)$ похідними, такі що

$$T_0(u_0,u_1)=o(\varepsilon_2^{n+1}),\quad T_1(u_0,u_1)=o(\varepsilon_2^{n+1}).$$

Підставимо співвідношення (18) у рівності (17) і підберемо функції H_0^i, H_1^i, $i=\overline{0,n}$ так, щоб в рівностях (17) перетворились в нуль всі члени, що містять ε_2 в степені меншій, ніж $n+1$. Для коефіцієнтів H_0^i, H_1^i одержуємо алгебраїчні співвідношення

$$\begin{array}{l}H_0^0=A_{01}A_{22}^{-1},\\ H_1^0=A_{12}A_{22}^{-1},\\ H_0^k=(\varepsilon_1A_{00}H_0^{k-1}+A_{01}H_1^{k-1}+\\+\varepsilon_1A_{02}\sum\limits_{i=0}^{k-1}P_0^iH_0^{k-1-i}+A_{02}\sum\limits_{i=0}^{k-1}P_1^iH_1^{k-1-i}+\\+\varepsilon_1\sum\limits_{i=0}^{k-1}H_0^iP_0^{k-1-i}A_{02}+\sum\limits_{i=0}^{k-1}H_0^iP_1^{k-1-i}A_{12}-\\-\varepsilon_1\dot{H}_0^{k-1})A_{22}^{-1},\\ H_1^k=(\varepsilon_1A_{10}H_0^{k-1}+A_{11}H_1^{k-1}+\\+\varepsilon_1A_{12}\sum\limits_{i=0}^{k-1}P_0^iH_0^{k-1-i}+A_{12}\sum\limits_{i=0}^{k-1}P_1^iH_1^{k-1-i}+\\+\varepsilon_1\sum\limits_{i=0}^{k-1}H_1^iP_0^{k-1-i}A_{02}+\sum\limits_{i=0}^{k-1}H_1^iP_1^{k-1-i}A_{12}-\\-\varepsilon_1\dot{H}_1^{k-1})A_{22}^{-1},\quad k=1,2,...,n.\end{array}\tag{19}$$

Обмеженість H_0^i, H_1^i та їх частинних похідних випливає із умови IV). У цьому випадку диференціальні вирази (17) набувають вигляду

$$T_0(u_0,u_1)=\varepsilon_2^{n+1}\mu_0(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)w,$$

$$T_1(u_0, u_1) = \varepsilon_2^{n+1}\mu_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)w,$$

де μ_0, μ_1 – рівномірно обмежені функції.

Якщо тепер у системі (16) зробити заміну

$$x_0 = \varepsilon_2^{n+1}y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2\overline{H}_0 w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2^{n+1}y_1 + \varepsilon_2\overline{H}_1 w,$$

то для змінних y_0, y_1, w одержимо систему

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_0 = (A_{00} + A_{02}P_0)y_0+\\
&+(A_{01} + A_{02}P_1)y_1 + \mu_0 w,\\
&\varepsilon_1\dot{y}_1 = (A_{10} + A_{12}P_0)y_0+\\
&+(A_{11} + A_{12}P_1)y_1 + \mu_1 w,\\
&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 A_{02}-\\
&-\varepsilon_2 P_1 A_{12})w,
\end{aligned} \tag{20}$$

типу (1), для якої існують інтегральні многовиди [7]

$$y_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0^* w, \quad y_1 = \varepsilon_2 H_1^* w. \tag{21}$$

Якщо система (20) має інтегральні многовиди (21), тоді система (16) має інтегральні многовиди

$$x_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2(\overline{H}_0 + \varepsilon_2^{n+1}H_0^*)w = \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2(\overline{H}_1 + \varepsilon_2^{n+1}H_1^*)w = \varepsilon_2 H_1 w,$$

для яких справедливі асимптотичні розклади

$$x_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_2^i H_0^i + \varepsilon_2^{n+1}H_0^*\right)w,$$

$$x_1 = \varepsilon_2\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_2^i H_1^i + \varepsilon_2^{n+1}H_1^*\right)w.$$

Здійснивши в системі (6) заміну змінних

$$x_0 = y_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w, \quad x_1 = y_1 + \varepsilon_2 H_1 w,$$

одержимо систему (3) і завершуємо перший етап розщеплення системи (1).

Теорема 2. *Нехай справджуються умови I), II), IV). Тоді для достатньо малих значень ε_2 існує заміна змінних (2), за допомогою якої система (1) зводиться до вигляду (3), і коефіцієнти асимптотичних розкладів перетворення (2) можна однозначно знайти із алгебраїчних співвідношень (12), (19).*

Представлення функцій P, H із рівностей (6) у вигляді асимптотичних розкладів

$$\begin{aligned}
&P(t, \varepsilon_1) = P_0(t) + \varepsilon_1 P_1(t) + ...,\\
&H(t, \varepsilon_1) = H_0(t) + \varepsilon_1 H_1(t) + ...,
\end{aligned} \tag{22}$$

встановлено у працях [2, 4, 9].

При цьому коефіцієнти розкладів (22) однозначно знаходяться із алгебраїчних співвідношень

$$\begin{aligned}
&P_0(t) = -B_{11}^{-1}B_{10}, \quad H_0(t) = B_{01}B_{11}^{-1},\\
&P_k(t) = B_{11}^{-1}(\dot{P}_{k-1} + P_{k-1}B_{00}+\\
&+\sum_{i=0}^{k-1} P_i B_{01} P_{k-1-i}),\\
&H_k(t) = (B_{00}H_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} B_{01}P_i H_{k-1-i}+\\
&+\sum_{i=0}^{k-1} M_i P_{k-1-i} + B_{01} - \dot{M}_{k-1})B_{11}^{-1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Обмежуючись у співвідношеннях (2) та (6) тільки нульовими коефіцієнтами асимптотичних наближень одержуємо таке нульове наближення розщепленої системи

$$\begin{aligned}
&\dot{u} = (A_{00} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{20} + A_{01}-\\
&-A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})u,\\
&\varepsilon_1\dot{v}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) - \varepsilon_1\times\\
&\times(A_{01} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{21})(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\times\\
&\times(A_{01} - A_{02}A_{22}^{-1}A_{21}))v,\\
&\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{w} = (A_{22} + \varepsilon_1\varepsilon_2 A_{22}^{-1}A_{20}A_{02}+\\
&+\varepsilon_2 A_{22}^{-1}A_{21}A_{12})w.
\end{aligned} \tag{24}$$

3. Розщеплення початкових умов

Виходячи із співвідношень (2), (6), дістаємо рівняння, що зв'язують початкові умови для вихідної системи з початковими умовами для розщепленої системи

$$\begin{aligned}
&x_{00} = u_0 + \varepsilon_1 H v_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_0 w_0,\\
&x_{10} = P u_0 + (E + \varepsilon_1 P H)v_0 + \varepsilon_2 H_1 w_0,\\
&x_{20} = (P_0 + P_1 P)u_0 + (P_1 + \varepsilon_1(P_0 + P_1 P)H)v_0+\\
&+(E + \varepsilon_1\varepsilon_2 P_0 H_0 + \varepsilon_2 P_1 H_1)w_0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язуючи систему (25), дістаємо

$$u_0 = (E + \varepsilon_1 HP - \varepsilon_1\varepsilon_2(-(E + \varepsilon_1 HP)H_0+$$

$$+HH_1)P_0)x_{00} + (-\varepsilon_1 H-$$

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2(-(E + \varepsilon_1 HP)H_0 + HH_1)P_1)x_{10}+$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_2(-(E+\varepsilon_1 HP)H_0+HH_1)x_{20},$$
$$v_0=(-P-(\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)P_0)x_{00}+$$
$$+(E+\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)x_{10}+(\varepsilon_1\varepsilon_2 PH_0-\varepsilon_2 H_1)x_{20},$$
$$w_0=-P_0x_{00}-P_1x_{10}+x_{20}.$$

Якщо враховувати тільки нульові члени асимптотичних розкладів (12), (19), (23), то одержимо такі початкові умови для системи (24)

$$u_0=(E+\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-2}B_{10}+R_1A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+$$
$$+(-\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-1}+R_1A_{22}^{-1}A_{21})x_{10}+R_1x_{20},$$
$$v_0=(B_{11}^{-1}B_{10}-R_1A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+(E+R_2)x_{10}+$$
$$+R_2x_{20},$$
$$w_0=A_{22}^{-1}A_{20})x_{00}+A_{22}^{-1}A_{21}x_{10}+x_{20},$$

де

$$R_1=\varepsilon_1\varepsilon_2((\varepsilon_1 B_{01}B_{11}^{-2}B_{10}-E)A_{02}A_{22}^{-1}+$$
$$+B_{01}B_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}),$$
$$R_2=-\varepsilon_1\varepsilon_2 B_{11}^{-1}B_{10}A_{02}A_{22}^{-1}-\varepsilon_2 A_{12}A_{22}^{-1}).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

2. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движения методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

3. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных систем // Дифференциальные уравнения. – 1995.– **31**, № 44. – С. 569-578.

4. *Sobolev V.A.* Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Math. Hung. – 1987.– **49**, № 3-4. – P. 365-376.

5. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 32-36.

6. *Семенова М.М.* Декомпозиция систем с несколькими временными масштабами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – **8**. – С. 6-11.

7. *Сельський С.С., Черевко І.М.* Розщеплення систем лінійних диференціальних сингулярно збурених рівнянь // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Серія: математика : Зб. наук. праць. – **1**, № 3. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – С. 104-107.

8. *Осипова О.В., Черевко І.М.* Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Серія: математика : Зб. наук. праць. – **2**, № 1. – Чернівці: ЧНУ, 2012. – С. 78-83.

9. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.