УДК 54C30

©2015 р. О.В. Маслюченко[1),2)], Д.П. Онипа[1)]

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича [1)]
Instytut matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku, Polska[2)]

# ПРО ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ЛОКАЛЬНО ЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗНИХ ПРОСТОРАХ

Доведено, що довільна підмножина $F$ деякого локально лінійно зв'язного метризовного компакту $Y$ є граничною множиною деякої неперервної функції $f : (0; 1] \to Y$ в точці 0 у тому і тільки тому випадку, якщо вона є непорожньою замкненою і зв'язною.

We prove that every subset $F$ of some locally arcwise connected metrizable compact $Y$ is the cluster set of a continuous function $f : (0; 1] \to Y$ at 0 if and only if it is nonempty closed and connected.

## 1 Вступ

Задача про побудову функцій з даним коливанням детально вивчена першим співавтором (див., наприклад, [1,2]). Проте в згаданих працях вивчалася поведінка функції всередині області визначення функції. Дослідження функцій на межі їх області визначення розпочате нами в [3]. Множинним аналогом коливання функції є поняття граничної множини. Тому дослідження функцій на межі їх областей визначення пов'язані з теорією многозначних відображень.

**Означення 1.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – щільний підпростір простору $\overline{Y}$, $D$ – підмножина простору $X$ і $f : D \to Y$ – деяке відображення.* Граничною множиною функції $f$ в точці $x \in \overline{D}$ *називається множина*

$$\overline{f}(x) = \bigcap_{U-\text{ окіл } x} \overline{f(U \cap D)}.$$

*Таким чином, відображенню $f : D \to Y$ ставиться у відповідність деяка мультифункція $\overline{f} : \overline{D} \multimap \overline{Y}$, яку ми називатимемо* граничною мультифункцією відображення $f$.

В цьому означенні, як і протягом усієї статті для пар просторів $X \subseteq \overline{X}$ чи $Y \subseteq \overline{Y}$ риска $\overline{E}$ над множиною $E$ завжди означає замикання множини у ширшому просторі $\overline{X}$ чи, відповідно, $\overline{Y}$. Нескладно зрозуміти, що якщо $\mathcal{B}_x$ – база околів точки $x$ в $X$, то

$$\overline{f}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{B}_x} \overline{f(U \cap D)}.$$

Зауважимо, що неперервність функції $f$ в точці $x \in D$ рівносильна тому, що $\overline{f}(x) = \{f(x)\}$. Крім того, у випадку коли $\overline{Y}$ є метричним компактом, матимемо, що коливання $\omega_f(x)$ функції $f$ в точці $x \in \overline{D}$ рівне діаметру граничної множини $\overline{f}(x)$. Таким чином, гранична мультифункція $\overline{f}$ є многозначним аналогом коливання $\omega_f$.

В [4] було отримано відповідь на наступну загальну проблему у випадку метризовного простору $X$, замкненої множини $L$, $Y = \mathbb{R}$ і $\overline{Y} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

**Проблема.** *Нехай $L = \overline{D} \setminus D$, $X$ – топологічний простір, $Y$ – щільний підпростір компактного топологічного простору $\overline{Y}$. Для яких мультифункцій $\Phi : L \multimap \overline{Y}$ існує така неперервна функція $f : D \to Y$, що $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ для кожного $x \in L$?*

Дана стаття присвячена розв'язанню цієї задачі для випадку, коли $X = \mathbb{R}$, $D = (0; 1]$, а $Y$ – локально лінійно зв'язно вкладений підпростір метризовного компакту $\overline{Y}$.

## 2 Побудова функцій з даними граничними множинами

Нагадаємо, що *континуумом Пеано* називається зв'язний локально зв'язний компакт.

З класичної теореми Гана-Мазуркевича [5] випливає, що метризовні континууми Пеано – це в точності неперервні образи відрізка.

**Лема 1.** *Нехай $X$ – метризовний континуум Пеано, $x^* \in X$ і $a < b$. Тоді існує неперервна сюр'єкція $f : [a; b] \to X$ така, що $f(a) = f(b) = x_0$.*

**Доведення.** За теоремою Гана-Мазуркевича [5] існує неперервна сюр'єкція $g : [0; 1] \to X$. Виберемо $s^* \in [0; 1]$ таке, що $g(s^*) = x^*$. Для довільних точок $t', t'', s', s'' \in \mathbb{R}$ таких, що $t' \neq t''$ визначимо функцію $f^{s',s''}_{t',t''} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за правилом

$$f^{s',s''}_{t',t''}(t) = \frac{s'' - s'}{t'' - t'}(t - t') + s' \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

Ясно, що лінійна функція $f^{s',s''}_{t',t''}$ сюр'єктивно відображає відрізок з кінцями $t'$ і $t''$ на відрізок з кінцями $s'$ і $s''$, причому $f^{s',s''}_{t',t''}(t') = s'$ і $f^{s',s''}_{t',t''}(t'') = s''$. Розглянемо числа $t_k$ та $s_k$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ такі, що $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$ і $s_0 = s^*$, $s_1 = 0, s_2 = s^*, s_3 = 1, s_4 = s^*$. Визначимо тепер функцію $f : [a; b] \to X$, покладаючи $f(t) = g\left(f^{s_{k-1},s_k}_{t_{k-1},t_k}(t)\right)$ при $t_{k-1} \le t \le t_k$ і $k = 1, 2, 3, 4$. Нескладно переконатися, що функція $f$ є шуканою.

**Теорема 1.** *Нехай $Y$ – щільний підпростір деякого компактного топологічного простору $\overline{Y}$, $F$ – непорожня замкнена підмножина $\overline{Y}$, для якої існує послідовність метризовних континуумів Пеано $F_n \subseteq Y$ таких, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k} = F$. Тоді існує неперервна функція $f : (0; 1] \to Y$ така, що $\overline{f}(0) = F$.*

**Доведення.** Виберемо точку $y^* \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Розглянемо строго спадну нескінченно малу послідовність чисел $a_n > 0$ таку, що $a_1 = 1$. Далі для довільного $n \in \mathbb{N}$, використавши лему 1 з $X = F_n$, $a = a_{n+1}$, $b = a_n$, побудуємо неперервну сюр'єкцію $f_n : [a_{n+1}; a_n] \to F_n$ таку, що $f_n(a_{n+1}) = f_n(a_n) = y^*$. Визначимо тепер функцію $f : (0; 1] \to Y$, покладаючи $f(t) = f_n(t)$ при $t \in [a_{n+1}; a_n]$ і $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що функція $f$ є неперервною, адже її значення в точках $a_n$ рівне $y^*$ і на кожному з відрізків $[a_{n+1}; a_n]$ вона неперервна. Крім того, $f([a_{n+1}; a_n]) = F_n$ для кожного $n$.

Далі, оскільки відрізки $[0; a_n]$ утворюють базу околів нуля в $[0; 1]$, то

$$\overline{f}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f((0; a_n])} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} [a_k; a_{k+1}]\right)}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} f\Big([a_k; a_{k+1}]\Big)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k} = F.$$

Отже, $\overline{f}(0) = F$.

## 3 Локально лінійно зв'язно вкладені підпростори

**Означення 2.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $x, y \in X$. Множина $L_{x,y} \subseteq X$ називаєтьcя* неперервною кривою, що з'єднує точки $x$ та $y$, *якщо існує неперервна сюр'єкція $f : [0; 1] \to L_{x,y}$ така, що $f(0) = x$ і $f(1) = y$.*

**Означення 3.** *Підпростір $X$ топологічного простору $Y$ називаєтьcя* локально лінійно зв'язно вкладеним в $Y$, *якщо для довільної точки $a \in Y$ і довільного її околу $U$ в $Y$ існує такий окіл $V$ точки $a$ в $Y$, що для довільних точок $x, y \in V \cap X$ існує неперервна крива $L_{x,y} \subseteq U \cap X$, що з'єднує точки $x$ та $y$.*

Зрозуміло, що локально лінійно зв'язно вкладений підпростір деякого локально лінійно зв'язного простору сам буде локально лінійно зв'язним простором. Проте не кожний локально лінійно зв'зний підпростір локально лінійно зв'язного простору буде локально лінійно зв'язно вкладеним. Наприклад, числова пряма $\mathbb{R}$ є локально лінійно зв'язним підпростором простору $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, який гомеоморфний колу в $\mathbb{R}^2$, проте $\mathbb{R}$ не є локально лінійно зв'язно вкладеним підпростором $\alpha\mathbb{R}$. З іншого боку $\mathbb{R}$ є локально лінійно зв'язно вкладеним підпростором $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. А також, $\mathbb{R}^n$

є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Можна встановити, що при $n \geq 2$ простір $\mathbb{R}^n$ буде локально лінійно зв'язно вкладеним у свою одноточкову компактифікацію Александрова $\alpha\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Не складно встановити, що простір $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, наділений топологією добутку, є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. За теоремою Андерсона-Кадеця [6, с. 172] кожний сепарабельний локально опуклий повнометризовний топологічний векторний простір гомеоморфний до $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тому справедливий наступний факт.

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – сепарабельний локально опуклий повнометризовний топологічний векторний простір. Тоді існує метризовний компактний простір $\overline{X}$ такий, що $X$ є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{X}$, причому $X$ всюди щільний в $\overline{X}$.*

Таким чином природно виникає наступне питання.

**Питання 1.** *Для яких (сепарабельних метризовних) локально лінійно зв'язних просторів $X$ існує (метризовний) компактний простір $\overline{X}$, для якого $X$ є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{X}$ і $X$ щільний в $\overline{X}$.*

Зауважимо, що якщо простір $X$ має нескінченну кількість компонент зв'язності, то не існує компактного простору $\overline{X}$, для якого $X$ є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{X}$.

**Питання 2.** *Чи для кожного сепарабельного метризовного зв'язного локально лінійно зв'язного простору $X$ існує метризовний компакт $\overline{X}$, для якого $X$ є локально лінійно зв'язно вкладеним в $\overline{X}$ і $X$ щільний в $\overline{X}$.*

## 4 Допоміжні твердження

Для довільного метричного простору $X$ символом $d$ ми завжди позначатимемо його метрику. Для непорожньої множини $A \subseteq X$ через $d(x, A)$ позначимо відстань від $x$ до $A$, тобто $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Відстань до порожньої множини вважається рівною $+\infty$. Для довільних точки $a \in X$, множини $A \subseteq X$ і числа $\varepsilon > 0$ визначимо кулі

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\},$$

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\},$$

$$B[a, \varepsilon] = \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon\},$$

$$B[A, \varepsilon] = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Ясно, що $B(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. Нагадаємо, що підмножина $S$ метричного простору $X$ називається $\varepsilon$-сіткою множини $A$, якщо для довільного $a \in A$ існує $s \in S$ з $d(s, a) < \varepsilon$, тобто, якщо $A \subseteq B(S, \varepsilon)$. Якщо ми маємо пари метричних просторів $X \subseteq \overline{X}$ чи $Y \subseteq \overline{Y}$, то через $d$, $B(a, \varepsilon)$, $B(A, \varepsilon)$, $B[a, \varepsilon]$, $B[A, \varepsilon]$ позначатимемо метрику чи кулі у ширших просторах $\overline{X}$ чи $\overline{Y}$ відповідно.

**Лема 2.** *Нехай $X$ – всюди щільний локально лінійно зв'язно вкладеним підпростір метричного компакту $\overline{X}$, $F$ – замкнена підмножина $\overline{X}$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке додатне число $\delta < \varepsilon$, що для довільних точок $x, y \in B(F, \delta) \cap X$ з $d(x, y) < \delta$ існує неперервна крива $L_{x,y}$, що з'єднує точки $x$ та $y$, для якої $L_{x,y} \subseteq B(F, \varepsilon) \cap X$.*

**Доведення.** Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $X$ локально лінійно зв'язно вкладений в $\overline{X}$, то $X$ всюди щільний в $\overline{X}$ і для кожного $a \in F$ існує такий відкритий окіл $U_a \subseteq B(a, \varepsilon)$, що для довільних $x, y \in U_a \cap X$ існує неперервна крива $L_{x,y} \subseteq B(a, \varepsilon) \cap X$, що з'єднує точки $x$ і $y$. Тоді

$$\mathcal{U} = \{U_a : a \in F\} \cup \{\overline{X} \setminus F\}$$

є відкритим покриттям метричного компакту $\overline{X}$. За теоремою Лебеґа про покриття [7, с. 409] існує число $\lambda > 0$ таке, що $\lambda < \varepsilon$ і для кожного $x \in \overline{X}$ існує $U \in \mathcal{U}$ з $B(x, \lambda) \subseteq U$. Покажемо, що число $\delta = \frac{\lambda}{2}$ шукане. Візьмемо точки $x, y \in B(F, \delta) \cap X$ такі, що $d(x, y) < \delta$. Оскільки $B(F, \delta) = \bigcup_{z \in F} B(z, \delta)$, то існує таке $z \in F$, для якого $x \in B(z, \delta)$. Тоді $x, y \in B(z, 2\delta) = B(z, \lambda)$ Далі виберемо таке $U \in \mathcal{U}$, що $B(z, \lambda) \subseteq U$. Оскільки $U \in \mathcal{U}$ і $U \cap F \neq \emptyset$, то існує $a \in F$ таке, що $U = U_a$.

Тоді $x, y \in B(z, \lambda) \subseteq U_a$. Значить, для неперервної кривої $L_{x,y}$, що з'єднує точки $x$ та $y$ виконується, що

$$L_{x,y} \subseteq B(a, \varepsilon) \cap X \subseteq B(F, \varepsilon) \cap X.$$

**Лема 3.** *Нехай $X$ – метричний простір, $F$ – непорожня зв'язна підмножина $X$, $\delta > 0$ і $S \subseteq X$ – скінченна $\frac{\delta}{2}$-сітка множини $F$. Тоді існують число $n \in \mathbb{N}$ і скінченний набір точок $s_0, s_1, \ldots, s_n$ такі, що $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ і $d(s_{k-1}, s_k) < \delta$ для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$.*

**Доведення.** Доведемо спочатку, що для довільної непорожньої підмножини $T$ множини $S$ існують точки $s \in S \setminus T$ і $t \in T$, такі, що $d(s, t) < \delta$.

Нехай це не так і для деякої непорожньої множини $T \subset S$ виконується, що для довільних $s \in S \setminus T$ і $t \in T$ відстань $d(s, t) \geq \delta$. Значить, $B(s, \frac{\delta}{2}) \cap B(t, \frac{\delta}{2}) = \emptyset$ для довільних $s \in S \setminus T$ і $t \in T$. Розглянемо відкриті непорожні множини

$$U = \bigcup_{s \in S \setminus T} B(s, \tfrac{\delta}{2}) \text{ і } V = \bigcup_{t \in T} B(t, \tfrac{\delta}{2}).$$

Тоді маємо, що

$$U \cap V = \emptyset \text{ і } U \cup V = \bigcup_{s \in S} B(s, \tfrac{\delta}{2}) \supseteq F,$$

адже $S$ є $\frac{\delta}{2}$-сіткою множини $F$. А це суперечить зв'язності множини $F$. Таким чином, властивість виконується.

Оскільки $F \neq \emptyset$, то і $S \neq \emptyset$. Виберемо $s_0 \in S$. Якщо $S = \{s_0\}$, то покладаємо $n = 1$, і $s_1 = s_0$. Нехай $T_0 = \{s_0\}$ є власною підмножиною $S$. За властивістю, встановленою на початку доведення, існує $s_1 \in S \setminus T_0$ таке, що $d(s_0, s_1) < \delta$. Покладемо $T_1 = \{s_0, s_1\}$. Якщо $T_1 = S$, то все ясно. Нехай $T_1 \subset S$. За тою ж властивістю маємо, що існує $s \in S \setminus T_1$ і $t \in T_1$ такі, що $d(s, t) < \delta$. Якщо $t = s_1$, то покладаємо $s_2 = s$. Якщо ж $t = s_0$, то визначимо $s_2 = s_0$ і $s_3 = s$.

Далі, міркуючи індуктивно, припустимо, що вже побудовані точки $s_0, s_1, \ldots, s_k \in S$, такі, що $d(s_{i-1}, s_i) < \delta$. Позначимо

$$T_k = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}.$$

Якщо $T_k = S$, то покладаємо $n = k$ і завершуємо доведення. Нехай $T_k \subset S$. Зараз ми побудуємо наступну групу точок $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+p} \in S$ для деякого $p \in \mathbb{N}$ так, щоб $d(s_{i-1}, s_i) < \delta$ для $i = 1, 2, \ldots, k+p$ і $S_{k+p} \notin T_k$. За встановленою нами властивістю, існують точки $s \in S \setminus T_k$ і $t \in T_k$, такі, що $d(s, t) < \delta$. Оскільки $t \in T_k$, то існує $i = 0, 1, \ldots, k$ такий, що $t = s_i$.

Якщо $i = k$, то покладаємо $p = 1$ і $s_{k+1} = s$. Якщо $i = k - 1$, то покладаємо

$$p = 2, s_{k+1} = s_{k-1} \text{ і } s_{k+2} = s.$$

І так далі. Якщо $i < k - 1$, то розглянемо натуральне число $p = k - i + 1 > 2$ і визначимо точки $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+p}$ наступним чином:

$$s_{k+1} = s_{k-1}, s_{k+2} = s_{k-2}, \ldots, s_{k+p-2}$$
$$= s_{k-p+2} = s_{i+1}, s_{k+p-1} = s_{k-p+1} = s_i = t,$$
$$s_{k+p} = s.$$

Оскільки множина $S$ скінченна і на кожному кроці додається принаймні одна точка, то на деякому скінченному етапі цей процес закінчиться і ми одержимо, що

$$S = T_n = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$$

для деякого $n \in \mathbb{N}$, причому $d(s_{i-1}, s_i) < \delta$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Лема 4.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ і $L_{x_{k-1}, x_k}$ – неперервна крива, що з'єднує точки $x_{k-1}$ та $x_k$, для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді множина $L = \bigcup_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}, x_k}$ є неперервною кривою, що з'єднує точки $x_0$ та $x_n$.*

**Доведення.** Для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ виберемо неперервну сюр'єкцію $f_k : [0; 1] \to L_{x_{k-1}, x_k}$ так, щоб $f_k(0) = x_{k-1}$, а $f_k(1) = x_k$. Визначимо функцію $f : [0; 1] \to L$, покладаючи

$$f(t) = f_k(nt - k + 1),$$

якщо $t \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ для деякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки звуження функції $f$ на кожен відрізок $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ є неперервним і

$$f(\frac{k}{n} - 0) = f_k(n \cdot \frac{k}{n} - k + 1) = f_k(1) = x_k$$

та

$$f(\frac{k}{n}+0) = f_{k+1}(n\cdot\frac{k}{n}-(k+1)+1) \\ = f_{k+1}(0) = x_k$$

для кожного $k = 1, 2, \ldots, k-1$, то $f$ неперервна. Крім того, $f(0) = f_1(0) = x_0$ і $f(1) = f_n(1) = x_n$.

**Лема 5.** *Нехай $X$ – всюди щільний локально лінійно зв'язно вкладений підпростір метричного компакту $\overline{X}$, $F$ – замкнена зв'язна підмножина $\overline{X}$, $x^* \in F$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує континуум Пеано $F_\varepsilon \subseteq X$ такий, що $x^* \in F_\varepsilon$, $F \subseteq B(F_\varepsilon, \varepsilon)$ і $F_\varepsilon \subseteq B(F, \varepsilon)$.*

**Доведення.** Виберемо $\delta > 0$ за лемою 2. Оскільки $F$ компактна, то існує скінченна $\frac{\delta}{4}$-сітка $T \subseteq F$ множини $F$. Але $X$ щільний в $\overline{X}$. Тому для довільного $t \in T$ існує $s_t \in B(t, \frac{\delta}{4}) \cap X$. Тоді множина

$$S = \{s_t : t \in T\} \cup \{x^*\}$$

є скінченною $\frac{\delta}{2}$-сіткою множини $F$, для якої $x^* \in S$. Тому за лемою 3 існують число $n \in \mathbb{N}$ і скінченний набір точок $s_0, s_1, \ldots, s_n$ такі, що $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ і $d(s_{k-1}, s_k) < \delta$ для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді, оскільки $\delta$ вибране за лемою 2, то для довільного $k = 1, 2, \ldots, n$ існує неперервна крива $L_{s_{k-1},s_k} \subseteq B(F, \varepsilon) \cap X$, що з'єднує точки $s_{k-1}$ та $s_k$. Покладемо $F_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_{s_{k-1},s_k}$. За лемою 4 множина $F_\varepsilon$ є неперервною кривою, яка з'єднує точки $s_0$ і $s_n$. А тому $F_\varepsilon$ є континуумом Пеано, для якого $x^* \in S \subseteq F_\varepsilon \subseteq B(F, \varepsilon) \cap X$. Оскільки $\delta < \varepsilon$, то $S$ є $\varepsilon$-сіткою множини $F$. Тому

$$B(F_\varepsilon, \varepsilon) \supseteq B(S, \varepsilon) \supseteq F.$$

**Лема 6.** *Нехай $X$ – щільний локально лінійно зв'язно вкладений підпростір метричного компакту $\overline{X}$, $F$ – непорожня зв'язна замкнена підмножина $\overline{X}$. Тоді існує послідовність континуумів Пеано $F_n \subseteq X$ таких, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k} = F$.*

**Доведення.** Виберемо деяку точку $x^* \in F$. Використавши лему 5 з $\varepsilon = \frac{1}{n}$, побудуємо послідовність континуумів Пеано $F_n \subseteq X$ таких, що $F \subseteq B(F_n, \frac{1}{n})$, $F_n \subseteq B(F, \frac{1}{n})$ і $x^* \in F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що множини $F_n$ шукані. По-перше, перетин $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ непорожній, бо він містить точку $x^*$.

Перевіримо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k} = F$. Справді, з одного боку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} B(F, \tfrac{1}{k})} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B[F, \tfrac{1}{n}] = F.$$

Для завершення доведення залишилось показати обернене включення. Візьмемо $x \in F$. Зафіксуємо деяке $n \in \mathbb{N}$ і покажемо, що $x \in \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k}$. Для цього розглянемо деякий окіл $U$ точки $x$ і покажемо, що $U \cap \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k \neq \emptyset$. Знайдемо $\varepsilon > 0$ з $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Виберемо номер $m \geq n$ такий, що $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Оскільки

$$x \in F \subseteq B(F_m, \tfrac{1}{m}) \subseteq B(F_m, \varepsilon) = \bigcup_{y \in F_m} B(y, \varepsilon),$$

то існує $y \in F_m$ таке, що $d(x, y) < \varepsilon$. В такому разі матимемо, що $y \in F_m \subseteq \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k$ і $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Отже, $U \cap \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k \neq \emptyset$, що і треба було довести.

## 5 Основний результат

**Теорема 3.** *Нехай $Y$ – всюди щільний локально лінійно зв'язно вкладений підпростір метризовного компакту $\overline{Y}$ і $F \subseteq \overline{Y}$. Тоді для того, щоб існувала неперервна функція $f : (0;1] \to Y$ така, що $\overline{f}(0) = F$, необхідно і досить, щоб множина $F$ була непорожньою зв'язною і замкненою в $\overline{Y}$.*

**Доведення.** *Необхідність.* Нехай маємо таку неперервну функцію $f : (0;1] \to Y$, що $\overline{f}(0) = F$. Оскільки образ зв'язної множини при неперервному відображенні залишається зв'язним [7, 6.1.4], то $f((0;\frac{1}{n}))$ є зв'язною множиною для кожного номера $n$.

Але замикання зв'язної множини є множиною зв'язною [7, 6.1.12] і замкнена підмножина компакта є компактною множиною. Тоді $\overline{f((0;\frac{1}{n}))}$ є континуумом для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки множини $[0;\frac{1}{n})$ утворюють базу околів нуля в просторі $[0,1]$, то $F = \overline{f}(0) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f((0;\frac{1}{n}))}$. Тому згідно з [7, 6.1.18] маємо, що і $F$ є непорожнім континуумом як перетин спадної послідовності непорожніх континуумів. А тому $F$ є непорожньою зв'язною замкненою в $\overline{Y}$.

*Достатність.* Нехай тепер маємо непорожню зв'язну і замкнену в $\overline{Y}$ множину $F$. Тоді згідно з лемою 6 маємо, що існує послідовність континуумів Пеано $F_n \subseteq Y$ таких, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k} = F$. Скориставшись теоремою 1, маємо, що існує неперервна функція $f : (0;1] \to Y$ така, що $\overline{f}(0) = F$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Maslyuchenko O.V.* The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics. – 2009. – **35**, N1. – p. 113-130.

2. *Маслюченко О.V.* Побудова $\omega$-первісних: сильно досяжні простори // Математичний вісник НТШ. – 2009. – **6**. – с. 155–178.

3. *Маслюченко О.В., Онипа Д.П.* Граничні коливання локально сталих функцій // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, N3–4. – с. 97–99.

4. *Маслюченко О.В., Онипа Д.П.* Побудова функцій з даними граничними множинами // Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Київ, 14-15 травня 2015р. - Національний технічний університет України "КПІ". – 2015. – с. 137-139.

5. *Mazurkiewicz S.* Sur les lignes de Jordan // Fund. Math. – 1920. – **1**. – p. 166–209.

6. *Bessaga C., Pełczyński A.* Selected topic in infinite-dimensional topology — Warszawa: PWN, 1975. – 353 p.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752с.