

## АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Для рівнянь другого порядку, що містять у правій частині нелінійності у деякому сенсі близькі до степеневих, встановлено необхідні й достатні умови існування одного класу неколивних розв'язків, а також одержано асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних.

We provide necessary and sufficient conditions for the existence of a class of non-oscillating solutions of second order equations containing non-linearities of a power type in the right-hand side. We also obtain asymptotic representations for these solutions and their derivatives.

В монографії І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія [1] на основі досліджень, що проведені до 1990 року, розроблена асимптотична теорія неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Однак, ця теорія ще далека від свого остаточного завершення. Зокрема, вона не може бути у повній мірі застосована для рівнянь з правильно змінними нелінійностями, які є природними узагальненнями рівнянь зі степеневими нелінійностями та останніми десятиріччями привертають до себе увагу багатьох українських та закордонних математиків (див., наприклад, [2,3]). Дану роботу присвячено розв'язанню однієї з задач цього напрямку.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \quad (1)$$

у якому  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ) — неперервна функція,  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $i = 0, 1$ ) — неперервні функції,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ,  $\Delta_{Y_i}$  — або проміжок  $[y_i^0, Y_i[$  або  $]Y_i, y_i^0]$ . Крім того, припускаємо, що кожна з функцій  $\varphi_i(z)$  — правильно змінна функція [3] при  $z \rightarrow Y_i$  ( $z \in \Delta_{Y_i}$ ) порядку  $\sigma_i$ , причому  $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ .

Розв'язок  $y$  рівняння (1) будемо називати  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq$

$+\infty$ , якщо при кожному  $i \in \{0, 1\}$

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (2)$$

і

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

При  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  у роботі [4] було отримано необхідні і достатні умови існування  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків рівняння (1), а також встановлено неявні асимптотичні формули при  $t \uparrow \omega$  для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Проте, в особливих випадках  $\lambda_0 \in \{0, \pm\infty\}$  (див., наприклад, [5]) доводилося накладати додаткові обмеження на функції  $\varphi_0, \varphi_1$ . Опишемо докладніше ці обмеження.

Нехай  $\varphi : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$  — правильно змінна функція при  $z \rightarrow Y$  ( $z \in \Delta_Y$ ) ( $Y \in \{0, \infty\}$ ,  $\Delta_Y$  — деякий однобічний окіл  $Y$ ) порядку  $\sigma$ . Будемо говорити, що  $\varphi$  задовольняє умову  $S$ , якщо для  $\theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$  та для будь-якої неперервно диференційовної функції  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$  такої, що

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

має місце при  $z \rightarrow Y$ , ( $z \in \Delta_Y$ ) співвідношення

$$\theta(zL(z)) = \theta(z)(1 + o(1)).$$

<sup>1</sup>При  $\omega > 0$  вважаємо, що  $a > 0$ .

<sup>2</sup>При  $Y_i = +\infty$  ( $Y_i = -\infty$ ) вважаємо  $y_i^0 > 0$  ( $y_i^0 < 0$ ) відповідно.

Достатньо важливий для вивчення клас  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язків рівняння (1) було досліджено лише для випадків, коли функція  $\varphi_1$  задовольняє умову  $S$ . У даній роботі вдалося розповсюдити ці результати на випадок рівняння (1), в якому  $\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |z||))$ ,  $R$  — правильно змінна на нескінченності функція порядку  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ . Зазначимо, що функція  $|z|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |z||))$  не задовольняє умову  $S$ .

Введемо наступні позначення:

$$I(t) = \int_{A_\omega^1}^t p(\tau) d\tau,$$

$$A_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

у випадку, коли  $\lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1$

$$J(t) = \int_{B_\omega}^t |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{если } \int_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_b^\omega |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

де  $b \in [a; \omega)$  обрано так, щоб  $|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \text{sign } y_1^0 \in \Delta_{Y_1}$  при  $t \in [b; \omega)$ .

Має місце наступна теорема.

**Теорема** Нехай у рівнянні (1)  $\varphi_1(z) = |z|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |z||))$ ,  $R$  — неперервно диференційовна, з монотонною похідною, правильно змінна на нескінченності функція порядку  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\varphi_0$  є неперервно диференційовною функцією з монотонною похідною,  $\sigma_1 \neq 1$ , існує скінченна чи нескінченна границя  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}$  та

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{|\ln |I(t)||^{\mu-1} J(t)}{\pi_\omega(t) J'(t)} = 0. \quad (4)$$

Тоді для існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язків необхідним і достатнім є виконання умов

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad (5)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{J'(t)}{y_1^0 |J(t)|} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1, \quad (6)$$

та нерівностей

$$\frac{\alpha_0 I(t)}{y_1^0 (1 - \sigma_1)} > 0 \text{ при } t \in ]a, \omega[, \quad (7)$$

$$\frac{y_0^0 y_1^0 (1 - \sigma_1) J(t)}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} > 0 \text{ при } t \in [b, \omega[. \quad (8)$$

Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{|\exp(R(|\ln |y'(t)||)) \varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim \frac{[1-\sigma_1]^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1}} \text{sign } y_1^0}{1-\sigma_1} (1 - \sigma_0 - \sigma_1) J(t), \quad (9)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1 - \sigma_1) J'(t)}{(1 - \sigma_1 - \sigma_0) J(t)}.$$

**Зауваження.** Якщо у рівнянні (1)  $p(t) = |\pi_\omega(t)|^{\sigma_1-2} |\ln |\pi_\omega(t)||^q L(|\ln |\pi_\omega(t)||)$ ,  $q < -\mu$ ,  $L$  - довільна повільно змінна на нескінченності функція, то умова (3) задовольняється. Більше того, навіть для випадку степеневих  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  та правильно змінної при  $t \uparrow \omega$  функції  $p$  порядку  $\rho$  однією з необхідних умов існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язків є рівність  $\rho = \sigma_1 - 2$ .

**Доведення теореми Необхідність.** Нехай  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} - P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язок рівняння (1). З умов на функції  $\varphi_0$  та  $R$  з урахуванням твердження 9 з [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116) впливає, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z R'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R'(z) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z \varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} = \sigma_0.$$

Тоді з рівності

$$\left( \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t)) |y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))} \right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t)) |y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))} \times$$

$$\times \left( 1 - \sigma_1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \times \frac{y(t)\tilde{\varphi}'_0(y(t))}{\tilde{\varphi}_0(y(t))} - R'(|\ln |y'(t)||)\text{sign } y_1^0 \right)$$

на підставі (1), (2) та (3) у випадку, коли  $\int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty$ , маємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(|\ln |y'(t)||^\mu)} = \alpha_0(1 - \sigma_1)I(t)[1 + o(1)]. \quad (11)$$

У іншому випадку  $\int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty$ , отримаємо або (11), або

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'(t) \exp(-R(|\ln |y'(t)||))}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}} = c \neq 0. \quad (12)$$

Доведемо, що (12) не може мати місця. Оскільки  $\sigma_1 \neq 1$ , то в силу першої з умов (2) та (10) функція  $\frac{y'(t)}{|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))}$  має або нульову або нескінченну границю при  $t \uparrow \omega$ . При виконанні умови (12) функція  $\varphi_0(y(t))$  мала би відповідно нульову або нескінченну границю при  $t \uparrow \omega$ . Тому з використанням правила Лопіталя у формі Штольца, (10), (2) та (3) мали би

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))} &= \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[ \frac{1}{\varphi_0(y(t))} \right]'}{\left[ \frac{|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))}{y'(t)} \right]'} = \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \times \\ &\times \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \exp(R(|\ln |y'(t)||))} \times \\ &\times \frac{y(t)\varphi'_0(y(t))}{\varphi_0(y(t))} \times \\ &\times \frac{1}{1 - \sigma_1 - \frac{y'(t)\tilde{\varphi}'_1(y(t))}{\tilde{\varphi}_1(y'(t))}} = 0. \end{aligned}$$

Це співвідношення протирічить (12). Отже, рівність (11) має місце в обох випадках.

Зауважимо, що (11) може бути переписано при  $t \uparrow \omega$  у вигляді

$$\frac{y'(t)\text{sign } y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{1-\sigma_1}} = |1 - \sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \times |\exp(R(|\ln |y'(t)||))I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \quad (13)$$

Крім того, використовуючи рівняння (1), перепишемо (11) при  $t \uparrow \omega$  у вигляді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{(1 - \sigma_1)I(t)} [1 + o(1)],$$

звідки, оскільки існує скінченна чи нескінченна границя  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ , яка в силу леми 10.6 з [6] дорівнює  $(-1)$ , отримаємо умову (7) та другу з умов (6).

З першої з умов (7) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція  $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0; +\infty[$ , що  $y'(t) = \frac{L(\pi_\omega(t))}{\pi_\omega(t)}$ . Тому з урахуванням властивостей логарифмічної функції та функції  $R$ , зокрема, (10), маємо при  $t \uparrow \omega$

$$R'(|\ln |y'(t)||) = R'(|\ln |\pi_\omega(t)||)(1 + o(1)). \quad (14)$$

Нехай

$$W(t) := \int_{B_\omega}^t J'(\tau) \exp(R(|\ln |y'(\tau)||)) d\tau,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} J(t) = J_0.$$

Покажемо, що функція

$$\exp(R(|\ln |y(t(J^{-1}(z))||))),$$

де  $J^{-1}$  — функція, обернена для  $J$ , є повільно змінною функцією при  $z \rightarrow J_0$ . Справді, на підставі умов (4) та (14) маємо

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow J_0} \frac{z (\exp(R(|\ln |y'(t(J^{-1}(z))||)))')}{\exp(R(|\ln |y(t(J^{-1}(z))||))} &= \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J(t)R'(|\ln |y'(t)||)}{J'(t)\pi_\omega(t)\text{sign}(\ln |y'(t)|)} = 0. \end{aligned}$$

Звідси з використанням теорем про інтегрування правильно змінних функцій (твердження 1 та 2 з [3] (розділ 5, пункт 1, стор. 116)) маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{W(t)}{\exp(R(|\ln |y'(t)||)) J(t)} = 1.$$

Тому з (13) впливає перше з асимптотичних зображень (9), звідки слідує (8) та (5). З першого з зображень (9) з урахуванням (13) отримуємо друге з зображень (9) та першу з умов (6).

*Достатність.* Нехай виконано умови (4) – (8). Позначимо  $\theta_0(z) = \varphi_0(z)|z|^{-\sigma_0}$ .

Розглянемо функцію

$$f(s_1, s_2) = \theta_0(s_1) \exp(R(|\ln |s_2||)),$$

Для кожного  $i \in \{0, 1\}$  підберемо число  $y_i^1 \in \Delta_{Y_i}$  так, щоб при  $z_i \in \Delta_{Y_i}^1$

$$\left| \frac{z_i f'_{z_i}(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} \right| < \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{16},$$

$$\Delta_{Y_i}^1 = \begin{cases} [y_i^1, Y_i], & \text{если } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i] \\ ]Y_i, y_i^1], & \text{если } \Delta_{Y_i} = ]Y_i, y_i^0]. \end{cases}$$

Це можна зробити застосувавши умови (10).

Розглянемо задану на множині  $\Delta = \Delta_{Y_0}^1 \times \Delta_{Y_1}^1$  функцію

$$F(s_1, s_2) = \left( \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(s_1, s_2)}, \frac{s_1}{s_2} \right).$$

У [7] при доведенні достатності теореми 1 встановлено, що  $F$  взаємно однозначно відображає  $\Delta$  на множину  $F(\Delta)$ . Таким чином, існує обернена функція  $F^{-1} : F(\Delta) \rightarrow \Delta$ . Оскільки якобіан функції  $F$  є відмінним від нуля на  $\Delta$  функція  $F^{-1}$  є неперервно диференційовною на  $F(\Delta)$ .

Застосуємо до рівняння (1) перетворення

$$F(y(t), y'(t)) = \left( \frac{C_0[1 + z_1(x)]}{|J(t)|^{\sigma_1-1}}, \frac{C_1 J'(t)}{J(t)} [1 + z_2(x)] \right), \quad (15)$$

$$x = \beta \ln |I(t)|,$$

де

$$C_1 = \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}, \quad C_0 = |1 - \sigma_1| |C_1|^{\sigma_1-1},$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = +\infty, \\ -1 & \text{при } \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = 0. \end{cases}$$

Перепишемо (15) у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = \beta[1 + z_1] H(x) [C_1 Q_0(x, z_1, z_2)(1 + z_2) + \\ + \frac{R'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}{H(x)} \times \\ \times \frac{Q_1(x, z_1, z_2) |1 + z_2(x)|^{\sigma_1-1}}{(1 - \sigma_1)(1 + z_1)} + \sigma_1 - 1], \\ z'_2 = \beta[1 + z_2] \left( H(x) \left( \frac{1}{C_1} - 1 - z_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{|1 + z_2|^{\sigma_1-1}}{(1 - \sigma_1)(1 + z_1)} - \frac{I(t(x))J''(t(x))}{I'(t(x))J'(t(x))} \right). \end{cases} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} & (Y_0(x, z_1, z_2), Y_1(x, z_1, z_2)) = \\ & = F^{-1} \left( \frac{C_0[1 + z_1]}{|J(t)|^{\sigma_1-1}}, \frac{C_1 J'(t)}{J(t)} [1 + z_2(x)] \right), \\ & Q_0(x, z_1, z_2) = \\ & = \frac{Y_0(x, z_1, z_2) \frac{\partial F}{\partial s_1}(Y_0(x, z_1, z_2), Y_1(x, z_1, z_2))}{F(Y_0(x, z_1, z_2), Y_1(x, z_1, z_2))}, \\ & Q_1(x, z_1, z_2) = \frac{R'(Y_1(x, z_1, z_2))}{R'(|\ln |\pi_\omega(t)||)}, \\ & H(x) = \frac{I(t(x))J'(t(x))}{p(t(x))J(t(x))}. \end{aligned}$$

В силу (6) та (5) можна вибрати число  $t_0 \in [a, \omega[$  так, щоб для будь-яких  $|\xi_j| \leq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, 2$  при  $t \in [t_0, \omega[$

$$(C_0 |J(t)|^{1-\sigma_1} [1 + \xi_1], \frac{C_1 J'(t)}{J(t)} [1 + \xi_2]) \in F(\Delta).$$

Тепер розглянемо систему рівнянь (16) на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[ \times D, \quad \text{где } x_0 = \beta \ln |J(t_2)|,$$

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2\}.$$

Оскільки за умовою теореми існує нескінченна чи скінченна границя  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)}$ , то в силу леми 10.6 з [6] та виду функції  $J$  з урахуванням першої з умов (7) маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J''(t)}{J'(t)} = -1, \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0. \quad (19)$$

Крім того, з урахуванням властивостей функції  $F^{-1}$  та вибору  $\Delta$  як і в [7] отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y_i(x, z_1, z_2) = Y_i \quad (i = 0, 1)$$

рівномірно по  $|z_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2$ .

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_0(x, z_1, z_2) = 1 - \sigma_0 - \sigma_1 \quad (20)$$

рівномірно по  $|z_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2$ .

В силу першої з умов (7) та (4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}{H(x)} = 0. \quad (21)$$

Введемо позначення:

$$F^{-1}(w_1, w_2) = (F_1^{-1}(w_1, w_2), F_2^{-1}(w_1, w_2))$$

$$P_i(w_1, w_2) = \frac{w_i \frac{\partial F_2^{-1}}{\partial w_i}(w_1, w_2)}{F_2^{-1}(w_1, w_2)}, i = 1, 2.$$

З властивостей функції  $F$  випливає, що функції  $P_1, P_2$  є обмеженими на  $F(\Delta)$ . Оскільки для будь-яких сталих  $\xi_1, \xi_2: |\xi_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi_\omega(t) (Y_1(x(t), \xi_1, \xi_2))'_t}{Y_1(x(t), \xi_1, \xi_2)} = \\ & = P_1 \left( C_0 |J(t)|^{1-\sigma_1} [1 + \xi_1], \frac{C_1 J'(t)}{J(t)} [1 + \xi_2] \right) \times \\ & \quad \times (1 - \sigma_1) \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} + \\ & + P_2 \left( C_0 |J(t)|^{1-\sigma_1} [1 + \xi_1], \frac{C_1 J'(t)}{J(t)} [1 + \xi_2] \right) \times \\ & \quad \times \left( \frac{\pi_\omega(t) J''(t)}{J'(t)} - \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} \right), \end{aligned}$$

з урахуванням (17) та (18) отримуємо, що функція  $|Q_1|$  є обмеженою при  $x \in [x_0, +\infty[$  рівномірно по  $|z_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2$ .

Перепишемо систему (16) у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = H(x) \left( A_{12} z_2 + \sum_{j=1}^2 R_j(x, z_1, z_2) \right), \\ z'_2 = \sum_{j=1}^2 A_{2j} z_j + \sum_{j=3}^4 R_j(x, z_1, z_2), \end{cases} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} A_{12} &= \beta(1 - \sigma_1), \\ A_{21} &= \frac{\beta}{1 - \sigma_1}, \quad A_{22} = -\beta, \\ R_1(x, z_1, z_2) &= \beta z_1 z_2 (1 - \sigma_1), \\ R_2(x, z_1, z_2) &= \beta [1 + z_1] [1 + z_2] \times \\ & \quad \times (Q_0(x, z_1, z_2) - 1 + \sigma_0 + \sigma_1) + \\ & \quad + \frac{R'(|\ln |\pi_\omega(t(x))||)}{\beta H(x)} \times \\ & \quad \times \frac{Q_1(x, z_1, z_2) |1 + z_2(x)|^{\sigma_1 - 1}}{(1 - \sigma_1)} \\ R_3(x, z_1, z_2) &= \\ & = \beta [1 + z_2] H(x) \left( \frac{1}{C_1} - 1 - z_1 \right) + \\ & + \beta [1 + z_2] \left( \frac{1}{1 - \sigma_1} - \frac{I(t(x)) J''(t(x))}{I'(t(x)) J'(t(x))} \right), \\ R_4(x, z_1, z_2) &= \beta \times \\ & \times \left( \frac{|1 + z_2|^{\sigma_1 - 1}}{(1 - \sigma_1)(1 + z_1)} - \frac{1 - z_1 + \sigma_1 z_2}{1 - \sigma_1} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи (19), (20) та (21) маємо

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad (i = 1, 4)$$

рівномірно по  $x \in [x_0, +\infty[$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_j(x, z_1, z_2) = 0 \quad (j = 2, 3)$$

рівномірно по  $z_1, z_2: (z_1, z_2) \in D$ .

Застосуємо до (22) перетворення

$$z_2 = w_2, \quad z_1 = w_1 + \frac{1}{1 - \sigma_1} h(x) w_2, \quad (23)$$

де  $w_1, w_2$  — нові невідомі функції,

$$h(x) = \frac{\pi_\omega(t(x)) J'(t(x))}{J(t(x))}. \quad (24)$$

Будемо мати з урахуванням (17) та (18)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{H(x)} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'(x)}{H(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{\pi_\omega(t(x))J''(t(x))}{J'(t(x))} - h(x) \right) = 0. \quad (25)$$

В результаті перетворення (23) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1' = H(x) \left( \frac{h(x)}{(\sigma_1 - 1)H(x)} A_{21} w_1 + \right. \\ \left. + \left( A_{12} + \frac{h(x)A_{22}}{(\sigma_1 - 1)H(x)} \right) w_2 \right) + \\ \left. + H(x)N_1(x, w_1, w_2) \right. \\ w_2' = A_{21}(x)w_1 + (A_{22} + Ch(x)A_{21})w_2 + \\ \left. + N_2(x, w_1, w_2), \right. \end{cases} \quad (26)$$

де

$$N_1(x, w_1, w_2) = -\frac{h^2(x)}{(\sigma_1 - 1)^2 H(x)} A_{21} w_2 +$$

$$+ \frac{h(x)N_2(x, w_1, w_2)}{(\sigma_1 - 1)H(x)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 R_j \left( x, w_1 + \frac{1}{1 - \sigma_1} h(x) w_2, w_2 \right),$$

$$N_2(x, w_1, w_2) =$$

$$= \sum_{j=3}^4 R_j \left( x, w_1 + \frac{1}{1 - \sigma_1} h(x) w_2, w_2 \right).$$

Враховуючи (24) та (25), а також властивості функцій  $R_1, R_2, R_3, R_4$  отримуємо, що для системи (26) виконано всі умови теореми 2.8 з [8], а отже ця система має хоча б один розв'язок  $\{z_i^*\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 (x_1 \geq x_0)$ , що прямує до нуля при  $x \rightarrow +\infty$ . Йому в силу (15) та (23) відповідає розв'язок  $y$  уравнения (1), що допускає при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (9). Отже,  $y \in P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язком. Теорему доведено.

**Висновки.** У даній роботі отримано необхідні та достатні умови існування  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків у особливому випадку  $\lambda_0 = 0$  для класів суттєво нелінійних

диференціальних рівнянь, які раніше не розглядалися.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кизурадзе И.Т., Чангурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
2. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения — 2011. — 47, Вып. 5. — С. 627-650.
3. Maric V. Regular Variation and Differential Equations — Springer, 2000. — 138 p.
4. Белозерова М.А. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. — 2010. — 15, Вып. 18. — С. 7-21.
5. Белозерова М.А. Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих // Науковий вісник Чернівецького університету. - Чернівці : "Рута". — 2008. — Вып. 374. — С. 34-43.
6. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 — Киев, 1998. — 295 с.
7. Белозерова М.А. Асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. — 2015. — 20, Вып. 1 (25) — С.7-19.
8. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — 62, №1. — С. 52-80.