

ПРО ПЕРІОДИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ p -АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Розглянуто задачу про знаходження періодичного розв'язку параболічного рівняння над полем p -адичних чисел.

We considered the problem to find periodic solutions of parabolic equation over the field of p -adic numbers.

Вступ. У 90-х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до p -адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [2] та І.В. Воловіча, І.Я. Ареф'євої [1]), яка апелює до фантастично малих відстаней порядку 10^{-33} см, немає причин вважати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однієї з альтернативних можливостей для описання структури простору-час є використання поля $\mathbb{Q}_p$ p -адичних чисел замість множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. На можливість використання p -адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [3] Владімірова В.С. та Воловіча І.В.

У праці [4] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багатьох чому аналогічна відповідній теорії над множиною $\mathbb{R}$, але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, представленню Фур'є, аналогу оператора Рімана-Ліувілья, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем p -адичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [5], в якій при певних припущеннях відносно коефіцієнтів побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, доведені існування та єдиність розв'язку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невід'ємності фундаментального розв'язку.

1. У даній роботі розглядається рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(t)(D^\alpha u)(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{Q}_p, t \geq 0,$$

де $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адичних чисел (p – просте число), коефіцієнт та неоднорідність рівняння є неперервними періодичними функціями з деяким періодом $\omega > 0$

$$a(t + \omega) = a(t), f(t + \omega, x) = f(t, x).$$

Розв'язок $u(t, x)$ – дійсна функція, $\alpha \geq 1$, D^γ ($\gamma > 0$) – p -адичний аналог оператора дробового диференціювання, який введений В.С. Владіміровим [4].

Наведемо деякі поняття p -адичного аналізу, які будуть використовуватися у подальших міркуваннях. Детальне їх викладення міститься у [2, 4, 6].

Нехай p – просте число, яке буде фіксованим. Введемо у полі $\mathbb{Q}$ раціональних чисел норму $|x|_p$, покладаючи $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$, якщо число $x \in \mathbb{Q}$ подано у вигляді

$$x = p^\gamma \frac{m}{n},$$

де $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$, m, n не діляться на p . Доповнення $\mathbb{Q}_p$ поля $\mathbb{Q}$ утворює поле p -адичних чисел.

Норма $|\cdot|_p$ володіє наступними властивостями: $|x|_p = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$; $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$; $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, якщо $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p)$.

Метрика $\rho(x, y) = |x - y|_p$ перетворює $\mathbb{Q}_p$ у повний сепарабельний локально компактний простір. У просторі $\mathbb{Q}_p$ існує єдина,

з точністю до множини, міра dx , яка інваріантна відносно додавання. Якщо $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, то $d(ax) = |a|_p dx$. Міра нормується так, що

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Простір $\mathbb{Q}_p$ – це об'єднання зліченної сім'ї попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^\nu\},$$

при цьому

$$\int_{|x|_p = p^\nu} dx = p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Більшість інтегралів, що зустрічаються у роботі, знайдені в [4].

Введемо до розгляду клас $\mathfrak{M}_\gamma$ ($\gamma \geq 0$) комплекснозначних функцій $\varphi(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, які задовольняють умови:

- 1) $|\varphi(x)| \leq c(1 + |x|_p^\gamma)$;
- 2) існує натуральне число $N = N(\varphi)$ таке, що для довільного $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), |x'|_p \leq p^{-N}.$$

Функція φ , яка задовольняє останню умову, називається локальною константою, а число N називається показником локальної сталості функції φ . Якщо φ залежить від параметра t , то будемо вважати, що $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$ рівномірно по t , якщо константа C і показник N не залежать від t .

Множину фінітних функцій із $\mathfrak{M}_0$ позначимо D . Із [7] відомо, що для довільного компакта $K \subset \mathbb{Q}_p$ і довільного відкритого скінченного покриття $\{u_i\}$ множини K існують такі функції $\varphi_i \in D$, що $\varphi_i(x) \geq 0$, $\text{supp } \varphi_i \subset u_i$, $\sum \varphi_i(x) = 1$ для $x \in K$.

Нехай χ – нормований адитивний характер поля $\mathbb{Q}_p$. Тоді $\chi \in \mathfrak{M}_0$. Перетворення Фур'є локально інтегровної на $\mathbb{Q}_p$ функції φ , $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$, визначається формулою

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x) \varphi(x) dx, \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi, x \in \mathbb{Q}_p,$$

якщо $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$.

Має місце формула, наведена в [1]

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(|x|_p) \chi(\xi x) dx &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu} |\xi|_p^{-1}) p^{-\nu} - |\xi|_p^{-1} f(p |\xi|_p^{-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\xi \neq 0$ та припускається збіжність ряду $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu}) p^{-\nu}$.

Оператор D^γ диференціювання $\gamma > 0$ визначений на функціях $\varphi \in D$ формулою [4]

$$(D^\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma-1} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) dy + \right. \\ &\left. + \int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x-y) dy + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma} \varphi(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}$ – p -адичний аналог гамма-функції.

Якщо у другому інтегралі формули (3) відняти та додати $|y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x)$, і скористатися тим, що

$$\begin{aligned} \int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} dy &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|y|_p = p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1} dy = \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma-1)}, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} (D^\gamma \varphi)(x) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо $\varphi \in D$, то перетворення Фур'є функції $D^\gamma \varphi$ дорівнює $|\xi|^\gamma \tilde{\varphi}(\xi)$.

2. Аналогічно як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у вивченні фундаментального розв'язку для рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(t)(D^\alpha u)(t, x) = 0.$$

Покладемо

$$G(t, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \exp \left\{ -|\sigma|_p^\alpha \int_0^t a(\tau) d\tau \right\} d\sigma. \quad (5)$$

Згідно формули (2) для $x \neq 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \times \\ &\times \exp \left(-p^{-\alpha\nu} |x|_p^{-\alpha} \int_0^t a(\tau) d\tau \right) - \\ &- |x|_p^{-1} \exp \left(-p^\alpha |x|_p^{-\alpha} \int_0^t a(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Розкладаючи експоненти у ряд, міняючи порядки сумування та просумувавши геометричну прогресію, отримуємо, що для $x \neq 0$

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1 - p^{\alpha m}}{1 - p^{-\alpha m - 1}} \times \\ &\times \left(\int_0^t a(\tau) d\tau \right)^m |x|_p^{-\alpha m - 1}. \quad (6) \end{aligned}$$

Із формули (5) легко побачити, що функція $G(t, x)$ неперервна для $x \in \mathbb{Q}_p$, $t > 0$. Оцінимо $|G(t, x)|$ [5].

Лема 1. Нехай $a(t) \geq \mu > 0$, тоді має місце нерівність

$$\begin{aligned} |G(t, x)| &\leq C \cdot t(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}, \\ x &\in \mathbb{Q}_p, t > 0, \quad (7) \end{aligned}$$

де C не залежить від t, x .

Доведення. Згідно формули (5)

$$|G(t, x)| \leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu t |\sigma|_p^\alpha) d\sigma.$$

Нехай ціле число k таке, що $p^{k-1} \leq t^{1/\alpha} \leq p^k$. Виберемо $\tau \in \mathbb{Q}_p$ так, щоб $|\tau|_p = p^{k-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} |G(t, x)| &\leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu p^{\alpha(k-1)} |\sigma|_p^\alpha) d\sigma = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu |\tau \sigma|_p^\alpha) d\sigma = |\tau|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu |\eta|_p^\alpha) d\eta = \\ &= p^{-k} p \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu |\eta|_p^\alpha) d\eta \leq C t^{-1/\alpha}. \end{aligned}$$

З іншої сторони, із (6) отримуємо, що для $t > 0$, $|x|_p \geq t^{1/\alpha}$

$$|G(t, x)| \leq |x|_p^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m!} (t |x|_p^{-\alpha})^m \leq C t |x|_p^{-\alpha-1}.$$

Із двох останніх нерівностей отримуємо (7), тобто якщо $|x|_p \geq t^{1/\alpha}$, то

$$\begin{aligned} |x|_p^{-\alpha-1} &\leq \left(\frac{1}{2} |x|_p + \frac{1}{2} t^{1/\alpha} \right)^{-\alpha-1} = \\ &= 2^{\alpha+1} (|x|_p + t^{1/\alpha})^{-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Якщо $|x|_p < t^{1/\alpha}$, то

$$(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1} \geq 2^{-\alpha-1} \cdot t^{-1-1/\alpha},$$

або

$$t^{-1/\alpha} \leq 2^{\alpha+1} (t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}.$$

Лема доведена.

Лема 2. Нехай виконуються умови лема 1, тоді мають місце нерівності

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) \right| \leq c(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}, \quad (8)$$

$$|(D_x^\gamma G)(t, x)| \leq c(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\gamma-1}, \quad (9)$$

де c не залежить від t, x .

Нерівності (8), (9) доводяться аналогічно, як і нерівність (7).

3. Перейдемо до побудови періодичного розв'язку рівняння (1). В образах Фур'є розв'язок (1) запишеться у вигляді

$$V(t, \sigma) = cQ(t, 0, \sigma) + \int_0^t Q(t, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau,$$

де

$$Q(t, \tau, \sigma) = \exp \left\{ -|\sigma|_p^\alpha \int_\tau^t a(s) ds \right\},$$

$$\tilde{f}(t, \sigma) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x\sigma) f(t, x) dx.$$

Для знаходження періодичного розв'язку скористаємося умовою

$$V(t + \omega, \sigma) = V(t, \sigma). \quad (10)$$

Оскільки (10) виконується при довільних $t \geq 0$, то покладаючи $t = 0$ отримаємо

$$c = (1 - Q(\omega, 0, \sigma))^{-1} \int_0^\omega Q(\omega, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau.$$

Маємо

$$\begin{aligned} V(t, \sigma) &= \int_0^\omega Q(t, 0, \sigma) (1 - Q(\omega, 0, \sigma))^{-1} \times \\ &\times Q(\omega, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau + \\ &+ \int_0^t Q(t, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Застосовуючи до (11) обернене перетворення Фур'є, будемо мати зображення періодичного розв'язку рівняння (1)

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^\omega d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G_1(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (12)$$

де введено таке позначення

$$G_1(t, \tau, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\sigma x) Q(t, 0, \sigma) \times$$

$$\times (1 - Q(\omega, 0, \sigma)) Q(\omega, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\sigma,$$

а $G(t, \tau, x)$ визначається формулою (5).

Будемо припускати, що

$$1 - Q(\omega, 0, \sigma) \neq 0,$$

тоді допустимо розвинути у ряд

$$(1 - Q(\omega, 0, \sigma))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Q(\omega, 0, \sigma))^k.$$

Використовуючи лему 1, для функції $G_1(t, \tau, x)$ буде правильна оцінка

$$\begin{aligned} |G_1(t, \tau, x)| &\leq C \cdot (t + \omega - \tau) \times \\ &\times ((t + \omega - \tau)^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $x \in \mathbb{Q}_p$, $t \geq 0$.

Перейдемо безпосередньо до розгляду розв'язку рівняння (1). Будемо припускати, що $f \in \mathfrak{M}_\beta$ рівномірно відносно t і неперервна по (t, x) , $0 \leq \beta < \alpha$. Розв'язок рівняння будемо шукати у класі функцій $u(t, x)$ неперервних періодичних на $\mathbb{Q}_p \times [0, +\infty)$, неперервних диференційовних за змінною t , які належать за змінною $x \in \mathbb{Q}_p$ класу $\mathfrak{M}_\beta$ рівномірно відносно t .

Правильна теорема.

Теорема. *Періодичний розв'язок рівняння (1) існує і подається у вигляді (12), а для G , G_1 мають місце оцінки (5), (8), (9), (13).*

Доведення теореми випливає із леми 1 та леми 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ареф'єва И.Я., Волович И.В. Суперсимметрия: теория Калуцы-Клейна, аномалии, суперструны // УФН-1985. Т. 146, вып. 4. – С. 655–681.
2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
3. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление // ТМФ. – 1984. – Т. 59, № 1. – С. 3–27.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1988. – Т. 43, вып. 5. – С. 17–53.
5. Кочубей А.Н. Параболические уравнения над полем p -адических чисел. Мат. УССР. Известия, 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1312–1330.
6. Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятнецкий-Шапиро И.И. Теория представления и автоморфные функции. – М.: Наука, 1966. – 321 с.
7. Bruhat F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentation des groupes p -adiques // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89, N 1. – P. 43–75.