УДК 515.12, 517.51

©2015 р. О.Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ

Показано, що для топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n, T$, таких, що $X_2, \ldots, X_n$ задовольняють першу, а T – другу аксіоми зліченності, у кожного нарізно неперервного відображення f, що задане на добутку $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ і набуває значень у просторах $C_p(T)$ чи $C_k(T)$ всіх неперервних функцій $z : T \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової чи компактної збіжності відповідно, множина $C(f)$ його точок неперервності є залишковою в X.

We prove the following result. Let $X_1, \ldots, X_n, T$ be topological spaces with $X_2, \ldots, X_n$ first countable and T second countable. If $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ is a separately continuous mapping, where Z is the space of all continuous functions $z : T \to \mathbb{R}$ with the topology of either pointwise convergence $C_p(T)$ or compact-open topology $C_k(T)$, then the continuity point set $C(f)$ is residual in the product $X_1 \times \cdots \times X_n$.

1. Вступ. Дослідження множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями у вичерпних та напіввичерпних просторах було розпочато у праці [1] і продовжено в [2-5]. Так, в [1] вивчалася множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to C_p[0,1]$ зі значеннями у напіввичерпному, але не σ-метризовому просторі $C_p[0,1]$ всіх неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій з топологією поточкової збіжності. При цьому було встановлено лише залишковість множини $C(f)$ для таких відображень, визначених на добутку топологічного простору X і простору Y, що задовольняє першу аксіому зліченності. Але питання про залишковість множин $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ та множини $C_Y(f) = \{\{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишилося без відповіді. Виявляється, що відповідь на це питання негативна. В тезах [6] було наведено приклад нарізно неперервного відображення $f_0 : [0,1]^2 \to C_p[0,1]$, яке розривне у кожній точці множини $([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$.

Природно постало питання про точки сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to C_k(T)$ зі значеннями у просторі $C_k(T)$ всіх неперервних функцій з топологією компактної збіжності, який є вичерпним, якщо простір T польський [7, 8].

В даній статті ми розвиваємо результати з [1], досліджуємо нарізно неперервні відображення $f : X \times Y \to C_k(T)$ і розглядаємо випадок функцій від n змінних.

2. Допоміжні твердження. Нехай T – топологічний простір і $C(T)$ – множина всіх неперервних функцій $z : T \to \mathbb{R}$.

Символом $C_p(T)$ ми позначаємо простір неперервних функцій $z : T \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, топологічна структура якого породжується множиною переднорм $p_t(z) = |z(t)|$, де $t \in T$. Базу околів нуля в цьому локально опуклому просторі утворюють множини

$$W_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{z \in C(T) : \max_{1 \le k \le n} |z(t_k)| < \varepsilon\},$$

де $\varepsilon > 0$ і $t_1, \ldots, t_n$ – довільні точки з множини T.

Символом $C_k(T)$ ми позначаємо простір $C(T)$ з топологією компактної збіжності. Топологічна структура простору $C_k(T)$ породжується множиною переднорм

$$p_K(z) = \|z\|_K = \max_{t \in K} |z(t)|,$$

де K – довільна компактна підмножина множини T. Базу околів нуля в цьому просторі утворюють множини

$$W_{K,\varepsilon} = \{z \in C(T) : p_K(z) < \varepsilon\},$$

де $\varepsilon > 0$ і K – компактна множина в T.

Твердження 1. *Нехай X і T – топологічні простори. Відображення $f : X \to C_p(T)$ буде неперервним в точці $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in T$ функція $f_t(x) = f(x)(t)$ є неперервною в точці x_0.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай f неперервне в точці x_0 і $h_0 = f(x_0) \in C(T)$. Тоді для довільного базисного околу $W = W_{t_1,...,t_n,\varepsilon} = \{h \in C(T) : (\forall i = 1,...,n)\, |h(t_i) - h_0(t_i)| < \varepsilon\}$ точки h_0 у просторі $C_p(T)$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(U) \subseteq W$. Візьмемо $t_0 \in T$ і перевіримо, що функція $f_{t_0} : X \to \mathbb{R}$ неперервна в точці x_0. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий окіл U точки x_0 в X, що $|f_{t_0}(x) - f_{t_0}(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Для цього розглянемо окіл $W = \{h \in C(T) : |h(t_0) - h_0(t_0)| < \varepsilon\}$ точки h_0 у просторі $C_p(T)$, породжений точкою t_0. Для нього існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $f(U) \subseteq W$. Для $x \in U$ маємо, що $f(x) \in W$, а значить, $|f_{t_0}(x) - f_{t_0}(x_0)| = |f(x)(t_0) - f(x_0)(t_0)| < \varepsilon$, що й треба було довести.

Достатність. Нехай функція f_t неперервна в точці x_0 для кожного $t \in T$. Перевіримо неперервність функції f в точці x_0. Розглянемо базисний окіл $W = W_{t_1,...,t_n,\varepsilon}$ точки $h_0 = f(x_0)$ у просторі $C_p(T)$ і знайдемо окіл U точки x_0 в X такий, що $f(U) \subseteq W$. Оскільки функції f_{t_i} неперервні в точці x_0 для $i = 1,...,n$, то існують такі околи U_i точки x_0, що для всіх $x \in U_i$ виконуються нерівності $|f_{t_i}(x) - f_{t_i}(x_0)| < \varepsilon$. Покладемо $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тоді для всіх $x \in U$ і для всіх $i = 1,...,n$ маємо

$$|f(x)(t_i) - f(x_0)(t_i)| = |f_{t_i}(x) - f_{t_i}(x_0)| < \varepsilon.$$

Отже, $f(U) \subseteq W$.

Твердження 2. *Нехай X і T – топологічні простори. Відображення $f : X \to C_k(T)$ буде неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо функція $g(x,t) = f(x)(t)$ є сукупно неперервною в кожній точці множини $\{x_0\} \times T$.*

Доведення. Нехай $x_0 \in X$ і функція $g : X \times T \to \mathbb{R}$, яка діє за правилом $g(x,t) = f(x)(t)$, неперервна на множині $\{x_0\} \times T$. Покажемо, що відображення $f : X \to C_k(T)$ неперервне в точці x_0. Для цього розглянемо довільну компактну множину K в просторі T і точку $q_t = (x_0, t)$, де $t \in K$. Оскільки $q_t \in C(g)$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існують такий окіл U_t і відкритий окіл O_t точок x_0 і t в просторах X і T відповідно, що для всіх точок $(x,s) \in U_t \times O_t$ виконується нерівність $|g(x,s) - g(x_0,t)| < \varepsilon/2$.

Розглянемо відкрите покриття $\{O_t : t \in K\}$ компактної множини K, і виберемо з нього скінченне підпокриття $\{O_{t_1}, ..., O_{t_n}\}$ множини K. Виберемо відповідні околи $U_{t_1}, ..., U_{t_n}$ точки x_0 в просторі X і покладемо $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{t_i}$. Множина U також є околом точки x_0 в просторі X. Нехай $x \in U$. Для довільного $t \in K$ існує номер i такий, що $t \in O_{t_i}$. Тоді

$$|g(x,t) - g(x_0,t)| \le$$

$$\le |g(x,t) - g(x_0,t_i)| + |g(x_0,t_i) - g(x_0,t)| <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

адже $(x,t) \in U \times O_{t_i} \subseteq U_{t_i} \times O_{t_i}$ і $(x_0,t) \in U_{t_i} \times O_{t_i}$. Отже, $\|f(x) - f(x_0)\|_K = \max\limits_{t \in K} |g(x,t) - g(x_0,t)| < \varepsilon$. Це і означає, що $x_0 \in C(f)$.

В праці [9] було встановлено загальні теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень від багатьох змінних. Нам буде потрібна наступна теорема, яка є наслідком теореми 6 з [9].

Теорема A. *Якщо $X_1, \ldots, X_{n+1}$ – топологічні простори, причому $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, а X_{n+1} задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метризовний простір, то для кожного нарізно неперервного відображення $f : X_1 \times \cdots \times X_{n+1} \to Z$ множина $C_{X_{n+1}}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n : \{(x_1, \ldots, x_n)\} \times X_{n+1} \subseteq C(f)\}$ залишкова в добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

3. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в просторі $C_p(T)$. Наступна теорема розвиває теорему 6 з [1].

Теорема 1. *Нехай X, Y і T – топологічні простори, причому Y задовольняє* *першу, а T – другу аксіоми зліченності і $f : X \times Y \to C_p(T)$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C(f)$ залишкова в добутку $X \times Y$.*

Доведення. Розглянемо відображення $g : X \times Y \times T \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $g(x, y, t) = f(x, y)(t)$. Покажемо, що $g : X \times Y \times T \to \mathbb{R}$ – це нарізно неперервна функція. Неперервність відносно t випливає з того, що $f(x, y) \in C(T)$ для довільної точки $(x, y) \in X \times Y$. Зафіксуємо точки $y \in Y$ і $t \in T$ і розглянемо функцію $g_{y,t} : X \to \mathbb{R}$, для якої $g_{y,t}(x) = g(x, y, t)$. З нарізної неперервності відображення $f : X \times Y \to Z$ маємо, що відображення $f_y = f(\cdot, y) : X \to Z$ є неперервним. Тоді за твердженням 1 для кожного $t \in T$ функція $f_{y,t}(x) = f_y(x)(t)$ є неперервною. Але $f_y(x)(t) = f(x, y)(t) = g(x, y, t)$, отже, $g_{y,t} = f_{y,t}$, а значить, функція $g_{y,t}$ неперервна. Так само можна показати, що відображення g є неперервним відносно змінної y. Згідно із теоремою А, множина $C_T(g) = \{(x, y) \in X \times Y : \{(x, y)\} \times T \subseteq C(g)\}$ є залишковою в добутку $X \times Y$. Доведемо, що $C_T(g) \subseteq C(f)$. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in C_T(g)$. Це означає, що для кожного $t \in T$ функція $f(x, y)(t) = g_t(x, y)$ є неперервною в точці p_0. Тому за твердженням 1 відображення $f : X \times Y \to C_p(T)$ є неперервним в точці p_0. Отже, множина $C(f)$ містить залишкову в $X \times Y$ множину $C_T(g)$, а значить, сама є залишковою в добутку $X \times Y$.

Теорему 1 можна узагальнити.

Теорема 2. *Нехай $X_1, \dots, X_n$ і T – топологічні простори, причому $X_2, \dots, X_n$ задовольняють першу, а T – другу аксіоми зліченності і $f : X_1 \times \dots \times X_n \to C_p(T)$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C(f)$ залишкова в добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$.*

Доведення. Розглянемо відображення $g : X_1 \times \dots \times X_n \times T \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $g(x_1, \dots, x_n, t) = f(x_1, \dots, x_n)(t)$. Функція g є неперервною відносно останньої змінної t, адже $f(x_1, \dots, x_n)$ – це неперервна на T функція. Як і в доведенні теореми 1 можна показати, що функція g є неперервною і відносно кожної змінної x_k як і функція f. Тоді за теоремою А, множина $C_T(g)$ є залишковою в добутку X. Згідно з твердженням 1 маємо, що $C_T(g) \subseteq C(f)$. Отже, множина $C(f)$ містить залишкову в X множину $C_T(g)$, а значить, сама є залишковою в добутку X.

4. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в просторі $C_k(T)$.

Виявляється, що за допомогою твердження 2, теорему 1 можна перенести на випадок, коли в ролі простору значень виступає простір $C_k(T)$.

Теорема 3. *Нехай X, Y і T – топологічні простори, причому Y задовольняє першу, а T – другу аксіоми зліченності, і $f : X \times Y \to C_k(T)$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C(f)$ залишкова в $X \times Y$.*

Доведення. Як і раніше, розглянемо відображення $g : X \times Y \times T \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $g(x, y, t) = f(x, y)(t)$. Як і в доведенні теореми 1 можна показати, що $g : X \times Y \times T \to \mathbb{R}$ – це нарізно неперервна функція. Згідно із теоремою А, множина $C_T(g) = \{(x, y) \in X \times Y : \{(x, y)\} \times T \subseteq C(g)\}$ є залишковою в добутку $X \times Y$. Але згідно з твердженням 2 маємо, що $C_T(g) \subseteq C(f)$. Отже, множина $C(f)$ містить залишкову в $X \times Y$ множину $C_T(g)$, а значить, сама є залишковою в добутку $X \times Y$.

Теорему 3 можна узагальнити.

Теорема 4. *Нехай $X_1, \dots, X_n$ і T – топологічні простори, причому $X_2, \dots, X_n$ задовольняють першу, а T – другу аксіоми зліченності і $f : X_1 \times \dots \times X_n \to C_k(T)$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C(f)$ залишкова в добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$.*

Доведення. Розглянемо відображення $g : X_1 \times \dots \times X_n \times T \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $g(x_1, \dots, x_n, t) = f(x_1, \dots, x_n)(t)$. Як і раніше, легко показати, що функція g є нарізно неперервною. Тоді за теоремою А, множина $C_T(g)$ є залишковою в добутку X. За твердженням 2 маємо, що $C_T(g) \subseteq C(f)$. Тому і множина $C(f)$ є залишковою в добутку X.

Висловлюю щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за допомогу та поради при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С. 111-121.

2. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінґа і нарізно неперервні відображення // Мат. студії. – 2012. – **38**, №2. – С. 188-193.

3. *Мироник О.Д.* Про нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Сідра // Буков. мат. журн. – 2013. – Т.1, №3-4. – С. 100–105.

4. *Мироник О.Д.* До питання про неперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в площині Сідра // Буков. мат. журн. – 2014. – Т.2, №2-3, – С. 173–176.

5. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Про неперервність KC-функцій зі значеннями в площині Сідра // Карп. мат. публ. – 2014. – **6**, №2. – С. 329–336. DOI: 10.15330/cmp.6.2.329-336.

6. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 20-26 лютого 2012 р., Ворохта: тези доп. – Івано-Франківськ. – 2012. – С. 5–6.

7. *Gartside P., Reznichenko E.* Near metric properties of function spaces // Fund. Math. – 2000. – **164**, N2. – P. 97–114.

8. *Reznichenko E.A.* Stratifiability of $C_k(X)$ for a class of separable metrizable X // Topology Appl. – 2008. – **155**. – P. 2060–2062.

9. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39–45.