УДК 517.51

©2013 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НОВІ ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ДЕЯКИХ ОСЛАБЛЕНЬ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Досліджуються характеризації різних ослаблень неперервності в термінах замикання. Зокрема встановлено, що відображення f є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної передвідкритої множини A, такої, що $int\overline{A}$ – область.

We study characterizations of various weakening of continuity in terms of the closure. In particular, we prove that a mapping f is a B-quasi-continuous if and only if $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ for any pre-open set A such that $int\overline{A}$ is a connected open set.

1. Вступ. Добре відомою є характеризація неперевності відображення в термінах його замикання: відображення f між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної підмножини A простору X, де $\overline{A}$ означає замикання множини A.

К.Келлум у [1] увів поняття функції Ґібсона, а саме, відображення $f : X \to Y$ називається *функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для всіх відкритих множин U в X. В [2] О.Карлова та В.Михайлюк встановили, що поняття майже неперервності та поняття функції Ґібсона означають одне і теж.

П.С.Келлер в [3] увів властивість щільності відображення ("dense mapping property", коротко DMP). Відображення $f : X \to Y$ має властивість DMP, якщо $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$ для довільної підмножини D простору X, такої, що $\overline{D}$ є зв'язною множиною. Р.Мімна в [4] встановив, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість DMP. В [5] Я.Борсіком було показано, що якщо відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y має властивість DMP, то f є B-квазінеперервним, а також наведено приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка є B-квазінеперервною, але не має властивості DMP. Також в [4] Р.Мімна показав, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$ для довільної ніде не щільної множини N.

Крім майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності існує велика кількість інших ослаблень неперервності (квазінеперервність, периферійна неперервність, ледь неперервність тощо). Виникає природний інтерес дослідити чи допускають інші ослаблення неперервності подібну характеризацію з допомогою включення $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, що виконується для множини A з певної системи $\mathcal{A}$. В цій статті характеризиції знайдено для властивості Юнґа, B-квазінеперервності, α-неперервності, ледь неперервності та майже ледь неперервності. Досліджено також з цієї точки зору і периферійну неперервність. На жаль, для квазінеперервності такої характеризації не знайдено.

2. $\mathcal{A}$-неперервність. Нехай X і Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – деяка система підмножин простору X і $f : X \to Y$ – відображення. Ми кажемо, що відображення f є $\mathcal{A}$-*неперервним*, якщо $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

Спочатку перенесемо результат Р.Мімни з [4] на випадок топологічних просторів.

Теорема 2.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, причому простір X задовольняє умову:*

($\star$) *для довільної підмножини A в X і точки $x \in \overline{A} \setminus A$ існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x \in \overline{N}$,*

і $\mathcal{N}$ – система ніде не щільних підмножин *простору X. Відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{N}$-неперервним.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Припустимо, що відображення f є $\mathcal{N}$-неперервним і не є неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y такий, що для довільного околу U точки x_0 в X існує точка $x_U \in U$, така, що $f(x_U) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_U \in X : U -$ окіл точки $x_0\}$. Очевидно, що $x_0 \in \overline{A} \setminus A$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Тоді за умовою існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x_0 \in \overline{N}$. З $\mathcal{N}$-неперервності відображення f, замкненості множини $Y \setminus V$ і умови $N \subseteq A$ випливає, що

$$f(x_0) \in f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Однак, $f(x_0) \in V$, що приводить до суперечності.

Зауважимо, що якщо простір має ізольовані точки, то він не задовольняє умову $(\star)$. Те, що простір X в теоремі 2.1 не має ізольованих точок, є істотною умовою. Це показує наступний приклад.

Приклад. Нехай $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ – простір з індукованою топологією. Визначимо функцію $f : X \to \mathbb{R}$ так: $f(x) = 0$, якщо $x \neq 0$ і $f(0) = 1$. Так визначена функція є розривною в точці $x = 0$. Єдиною непорожньою ніде не щільною множиною в X є одноточкова множина $N = \{0\}$. Зрозуміло, що $\overline{N} = N$. Тоді

$$f(\overline{N}) = f(N) = \{1\} = \overline{\{1\}} = \overline{f(N)}.$$

Отже, функція f є $\mathcal{N}$-неперервною, але розривною.

Теорема 2.2. *Якщо X – гаусдорфовий простір з першою аксіомою зліченності без ізольованих точок, то він задовольняє умову $(\star)$.*

Доведення. Нехай $A \subseteq X$, $x \in \overline{A} \setminus A$ і $\mathcal{V}$ – зліченна база точки x. Візьмемо довільну точку $x_1 \in A$. З гаусдорфовості випливає, що існують відкриті околи U_1 і V_1 точок x_1 і x відповідно, такі, що $V_1 \in \mathcal{V}$ і $U_1 \cap V_1 = \varnothing$. Оскільки $x \in \overline{A}$, то існує точка $x_2 \in V_1 \cap A$. Знову з гаусдорфовості простору X випливає, що існують відкриті околи U_2 і V_2 точок x_2 і x відповідно, такі, що $V_2 \in \mathcal{V}$ і $V_2 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_1$ і $U_2 \cap V_2 = \varnothing$. Зауважимо, що $U_2 \cap U_1 = \varnothing$. Продовживши це процес до безмежності ми отримаємо послідовність точок (x_n) і послідовність попарно неперетинних відкритих множин (U_n), такі, що $N = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq A$ і $x_n \in U_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що множина N ніде не щільна. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину G в X. Нехай $G \cap N \neq \varnothing$. Тоді існує номер n_0, такий, що $x_{n_0} \in G$. Оскільки простір X без ізольованих точок, то існує точка $x' \in G \cap U_{n_0}$ і $x' \neq x_{n_0}$. З гаусдорфовості простору X випливає, що існує відкритий окіл G' точки x', такий, що $x_{n_0} \notin G'$. Тоді множина $H = G \cap G' \cap U_{n_0}$ відкрита непорожня, $x_{n_0} \notin H$ і $H \subseteq G$. Крім того, $H \cap U_n = \varnothing$ для всіх номерів $n \neq n_0$, бо послідовність (U_n) складається із попарно неперетинних відкритих множин. Тому $H \cap N = \varnothing$ і це означає, що множина N ніде не щільна.

3. Майже неперервність та функції Ґібсона. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже неперервним (в розумінні Гусейна) в точці* $x \in X$ [6], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in \overline{intA}$ і $f(A) \subseteq V$, де $intA$ означає внутрішність множини A. Якщо відображення f майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним.*

О.Карлова та В.Михайлюк в [2] встановили наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай X та Y – топологічні простори і $\mathcal{G}$ – система відкритих підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервне тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}$-неперервним.*

Цю теорему можна доповнити таким чином. Підмножина A простору X називається *напіввідкритою* [7], якщо $A \subseteq \overline{intA}$. Очевидно, що кожна відкрита множина є напіввідкритою.

Теорема 3.2. *Нехай X та Y – топологі-*

чні простори, $\mathcal{G}_s$ – система напіввідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}_s$-неперервним.

Доведення. Якщо f – майже неперервне, то за теоремою 3.1 f є функцією Ґібсона, тобто $f(\overline{G}) \subseteq \overline{f(G)}$ для кожної відкритої множини G, а тоді для кожної напіввідкритої множини A маємо, що

$$f(\overline{A}) \subseteq f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(intA)} \subseteq \overline{f(A)},$$

бо множина $G = intA$ відкрита і $A \subseteq \overline{intA}$.

Навпаки, нехай відображення f є $\mathcal{G}_s$-неперервним. Оскільки $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_s$ і відображення f є $\mathcal{G}_s$-неперервним, то відображення f є $\mathcal{G}$-неперервним. Тоді з теореми 3.1 випливає, що f є майже неперервним.

З теорем 3.1 та 3.2 одержуємо наступний очевидний результат.

Наслідок 3.3. *Для топологічних просторів X та Y і відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

(1) f – майже неперервне;

(2) f є функцією Ґібсона;

(3) f є $\mathcal{G}_s$-неперервним.

4. Властивість Юнґа та слабкі функції Ґібсона. У [2], поряд з поняття функції Ґібсона, розглядається поняття слабкої функції Ґібсона. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабкою функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$ для довільної області (відкритої та зв'язної множини) O в X.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість Юнґа* [8], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існують послідовності (x'_n) і (x''_n), такі, що $x'_n \le x'_{n+1} < x$, $x''_n \ge x''_{n+1} > x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x)$.

Теорема 4.1. *Нехай $\mathcal{O}$ – система всіх областей в $\mathbb{R}$ (тобто, система всіх інтервалів в $\mathbb{R}$). Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{O}$-неперервною.*

Доведення. Нехай f має властивість Юнґа і $A \in \mathcal{O}$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ і окіл V точки y. Нехай x – це така точка, що $x \in \overline{A}$ і $f(x) = y$. Якщо $x \in A$, то $y \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$. Нехай $x \notin A$. Оскільки A є відкритим інтервалом і $x \in \overline{A} \setminus A$, то $A = (x, \omega)$, де $x < \omega \le +\infty$, або $A = (\omega, x)$, де $-\infty \le \omega < x$. Припустимо, що $A = (x, \omega)$. Оскільки f має властивість Юнґа, то існує послідовність (x_n), така, що $x_n \ge x_{n+1} > x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Тоді існує такий номер N, що $x_N \in A$ і $f(x_N) \in V$. Тому $f(A) \cap V \ne \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Аналогічно міркується у випадку $A = (\omega, x)$. Отже, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є $\mathcal{O}$-неперервною.

Навпаки, нехай функція f є $\mathcal{O}$-неперервною. Припустимо, що функція f не має властивості Юнґа. Тоді існують точка x_0, відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та інтервали $A = (x, x+\delta)$, або $A = (x, x+\delta)$, де $\delta > 0$, такі, що $f(A) \subseteq \mathbb{R} \setminus V$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, $A \in \mathcal{O}$, функція f є $\mathcal{O}$-неперервною і множина $\mathbb{R} \setminus V$ замкнена, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus V} = \mathbb{R} \setminus V.$$

Це суперечить тому, що V є околом точки x_0. Одержана суперечність завершує доведення.

Наслідок 4.2. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є слабкою функцією Ґібсона.*

5. Периферійна неперервність. Для множини A топологічного простору X через $frA = \overline{A} \setminus intA$ позначимо її межу. Відображення $f : X \to Y$ називається *периферійно неперервним у точці* $x \in X$ [9], якщо для довільних відкритих околів U і V точок x в X і $y = f(x)$ в Y відповідно, існує відкритий окіл G точки x в X, такий, що $G \subseteq U$ і $f(frG) \subseteq V$, і просто *периферійно неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці. Для $X = Y = \mathbb{R}$ периферійна неперервність еквівалентна властивості Юнґа [8, с. 495].

Теорема 5.1. *Нехай X – T_1-простір та Y – топологічний простір, $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в X і $f : X \to Y$ – периферійно неперервне відображення. Тоді f є $\mathcal{C}$-неперервним.*

Доведення. Нехай відображення f периферійно неперервне. Розглянемо зв'язну множину A в X. Нехай $y \in f(\overline{A})$, V – окіл точки y в Y, точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$.

Якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$. Справді, якщо $A \neq \{x\}$, то існує точка $a \in A$, так, що $a \neq x$. Оскільки простір X задовольняє аксіому T_1, то існує окіл U_a точки x, такий, що $a \notin U_a$ і тоді $U_a \not\supseteq A$. А це суперечить тому, що $U \cap A \supseteq A$ для довільного околу U точки x. Таким чином, якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$ і тому $y = f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$.

Нехай існує відкритий окіл U_0 точки x, такий, що $U_0 \cap A \not\supseteq A$. З периферійної неперервності відображення f в точці x випливає, що існує відкрита непорожня G в X, така, що $G \subseteq U_0$ і $f(frG) \subseteq V$. Оскільки $G \cap A \neq \varnothing$, бо $x \in \overline{A}$, $G \not\supseteq A$, бо $G \subseteq U_0$ і множина A є зв'язною, то $frG \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in frG \cap A$. Тоді $f(a) \in f(frG) \subseteq V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $y \in \overline{f(A)}$.

В обох випадках ми одержуємо, що $y \in \overline{f(A)}$, отже $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є $\mathcal{C}$-неперервним.

Наслідок 5.2. *Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наступні умови еквівалентні:*

(1) f має властивість Юнґа;

(2) f є слабкою функцією Ґібсона;

(3) f периферійно неперервна;

(4) f є $\mathcal{C}$-неперервною.

Доведення. Імплікацію (1) $\Leftrightarrow$ (2) доведено у пункті 4 (наслідок 4.2). Те, що (1) $\Leftrightarrow$ (3) встановлено у [8, с. 495]. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (4) випливає з теореми 5.1. З означення $\mathcal{C}$-неперервності легко вивести, що (4) $\Rightarrow$ (2).

Питання. Нехай $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в $\mathbb{R}^2$ і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{C}$-неперервна функція. Чи буде f периферійно неперервною?

6. B-квазінеперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *B-квазінеперервним у точці $x \in X$* [5], якщо для довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y і довільної області O в X, такої, що $x \in \overline{O}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(U) \subseteq V$. Якщо відображення B-квазінеперервне у кожній точці, то воно називається *B-квазінеперервним.* Поняття B-квазінеперервності є узагальненням поняття двосторонньої квазінеперервності на випадок відображень між довільними топологічними просторами.

Підмножина A простору X називається *передвідкритою* [10], якщо $A \subseteq int\overline{A}$.

Лема 6.1. *Якщо O – область в топологічному просторі X, $A \subseteq X$ і $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$, то $int\overline{A}$ – область в X.*

Доведення. Якби множина $int\overline{A}$ була не зв'язною, то існували б відкриті непорожні множини U_1 та U_2, такі, що $U_1 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$, $U_2 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Зрозуміло, що тоді б $U_i \cap \overline{A} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $\overline{A} = \overline{O}$, то $U_i \cap \overline{O} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. З властивості множини U_i випливає, що $U_i \cap O \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $O \subseteq int\overline{A}$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$, то $O \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Тоді $O = (U_1 \cap O) \sqcup (U_2 \cap O)$, що суперечить зв'язності множини O. Отже, множина $int\overline{A}$ зв'язна. Таким чином, $int\overline{A}$ – область.

Теорема 6.2. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{O}_p = \{A \in 2^X : A$ – передвідкрита множина і $int\overline{A}$ – область$\}$. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{O}_p$-неперервним.*

Доведення. Нехай спочатку відображення f є B-квазінеперервним і $A \in \mathcal{O}_p$, тобто, A – передвідкрита множина, така, що $int\overline{A}$ – область. Візьмемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ та окіл V точки y. Нехай x – це така точка з множини $\overline{A}$, що $f(x) = y$. Покажемо, що $x \in \overline{int\overline{A}}$. Справді, нехай U – довільний окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. Але з передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Отже, $x \in \overline{int\overline{A}}$.

За умовою $int\overline{A}$ є областю. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq int\overline{A}$, а отже, $G \subseteq \overline{A}$, і $f(G) \subseteq V$. Оскільки G – відкрита непорожня множина і $G \subseteq \overline{A}$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Тому $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і, таким чином, $y \in \overline{f(A)}$. Оскільки y була довільною точкою множини $f(\overline{A})$, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Це означає, що відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервне.

Навпаки, нехай тепер відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервним. Покажемо, що f – B-квазінеперервне відображення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є B-квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існують відкритий окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і область O в X, для якої $x_0 \in \overline{O}$, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq O$ маємо, що $f(G) \nsubseteq V$. Таким чином, для довільної відкритої непорожньої множини G в X, такої, що $G \subseteq O$, існує точка $x_G \in G$, що $f(x_G) \notin V$. Розглянемо множину $A = \{x_G \in X : G$ – відкрита непорожня множина в X і $G \subseteq O\}$. Зрозуміло, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$.

Зауважимо, що $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$. Тоді $O = intO \subseteq int\overline{A}$ і $A \subseteq O \subseteq int\overline{A}$. Отже, множина A передвідкрита, а згідно з лемою 6.1 множина $int\overline{A}$ зв'язна.

Оскільки відображення f є $\mathcal{O}_p$-неперервне, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Але з другого боку, $f(x_0) \in V$, бо V – окіл точки $f(x_0)$. Одержана суперечність завершує доведення.

Наведемо ще одну характеризацію B-квазінеперервності. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним в точці* $x \in X$ [11], якщо для довільних околів U і V відповідно точок $x \in X$ і $y = f(x) \in Y$ існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Відображення називається *квазінеперервним*, якщо вона є таким в кожній точці. Кажуть, що функція $f : X \to Y$ має *властивість Дарбу* [12], якщо $f(A)$ є зв'язною множиною для довільної зв'язної множини A в X. В [13] Я.Борсік встановив, що коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною і має властивість Дарбу, то вона двосторонньо квазінеперервна. Там же було наведено приклад функції, який показує, що обернене твердження не вірне. Тут ми узагальнимо цей результат.

Теорема 6.3. *Нехай X – локально зв'язний простір і Y – топологічний простір. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервним і є слабкою функцією Ґібсона.*

Доведення. Нехай відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним. Перевіримо спочатку, що f є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну область O в просторі X. Оскільки множина O відкрита, то $O \subseteq int\overline{O}$ і тому O – передвідкрита множина. Згідно з лемою 6.1 множина $int\overline{O}$ є областю. Таким чином, $O \in \mathcal{O}_p$. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що

$$f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}.$$

Це означає, що f є слабкою функцією Ґібсона.

Тепер встановимо квазінеперервність. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та околи U і V точок x в X і $f(x)$ в Y відповідно. Існує відкритий зв'язний окіл O точки x, такий, що $O \subseteq U$. Таким околом буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу точки x, що містить цю точку і міститься в U. Оскільки відображення f B-квазінеперервне, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, відображення f квазінеперервне в точці x.

Навпаки, нехай відображення $f : X \to Y$ є квазінеперервним і є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну точку $x \in X$, відкритий окіл V точки $f(x)$ в Y і область O в X, таку, що $x \in \overline{O}$. З означення слабкої функції Ґібсона випливає, що $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$. Оскільки $x \in \overline{O}$, то $f(x) \in \overline{f(O)}$, і тому $V \cap f(O) \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_1 \in O$, така, що $f(x_1) \in V$. З квазінеперервності відображення f і того, що множини O і V є околами точок x_1 в X і $f(x_1)$ в Y відповідно випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, f – B-квазінеперервне в точці x.

Наслідок 6.4. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервною і має вла-*

стивість Юнґа.

7. α-неперервність. Множина A називається *α-відкритою* [14], якщо $A \subseteq int(\overline{intA})$. Легко переконатися [14, твердження 4], що множина A є α-відкритою в X тоді і тільки тоді, коли $A = U \setminus N$, де U – відкрита множина в X, а N – ніде не щільна. Відображення $f : X \to Y$ називається *α-неперервним у точці* $x \in X$ [15], якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує α-відкрита множина A в X, така, що $x \in A$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *α-неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Лема 7.1. *Нехай $(A_s)_{s\in S}$ – система передвідкритих множин в X. Тоді множина $A = \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ передвідкрита.*

Доведення. Нехай $x \in A$. Тоді існує $s \in S$, що $x \in A_s$. Оскільки множина A_s передвідкрита, то $x \in int\overline{A_s}$. Тоді $x \in int\overline{A_s} \subseteq int\overline{A}$. Отже, A – передвідкрита множина.

Теорема 7.2. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_p$ – система всіх передвідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{G}_p$-неперервним.*

Доведення. Нехай спочатку відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним. Розглянемо довільну множину $A \in \mathcal{G}_p$, точку $y \in f(\overline{A})$ і V – окіл точки y в Y. Тоді існує точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f є α-неперервним в точці x, то існує α-відкрита множина E, така, що $x \in E$ і $f(E) \subseteq V$. З α-відкритості множини E випливає, що існують відкрита множина U в X і ніде не щільна множина N в X, такі, що $E = U \setminus N$. Зрозуміло, що U – окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. З передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Покладемо $G = U \cap int\overline{A}$. Оскільки $G \subseteq int\overline{A} \subseteq \overline{A}$, то множина A щільна в множині G. Тоді $A \cap (G \setminus N) \neq \varnothing$, бо множина N ніде не щільна. З того, що $G \subseteq U$ ми одержуємо, що і $A \cap (U \setminus N) \neq \varnothing$, отже, $A \cap E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $a \in A \cap E$, а тому $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, і значить відображення f є $\mathcal{G}_p$-неперервним.

Навпаки, нехай f є $\mathcal{G}_p$-неперервним. Припустимо, що f не є α-неперервним в деякій точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 і довільної ніде не щільної множини N в X існує точка $x_N \in U \setminus N$, така, що $f(x_N) \notin V$. Розглянемо множину $A_U = \{x_N :$ $N -$ ніде не щільна підмножина $U\}$. Множина A_U десь щільна, бо якби вона була ніде не щільна, то існувала б точка $x_{A_U} \in U \setminus A_U$, яка за визначенням множини A_U їй належала. Таким чином, існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 існує десь щільна в U множина A_U, така, що $A_U \subseteq U$ і $f(A_U) \subseteq Y \setminus V$.

Для кожного відкритого околу U точки x_0 розглянемо множину $E_U = A_U \cap int\overline{A_U}$. Зрозуміло, що $E_U \neq \varnothing$ і $E_U \subseteq U$. Покажемо, що множина E_U є передвідкритою. Для цього треба встановити, що $E_U \subseteq int\overline{E_U}$. Зауважимо, що оскільки $G = int\overline{A_U} \subseteq \overline{A_U}$, то

$$G \subseteq \overline{A_U \cap G} = \overline{A_U \cap int\overline{A_U}} = \overline{E_U}.$$

З відкритості множини G випливає, що $G = intG \subseteq int\overline{E_U}$. Таким чином,

$$E_U = A_U \cap int\overline{A_U} = A_U \cap G \subseteq int\overline{E_U}.$$

Отже, множина E_U передвідкрита.

Розглянемо множину

$$A = \bigcup \{E_U : U - \text{ відкритий окіл точки } x_0\}.$$

Зрозуміло, що $x_0 \in \overline{A}$. Згідно з лемою 7.1 множина A є передвідкритою. Тому за припущенням маємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

А це суперечить тому, що $f(x_0) \in V$.

8. Ледь неперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *ледь неперервним в точці* $x \in X$ [16], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G, така, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Теорема 8.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D} = \{A \in 2^X : \overline{A} = X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{D}$-неперервним.*

Доведення. Досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A.

Нехай відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне і A – всюди щільна в X множина. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З ледь неперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $f(G) \subseteq V$. Оскільки $\overline{A} = X$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in G \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є ледь неперервним в точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$, такий, що для довільної відкритої непорожньої множини G в X існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_G : G-$ відкрита непорожня в $X\}$. Очевидно, що множина A всюди щільна в X. Тоді

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Одержана суперечність завершує доведення.

9. Майже ледь неперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже ледь неперервним в точці* $x \in X$ [17], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Теорема 9.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D}_n = \{X \setminus N : N -$ ніде не щільна множина в $X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є майже ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{D}_n$-неперервним.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 8.1 досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X.

Нехай відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне і $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З майже ледь неперервності відображення f випливає, що існує десь щільна множина E в X, така, що $f(E) \subseteq V$. Оскільки N – ніде не щільна в X, $A = X \setminus N$ і множина E десь щільна в X, то $E \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in E \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $f(X) = \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є майже ледь неперервним в точці x_0. Тоді існують відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та множина $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X, такі, що $f(A) \in Y \setminus V$. В такому разі

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V,$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Отримана суперечність, яка і завершує доведення.

10. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-неперервність. Узагальнюючи поняття B-квазінеперервності, введемо нове поняття. Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ – деякі системи підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ називається $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної непорожньої множини $A \in \mathcal{A}$, з умови $x \in \overline{A}$ випливає, що існує множина $B \in \mathcal{B}$, така, що $B \subseteq A$ і $f(B) \subseteq V$. Відображення f називається $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

В [5] було показано, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y є неперервним в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної відкритої множини U в X з умови $x \in \overline{U}$ випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Звідси слідує, що відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$-неперервне.

З означення B-квазінеперервності випливає, що відображення $f : X \to Y$ є B-

квазінеперервним тоді і тільки, коли f є $(\mathcal{O}, \mathcal{G})$-неперервним.

Очевидною є наступна проста характеризація $\mathcal{A}$-неперервності.

Теорема 10.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – система підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли для для кожної точки $x \in X$, довільного околу V точки $f(x)$ в Y та довільної множини $A \in \mathcal{A}$ в X, такої, що $x \in \overline{A}$ існує точка $a \in A$, що $f(a) \in V$.*

Позначимо через $\mathcal{P}$ – систему всіх одноточкових множин в X. Використовуючи теорему 10.1 та встановлені вище результати ми одержуємо, що для відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y:

майже неперервність рівносильна $(\mathcal{G}_s, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 3.2);

B-квазінеперервність рівносильна $(\mathcal{O}_p, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 6.2);

α-неперервність рівносильна $(\mathcal{G}_p, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 7.2);

ледь неперервність рівносильна $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 8.1);

майже ледь неперервність рівносильна $(\mathcal{D}_n, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 9.1).

Якщо простір X задовольняє умову $(\star)$ з пункту 2, то для відображення $f : X \to Y$ неперервність рівносильна $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 2.1);

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ властивість Юнґа рівносильна $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$-неперервності (теорема 4.1);

Автор вдячний Маслюченку Володимиру Кириловичу за корисні зауваження, які дозволили поліпшити оригінальну версію цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kellum K.R.* Functions that separate $X \times \mathbb{R}$ // Real Anal. Exch. Summer Symposium 2009. – P. 21-23.

2. *Karlova O.O. Mykhaylyuk V.V.* On Gibson functions with connected graphs // Math. Slovaca. – 2013. – **63**, N3. – C. 479-492.

3. *Keller P.S.* Chaotic behavior of Newton's method // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, N. 2. – P. 490–507.

4. *Mimna R.A.* Omega-limit sets and non-continuous functions // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, N. 1. – P. 267-273.

5. *Borsík J.* Bilateral quasicontinuity in topological spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2004. – **28**. – P. 159-168.

6. *Husain T.* Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

7. *Levine N.* Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces // Amer. Math. Monthly. – 1963. – **70**. – P. 36-41.

8. *Gibson R.G., Natkaniec T.* Darboux like functions // Real Anal. Exch. – 1996. – **22**, 2. – P. 492-533.

9. *Stallings J.* Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. – 1959. – **47.** – P. 249-263.

10. *Mashhour A.S., Hasanein I.A., El-Deeb S.N.* A note on semi-continuity and precontinuity // Indian J. Pure Appl. Math. – 1982. –**13**, N. 10. – P. 1119–1123.

11. *Kempisty S.* Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. –**19**. – P. 184-197.

12. *Bruckner A.M., Ceder Jack G.* Darboux continuity // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. – 1965. – **67**. – P. 93-117.

13. *Borsík J.* On the points of bilateral quasicontinuity of functions // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 529-536.

14. *Njåstad O.* On some classes of nearly open sets // Pacific J. Math. – 1965. – **15**. – P. 961–970.

15. *Noiri T.* A function which preserves connected spaces // Casopis Pest. Mat. – 1982. – **101**. – P. 393-396.

16. *Frolík Z.* Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings // Czech. Math. J. – 1961. – **11**. – P. 381-385.

17. *Маслюченко В.К.* Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N.2. – С. 213-218.