УДК 515.51

©2015 р. В.І. Мироник, В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У КЛАСІ НАРІЗНО $L$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлюється загальний вигляд $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$ розв'язків $f : X^2 \to Z$ рівняння $Df_y(x)(h) + Df^x(y)(Du(h)) = 0$, де $D$ – оператор диференціювання і $u : X \to X$ – диференційовне відображення тензорного типу, у класі нарізно диференційовних неперервних відображень і у випадку $X = \mathbb{R}^n$.

We obtain a general representation $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$ for solutions $f : X^2 \to Z$ of the differential equation $Df_y(x)(h) + Df^x(y)(Du(h)) = 0$, where $D$ is the differentiation operator and $u : X \to X$ is a differentiable operator of tensor type, in the class of separately differentiable continuous mappings and in the case $X = \mathbb{R}^n$.

## 1 Вступ

Р. Бер у [1] розв'язав диференціальне рівняння

$$f'_x + f'_y = 0 \tag{1}$$

для неперервних нарізно диференційовних функцій. Він довів, що всі неперервні розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$f(x,y) = \varphi(x - y).$$

Разом з тим Р. Бер поставив питання про те, чи істотною є умова сукупної неперервності функції $f$, тобто чи зберігається вигляд розв'язків рівняння (1) для нарізно диференційовних функцій. Пізніше результат Р. Бера іншим способом був доведений у [4], а у [6] була одержана позитивна відповідь на питання Р. Бера.

Розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними у класі функцій, які задовольняють мінімальні вимоги (тобто у класі нарізно диференційовних, нарізно двічі диференційовних функцій), вивчалися у роботах [7], [3], [5], [2]. Зокрема, у [8, 9] досліджувалися розв'язки рівняння

$$f'_x(x,y) + \alpha(x) f'_y(x,y) = 0, \tag{2}$$

де $\alpha$ – функція, яка має первісну $u$. В [9] було встановлено, що розв'язки цього рівняння у класі нарізно диференційовних функцій мають вигляд $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$.

У даній статті ми, використовуючи вищезгаданий результат з [9] одержимо опис розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними у абстрактних просторах.

## 2 Випадок відображень, визначених на $\mathbb{R}^2$

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x,y) \in X \times Y$ позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$.

Спочатку ми розглянемо випадок диференційовності відносно певної множини функцій.

Нехай $Z$ – довільна множина і $L$ – довільна система функцій $l : Z \to \mathbb{R}$. Відображення $f : \mathbb{R} \to Z$ називається *$L$-диференційовним у точці* $x_0 \in \mathbb{R}$ (дивись [6]), якщо для довільної функції $l \in L$ композиція $l \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l \circ f(x) = l(f(x))$, є диференційовним в точці $x_0$. При цьому відображення $Df(x_0) : L \to \mathbb{R}$,

$$Df(x_0)(l) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l(f(x_0 + \Delta x)) - l(f(x_0))}{\Delta x},$$

називається *$L$-похідною відображення $f$ в точці* $x_0$. Крім того, $Df(x_0)(l)$ позначатимемо $Df(x_0, l)$.

Відображення $f : \mathbb{R} \to Z$ називатимемо *$L$-диференційовним*, якщо $f$ є $L$-диференційовним в кожній точці $x \in X$.

Кажуть, що система $L$ функцій, визначених на множині $Z$, розділяє точки в $Z$, якщо для довільних різних точок $z_1, z_2 \in Z$ існує $l \in L$ таке, що $l(z_1) \neq l(z_2)$.

**Теорема 1.** *Нехай $Z$ – деяка множина, $L$ – система функцій $l : Z \to \mathbb{R}$, яка розділяє точки в $Z$, $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ – нарізно $L$-диференційовне відображення, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – диференційовне відображення, $\alpha = u'$ такі, що*

$$Df_y(x, l) + \alpha(x) Df^x(y, l) = 0 \qquad (3)$$

*для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, $l \in L$. Тоді існує $L$-диференційовне відображення $\varphi : \mathbb{R} \to Z$ таке, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$.*

**Доведення.**

Спочатку доведемо існування відображення $\varphi : \mathbb{R} \to Z$ такого, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо $l \in L$ і покладемо $g(x, y) = g_l(x, y) = l(f(x, y))$. Тоді для довільних $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ маємо, що

$$g'_x(x_0, y_0) = (l \circ f_{y_0})'(x_0) = Df_{y_0}(x_0, l)$$

і

$$g'_y(x_0, y_0) = (l \circ f^{x_0})'(y_0) = Df^{x_0}(y_0, l).$$

Отже, згідно з (3), маємо

$$g'_y(x, y) + \alpha(x) g'_x(x, y) = 0$$

для довільних $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, тобто функція $g$ є розв'язком рівняння виду (2). Тому згідно з теоремою з [9] існує диференційовна функція $\varphi_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $g_l(x, y) = \varphi_l(u(x) - y)$.

Отже, якщо $u(x_1) - y_1 = u(x_2) - y_2$ для деяких $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, то $l(f(x_1, y_1)) = l(f(x_2, y_2))$, для кожного $l \in L$. Оскільки $L$ розділяє точки в $Z$, то $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Таким чином, існує відображення $\varphi : \mathbb{R} \to Z$ таке, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}$. Тепер з $L$-диференційовності відображення $f$ відносно другої змінної випливає $L$-диференційовність відображення $\varphi$.

Тепер перейдемо до розгляду класичного диференціювання.

Нехай $X$ і $Z$ топологічні векторні простори. Відображення $f : X \to Z$ називається *диференційовним у напрямку $h \in X$ в точці $x_0 \in X$*, якщо існує границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = Df(x_0)(h) \in Z$$

для кожного $h \in X$. Якщо відображення $f$ диференційовне в точці $x_0 \in X$ у кожному напрямку $h \in X$ і оператор $Df(x_0) : X \to Z$ лінійний, то $f$ називається *диференційовним за Ґато в точці* $x_0$. У випадку $X = \mathbb{R}$ диференційовне за Ґато відображення $f : \mathbb{R} \to Z$ називатимемо просто *диференційовним*, адже для таких відображень диференційовність за Ґато в точці рівносильна диференційовності в довільному відмінному від нуля напрямку. При цьому границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

називатимемо *похідною відображення $f$ в точці $x$* і позначатимемо її через $f'(x)$.

**Наслідок 1.** *Нехай $Z$ – топологічний векторний простір, у якому його спряжений простір $Z^*$ розділяє точки, $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ – нарізно диференційовне відображення, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – диференційовне відображення, $\alpha = u'$ такі, що*

$$f'_x(x, y) + \alpha(x) f'_y(x, y) = 0 \qquad (4)$$

*для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Тоді існує диференційовне відображення $\varphi : \mathbb{R} \to Z$ таке, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$.*

**Доведення.**

Аналогічно, як при доведенні наслідку 5.2 з [6], легко переконатися, що

$$Df_y(x, l) + \alpha(x) Df^x(y, l) = 0$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, $l \in Z^*$, де $D$ – оператор $Z^*$-диференціювання. Тому згідно з теоремою 1 маємо $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$ для деякого відображення $\varphi : \mathbb{R} \to Z$, яке, зрозуміло, є диференційовним.

## 3 Основний результат

Тепер перейдемо до розгляду випадку, коли $X$ – топологічний векторний простір.

Відображення $f : X \to Y$, яке діє з топологічного векторного простору $X$ у топологічний векторний простір $Y$, називатимемо *відображенням тензорного типу*, якщо існують базис $(e_i)_{i\in I}$ простору $X$ і базисна сім'я $(y_i)_{i\in I}$ в просторі $Y$, які для кожного $i \in I$ задовольняють наступні умови:

(1) $\{f(\alpha e_i) : \alpha \in \mathbb{K}\} \subseteq \{\alpha y_i : \alpha \in \mathbb{K}\}$;

(2) $f(\alpha_i e_i + x) = f(\alpha_i e_i) + f(x)$ для кожного $x = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \alpha_j e_j \in X$.

**Теорема 2.** *Нехай $Z$ – топологічний векторний простір, у якому його спряжений $Z^*$ розділяє точки, $X$ – гаусдорфовий топологічний векторний простір, $f : X^2 \to Z$ – нарізно диференційовне в кожному напрямку відображення, $u : X \to X$ – диференційовне в кожному напрямку відображення тензорного типу такі, що*

$$Df_y(x)(h) + Df^x(y)(Du(h)) = 0 \qquad (5)$$

*для всіх $x, y \in X$ і $h \in X$. Тоді якщо виконується одна з наступних умов:*

*$(i)$ простір $X$ – скінченновимірний;*

*$(ii)$ відображення $f$ неперервне,*

*то існує диференційовне в кожному напрямку відображення $\varphi : X \to Z$ таке, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$.*

**Доведення.** Оскільки $u$ тензорного типу, то існують базис $(e_i)_{i\in I}$ і базисна сім'я $(y_i)_{i\in I}$ в просторі $X$, які задовольняють умови (1) і (2) для відображення $u$. Для кожного $i \in I$ покладемо

$$X_i = \{\alpha e_i : \alpha \in \mathbb{K}\} \text{ і } Y_i = \{\alpha y_i : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Спочатку доведемо таке твердження
*для довільних $i \in I$, $x = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \alpha_j e_j \in X$, $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in Y$ і $z_1, z_2 \in X_i$ з $u(z_1) - \tilde{y}_1 = u(z_2) - \tilde{y}_2$ виконується рівність*

$$f(x + z_1, \tilde{y}_1) = f(x + z_2, \tilde{y}_2).$$

Оскільки $\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2 = u(z_2) - u(z_1) \in Y_i$, то існують $y_0 \in Y$ і $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $\tilde{y}_1 = y_0 + t_1 y_i$ і $\tilde{y}_2 = y_0 + t_2 y_i$. Розглянемо відображення $g : \mathbb{R}^2 \to Z$, $g(s,t) = f(x + se_i, y_0 + ty_i)$, і $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(s) = \frac{u(se_i)}{y_i}$. Зауважимо, що

$$g'_s(s,t) = Df_{y_0+ty_i}(x + se_i)(e_i)$$

і

$$g'_t(s,t) = Df^{x+se_i}(y_0 + ty_i))(y_i).$$

Крім того, з умов (1) і (2) випливає рівність

$$v'(s) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{u(se_i + \Delta se_i) - u(se_i)}{\Delta s y_i} =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0} \frac{u(x + se_i + \Delta se_i) - u(x + se_i)}{\Delta s y_i} =$$

$$= \frac{Du(x + se_i)(e_i)}{y_i}.$$

Тепер використовуючи рівність (5) одержимо

$$g'_s(s,t) + v'(s)g'_t(s,t) = Df_{y+ty_i}(x + se_i)(e_i) +$$

$$+ Df^{x+se_i}(y + ty_i))(v'(s)y_i) =$$

$$= Df_{y+ty_i}(x + se_i)(e_i) +$$

$$+ Df^{x+se_i}(y + ty_i))(Du(x + se_i)(e_i)) = 0.$$

Тому згідно з наслідком 1 існує відображення $\psi : \mathbb{R} \to Z$ таке, що $g(s,t) = \psi(v(s) - t)$.

Виберемо $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такі, що $z_1 = \beta e_i$ і $z_2 = \gamma e_i$. Зауважимо, що

$$v(\beta) - t_1 = \frac{u(\beta e_i) - t_1 y_i}{y_i} = \frac{u(z_1) - \tilde{y}_1 + y_0}{y_i} =$$

$$= \frac{u(z_2) - \tilde{y}_2 + y_0}{y_i} = \frac{u(\gamma e_i) - t_2 y_i}{y_i} = v(\gamma) - t_2.$$

Тепер маємо

$$f(x + z_1, \tilde{y}_1) = g(\beta, t_1) = \psi(v(\beta) - t_1) =$$

$$= \psi(v(\gamma) - t_2) = g(\gamma, t_2) = f(x + z_1, \tilde{y}_2)$$

і твердження доведене.

Перейдемо до доведення теореми. Як і раніше, достатньо довести існування відображення $\varphi$.

$(i)$. Нехай $\dim(X) = n$ і $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Нехай, крім того,

$$x' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad x'' = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k,$$

$$y' = \sum_{k=1}^{n} s_k y_k \quad \text{і} \quad y'' = \sum_{k=1}^{n} t_k y_k$$

такі, що $u(x') - y' = u(x'') - y''$. Оскільки $y_1, \dots, y_n$ лінійно незалежні, то з (1) і (2) випливає, що $u(\alpha_k e_k) - s_k y_k = u(\beta_k) - t_k y_k$ для кожного $k \le n$.

Для кожного $k = 0, \dots n$ покладемо

$$\tilde{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i$$

і

$$\tilde{y}_k = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + \sum_{i=k+1}^{n} s_i y_i.$$

Зауважимо, що $\tilde{x}_0 = x'$, $\tilde{x}_n = x''$, $\tilde{y}_0 = y'$, $\tilde{y}_n = y''$ і $u(\tilde{x}_k) - \tilde{y}_k = u(x') - y'$ для кожного $k = 0, \dots, n$. Крім того, згідно з вищедоведеним твердженням маємо

$$f(\tilde{x}_{k-1}, \tilde{y}_{k-1}) = f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$$

для кожного $k = 1, \dots, n$. Тому

$$f(x', y') = f(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = f(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \dots =$$
$$= f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = f(x'', y'').$$

Отже, $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$ для деякого відображення $\varphi : X \to Z$ і твердження $(i)$ доведене.

$(ii)$. Нехай

$$x' = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad x'' = \sum_{i \in I} \beta_i e_i,$$

$y', y'' \in Y$ такі, що $u(x') - y' = u(x'') - y''$. Тоді згідно з (1) і (2) маємо

$$u(x'') - u(x') = y'' - y' = \sum_{i \in I} t_i y_i$$

для деякої сім'ї $(t_i)_{i \in I}$ скалярів $t_i \in \mathbb{R}$.

Для кожної скінченної множини $J \subseteq I$ покладемо

$$x_J = x' + \sum_{i \in J} (\beta_i - \alpha_i) e_i$$

і

$$y_J = y' + \sum_{i \in J} t_i y_i.$$

Зауважимо, що згідно з (1) і (2) для кожної скінченної множини $J \subseteq I$ маємо

$$u\left(\sum_{i \in J} \beta_i e_i\right) - u\left(\sum_{i \in J} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i \in J} t_i y_i.$$

Тому

$$u(x_J) - y_J = u\left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i e_i\right) + u\left(\sum_{i \in J} \beta_i e_i\right) - y' -$$
$$- \sum_{i \in J} t_i y_i = u\left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i e_i\right) + u\left(\sum_{i \in J} \alpha_i e_i\right) +$$
$$+ \sum_{i \in J} t_i y_i - y' - \sum_{i \in J} t_i y_i = u(x') - y'.$$

Тепер використовуючи доведену вище властивість і міркуючи аналогічно, як при доведенні $(i)$, одержимо, що

$$f(x_J, y_J) = f(x', y')$$

для кожної скінченної множини $J \subseteq I$.

Нехай $(\mathcal{I}, \le)$ – система всіх скінченних підмножин $J \subseteq I$, впорядкована по включенню, тобто $J_1 \le J_2$ означає, що $J_1 \subseteq J_2$. Зауважимо, що

$$x'' = \lim_{J \in \mathcal{I}} x_J, \quad \text{і} \quad y'' = \lim_{J \in \mathcal{I}} y_J.$$

Використовуючи сукупну неперервність відображення $f$ в точці $(x'', y'')$ одержимо

$$f(x'', y'') = \lim_{J \in \mathcal{I}} f(x_J, y_J) = f(x', y').$$

Отже, $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$ для деякого відображення $\varphi : X \to Z$.

## 4 Заключні зауваження, питання

Аналогічні до теореми 2 результати мають місце і для нарізно диференційовних за Ґато чи за Фреше відображень. Крім того, як видно з доведення теореми 1 для одержання вигляду

$$f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$$

розв'язків $f$ рівняння (5) достатньо розглянути випадок $Z = \mathbb{R}$. Разом з тим, нам невідомо, наскільки істотними в теоремі 2 є умова тензорного типу на відображення $u$, а також умови $(i)$ та $(ii)$.

**Питання 3.** *Нехай $X$ – топологічний векторний простір, $f : X^2 \to \mathbb{R}$ – нарізно диференційовне в кожному напрямку (за Ґато, за Фреше) відображення, $u : X \to X$ – диференційовне в кожному напрямку (за Ґато, за Фреше) відображення такі, що*

$$Df_y(x)(h) + Df^x(y)(Du(h)) = 0$$

*для всіх $x, y \in X$ і $h \in X$. Чи існує відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}$ таке, що $f(x, y) = \varphi(u(x) - y)$, якщо:*

*$(a)$ $X = \mathbb{R}^2$;*

*$(b)$ $X = \mathbb{R}^n$;*

*$(c)$ відображення $f$ сукупно неперервне;*

*$(d)$ відображення $u$ має тензорний тип і простір $X$ – гаусдорфовий;*

*$(e)$ простір $X$ – гаусдорфовий?*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Baire R.*Sur lesfonctions de variables relles.* Annali di mat. pura ed appl., ser.3, 1899, 1–123.
2. Banakh T.,Mykhaylyuk V.V. *Separately twice differentiable functions and the equation of string oscillation.* Real Anal. Exch. 2012/2013, **38**(1), 133–156.
3. Bruckner A.M., Petruska G., Preiss O., Thomson B.S. *The equation $u_x u_y = 0$ factors.* Acta. Math. Hung. 1991, **57** (3-4), 275–278.
4. Chernoff P.R., Royden H.F. *The equation $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.* Am. Math. Mon. 1975, **82**(5), 530–531.
5. Kalancha A.K., Maslyuchenko V.K. *Generalization of Bruckner-Petruska-Preiss-Thomson theorem.* Mat. Stud. 1999, **11**(1), 48–52. (in Ukrainian)
6. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Solving of partial differential equations under minimal conditions.* J. Math. Phys., Anal., Geom. 2008,**4**(2), 252–266.
7. Maslyuchenko V.K. *A property of partial derivatives.* Ukr. Math. J. 1987, **39**(4), 529–531. (in Russian)
8. Мироник В.І., Михайлюк В.В. Лінійні рівняння з частинними похідними першого порядку у класі нарізно диференційовних функцій // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т.5, №1. – С. 89-93.
9. Мироник В.І., Михайлюк В.В. Рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у класі нарізно диференційовних функцій // Мат. студії. – 2014. – **42**, №1. – С. 33-37.