

ПРО НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Досліджено множину точок неперервності нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow \mathbb{M}$, визначених на добутку зв'язних топологічних просторів зі значеннями в площині Сідра \mathbb{M} .

We investigate the continuity points set of separately continuous mappings $f : X_1 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow \mathbb{M}$ defined on a product of connected topological spaces with values in the Ceder plane \mathbb{M} .

1. Вступ. З кінця ХХ століття активно ведуться дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \rightarrow Z$ та їх аналогів зі значеннями в неметризовних просторах. Важливими типами просторів близьких до метризовних є індуктивні границі, σ -метризовані та сильно σ -метризовані простори, простори Мура, вичерпні та напіввичерпні простори. Множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в згаданих просторах, крім вичерпних та напіввичерпних, вже досить добре вивчена. Отримано також деякі результати про нарізно неперервні відображення зі значеннями в конкретних напіввичерпних просторах, таких як $C_p[0, 1]$ та площина Бінга [1,2]. Дж.Сідр [3] навів цікавий приклад неметризованого вичерпного простору, який ми називаємо площиною Сідра і позначаємо \mathbb{M} . Узагальнення цієї конструкції вивчалось в [4-6]. Тому природно постало питання про дослідження точок розриву нарізно неперервних відображень зі значеннями у площині Сідра, що і здійснюється в даній статті.

2. Зв'язні множини та їх властивості. У цьому підрозділі ми введемо потрібні для нас поняття, що стосуються зв'язності, і доведемо деякі факти про компоненти зв'язності.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо його неможливо подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $A \sqcup B$ двох непорожніх відкритих в X

множин. Підмножина E простору X називається *зв'язною*, якщо підпростір E простору X з індукованою з X топологією є зв'язним.

Ми будемо використовувати такий факт.

Лема 1. *Нехай \mathcal{A} – система зв'язних підмножин топологічного простору X , B – зв'язна підмножина простору X , така, що $B \subseteq S = \bigcup \mathcal{A}$ і $B \cap A \neq \emptyset$ для довільної множини A з \mathcal{A} . Тоді і S – це зв'язна множина.*

Доведення. Нехай E – непорожня відкрито-замкнена множина в підпросторі S . Покажемо, що $E = S$, звідки і буде випливати зв'язність S .

Оскільки, $E \neq \emptyset$, то існує точка $x_0 \in E$. Але $E \subseteq S$, тому і $x_0 \in S$, а значить, існує елемент $A_0 \in \mathcal{A}$, такий, що $x_0 \in A_0$. Перетин $A_0 \cap E$ непорожній, бо $x_0 \in A_0 \cap E$, причому $A_0 \cap E$ – це відкрито-замкнена підмножина зв'язної множини A_0 . Тому $A_0 \cap E = A_0$, тобто $A_0 \subseteq E$. Але $B \cap A_0 \neq \emptyset$ за умовою, отже, і $E \cap B \neq \emptyset$. Оскільки множина E відкрито-замкнена в S і $B \subseteq S$, то $E \cap B$ буде відкрито-замкненою множиною в B . Але і множина B зв'язна, отже, $E \cap B = B$, тобто $B \subseteq E$. Нехай A – довільний елемент з \mathcal{A} . За умовою $A \cap B \neq \emptyset$, а значить $A \cap E \neq \emptyset$, звідки негайно випливає, що $A \cap E = A$, тобто $A \subseteq E$. В такому разі і $S = \bigcup \mathcal{A} \subseteq E$, а значить і $S = E$, адже $E \subseteq S$.

Зауважимо, що умова $B \subseteq S$ в лемі 1 істотна. Справді, розглянемо на евклідовій площині \mathbb{R}^2 систему \mathcal{A} зв'язних множин $A_x = \{x\} \times [0, +\infty)$, де x пробігає множину $X_0 =$

$[0, 1] \cup [2, 3]$, а за B візьмемо зв'язну множину $[0, 3] \times \{0\}$. Ясно, що $A_x \cap B = \{(x, 0)\}$ для кожного $x \in X_0$, отже, $A \cap B \neq \emptyset$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Але множина

$$\begin{aligned} S &= \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x \in X_0} A_x = X_0 \times [0, +\infty) = \\ &= ([0, 1] \times [0, +\infty)) \sqcup ([2, 3] \times [0, +\infty)), \end{aligned}$$

очевидно, не зв'язна, адже тут $B \not\subseteq S$.

Слід зазначити, що лемі 1 можна було б вивести і з теореми 6.1.9 монографії Р.Енгелькінга [7, с. 520], коли долучити множину B до системи \mathcal{A} , зауваживши при цьому, що об'єднання не зміниться, адже $B \subseteq S$. Теорему 6.1.9 можна подати в наступному еквівалентному переформулюванні, підсилити тим самим лему 1.

Теорема 1. *Нехай \mathcal{A} – система зв'язних підмножин топологічного простору X , B – зв'язна підмножина X , $B \subseteq S = \bigcup \mathcal{A}$ і $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ або $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тоді і множина S зв'язна в X .*

Доведення. Міркуючи так само як при доведенні лемі 1, візьмемо непорожню відкрито-замкнену множину E в S і доведемо, що $E = S$. Існує така множина $A_0 \in \mathcal{A}$, що $A_0 \cap E \neq \emptyset$, а значить, $A_0 \subseteq E$. За умовою $\overline{A_0} \cap B \neq \emptyset$ або $A_0 \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Припустимо, що $\overline{A_0} \cap B \neq \emptyset$. Оскільки $A_0 \subseteq E$, то і $\overline{E} \cap B \neq \emptyset$, адже $\overline{E} \cap B \supseteq \overline{A_0} \cap B$. Зауважимо, що символом \overline{M} ми позначаємо замикання множини M у просторі X . Замикання ж множини $M \subseteq S$ у підпросторі S позначимо символом \overline{M}^S . Як добре відомо $\overline{M}^S = \overline{M} \cap S$. У нашому випадку $\overline{E} \cap B \subseteq B \subseteq S$, отже $\overline{E} \cap B = \overline{E} \cap B \cap S = \overline{E} \cap S \cap B = \overline{E}^S \cap B = E \cap B$, адже множина E замкнена в S . Тому $E \cap B \neq \emptyset$, звідки, як і в доведенні лемі 1, впливає, що $B \subseteq E$.

Нехай $A_0 \cap \overline{B} \neq \emptyset$. З включення $A_0 \subseteq E$ випливає, що і $E \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Оскільки $E \subseteq S$, то $\emptyset \neq E \cap \overline{B} = E \cap S \cap \overline{B} = E \cap \overline{B}^S$. Але множина E відкрита в S . Тому з умови $E \cap \overline{B}^S \neq \emptyset$ випливає, що $E \cap B \neq \emptyset$, звідки, як і раніше, знову отримуємо, що $B \subseteq E$.

Таким чином, ми встановили, що $B \subseteq E$. Нехай тепер A – довільна множина з \mathcal{A} . За

умовою $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ або $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Замінюючи в попередньому міркуванні A_0 на B , а B на A , отримуємо, що $A \subseteq E$. Тому і $S \subseteq E$, а значить, $S = E$, щ.т.б.д.

Насправді нам буде потрібна тільки лема 1, а не сильніша від неї теорема 1.

Зокрема, з лемі 1 легко вивести

Наслідок 1. *Нехай \mathcal{A} – система зв'язних підмножин топологічного простору X , така, що $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Тоді об'єднання $S = \bigcup \mathcal{A}$ – це зв'язна множина.*

Доведення. Оскільки $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, то існує така точка $x_0 \in X$, що $x_0 \in A$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Одноточкова множина $B = \{x_0\}$ зв'язна і $B \subseteq S$. Крім того, $A \cap B = \{x_0\} \neq \emptyset$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Отже, за лемою 1 множина S зв'язна.

3. Компоненти зв'язності. Точки x_1 і x_2 топологічного простору X назвемо зв'язними (позначається $x_1 \sim x_2$), якщо існує така зв'язна підмножина C простору X , що $\{x_1, x_2\} \subseteq C$. Легко перевірити, що \sim – це відношення еквівалентності на просторі X . Його рефлексивність випливає з того, що кожна одноточкова множина $\{x\}$ в X є зв'язною, симетричність очевидна. Транзитивність доводиться так. Нехай $x_1 \sim x_2$ і $x_2 \sim x_3$. Тоді існують такі зв'язні множини C_1 і C_2 , що $\{x_1, x_2\} \subseteq C_1$ і $\{x_2, x_3\} \subseteq C_2$. В такому разі $x_2 \in C_1 \cap C_2$, отже, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, а тому за наслідком 1 множина $C = C_1 \cup C_2$ зв'язна. Але $\{x_1, x_3\} \subseteq C$, отже, $x_1 \sim x_3$.

Як добре відомо [8, теорема 2, с.43] відношення еквівалентності породжує розбиття $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$ на класи еквівалентних елементів, які називаються *компонентами зв'язності простору X* . Для точки $x \in X$ та множина $C \in \mathcal{C}(X)$, для якої $x \in C$, називається *компонентою зв'язності точки x в X* і позначається символом C_x . Ясно, що $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$.

Теорема 2. *Нехай X топологічний простір, $x \in E \subseteq X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

- (i) E – компонента зв'язності точки x в X ;
- (ii) E – найбільша зв'язна множина, що містить точку x .

Доведення. (i) \Rightarrow (ii). Нехай $E = C_x \in$

$\mathcal{C}(X)$ і \mathcal{C}_x – це система всіх зв'язних підмножин C простору X , таких, що $x \in C$. За наслідком 1 множина $\tilde{C}_x = \bigcup \mathcal{C}_x$ зв'язна. Зрозуміло з означення, що \tilde{C}_x – це найбільша зв'язна в X множина, яка містить точку x . Залишилося довести, що $E = \tilde{C}_x$.

Зауважимо, що множина E є зв'язною. Справді для кожної точки $y \in E$ існує така зв'язна в X множина A_y , що $\{x, y\} \subseteq A_y$. Множина $S = \bigcup_{y \in E} A_y$ буде зв'язною за наслідком 1, бо $\bigcap_{y \in E} A_y \ni x$. Зрозуміло, що $S \supseteq E$, адже $y \in A_y$ для кожного $y \in E$. Навпаки, нехай $z \in S$. Тоді існує таке $y \in E$, що $z \in A_y$. В такому разі $\{x, z\} \subseteq A_y$, отже, $x \sim z$, а тому $z \in E$. Таким чином, і $S \subseteq E$, отже, $E = S$, що і дає нам зв'язність множини E .

Оскільки множина E зв'язна і $x \in E$, то $E \subseteq \tilde{C}_x$ за побудовою \tilde{C}_x . Навпаки, нехай $y \in \tilde{C}_x$. Тоді існує така зв'язна множина C , що містить точку x , тобто елемент з \mathcal{C}_x , що $y \in C$. Для цієї множини $\{x, y\} \subseteq C$, отже, $x \sim y$, тому $y \in E$.

Таким чином, $E = \tilde{C}_x$.

(ii) \Rightarrow (i). Нехай $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$ – компонента зв'язності точки x в X і E – найбільша зв'язна множина в X , що містить точку x . За доведеним вище і C_x є найбільшою зв'язною множиною в X , що містить x . Зрозуміло, що така множина єдина, отже, $E = C_x$ і E – це компонента зв'язності точки x в X .

Лема 2. Нехай $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, де всі X_i – це компоненти зв'язності простору X . Тоді $\mathcal{C}(X) = \{X_i : i \in I\}$.

Доведення. Нехай $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$. Ясно, що $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Навпаки, нехай C – якась компонента зв'язності непорожнього простору X . Тоді $C \neq \emptyset$, отже, існує елемент $x \in C$. Оскільки $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, то існує таке $i \in I$, що $x \in X_i$. Множина $C \cup X_i$ зв'язна за наслідком 1, бо такими є C і X_i , причому $x \in C \cap X_i$, отже, $C \cap X_i \neq \emptyset$. Крім того, $C \subseteq C \cup X_i \supseteq X_i$. Оскільки і C , і X_i – це компоненти зв'язності, то за теоремою 2 $C = C \cup X_i = X_i$, отже, $C \in \mathcal{A}$. Таким чином,

$$\mathcal{C}(X) = \mathcal{A}.$$

Твердження 1. Нехай X – топологічний простір, $(Y_i : i \in I)$ – сім'я непорожніх відкрито-замкнених зв'язних множин у просторі X , X_0 – непорожня зв'язна множина в X і $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} Y_i)$. Тоді

$$\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}.$$

Доведення. Доведемо, що Y_i – компонента зв'язності простору X . Оскільки Y_i – непорожня відкрито-замкнена зв'язна множина в просторі X , то існує точка $x \in Y_i$, і нехай B – зв'язна множина в X , така, що $x \in B$. Покажемо, що $B \subseteq Y_i$. Будемо міркувати від супротивного, нехай $B \not\subseteq Y_i$. Тоді існує точка $y \in B \setminus Y_i$. Оскільки множина Y_i відкрита в X , то $B \cap Y_i$ – відкрита в B і $x \in B \cap Y_i$. Але множина Y_i , крім того, ще й замкнена в просторі X , отже доповнення до неї $X \setminus Y_i$ – відкрита множина в просторі X . Тоді $B \setminus Y_i = B \cap (X \setminus Y_i)$ – це відкрита множина в B і точка y належить до неї. Таким чином, множина B подається у вигляді диз'юнктного об'єднання двох непорожніх відкритих в підпросторі B множин, а це суперечить зв'язності множини B . Отже, $B \subseteq Y_i$, тому Y_i – максимальна зв'язна множина, що містить точку x .

Покажемо тепер, що X_0 – компонента зв'язності простору X . Нехай $x \in X_0$ і C – зв'язна множина в просторі X , така, що $x \in C$. Доведемо, що $C \subseteq X_0$. Знову будемо міркувати від супротивного. Нехай це не так, отже, існує точка $y \in C \setminus X_0$. Оскільки, $y \notin X_0$, то існує $i \in I$, таке, що $y \in Y_i$. Покладемо $C_0 = C \cap X_0$ і $C_1 = C \cap (X \setminus X_0)$. Множини C_0 і C_1 відкриті в підпросторі C , як сліди відкритих множин X_0 та $X \setminus X_0$ відповідно в просторі X , і непорожні, бо $x \in C_0$, а $y \in C_1$. Виходить, що множина $C = C_0 \sqcup C_1$ розбивається на дві неперетинні непорожні відкриті в C множини, що суперечить зв'язності C . Отже, $C \subseteq X_0$, а значить, X_0 – компонента зв'язності простору X . Крім того, із зображення $X = X_0 \sqcup (\bigsqcup_{i \in I} Y_i)$ і того, що множини X_0 та Y_i для всіх $i \in I$ є компонентами зв'язності, з леми 2 випливає, що інших компонент зв'язності простору X не

має. Тому $\mathcal{C}(X) = \{Y_i : i \in I\} \cup \{X_0\}$.

4. Площина Сідра та її розбиття. Для довільних $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ і $y > 0$ введемо такі позначення: $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $V_\varepsilon(0) = [0, \varepsilon)$ і $V_\varepsilon(y) = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Площиною Сідра \mathbb{M} ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в \mathbb{M} , якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в \mathbb{M} , якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = U_\varepsilon(x) \times V_\varepsilon(0) = (U_\varepsilon(x) \times V_\varepsilon(0)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Позначимо $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, і зауважимо, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X_0$, для якого $\varphi(x) = (x, 0)$, і всі відображення $\psi_x : (0, +\infty) \rightarrow Y_x$, такі, що $\psi_x(y) = (x, y)$, є гомеоморфізмами.

Теорема 3. Підпростори $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$ площини Сідра \mathbb{M} є відкритими, замкненими і зв'язними, а підпростір $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ зв'язний і замкнений в \mathbb{M} , при цьому $\mathbb{M} = \left(\bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} Y_x\right) \sqcup X_0$.

Доведення. Доведемо, що множина Y_x відкрита в \mathbb{M} . Справді, нехай $x \in X$ і $p = (x, y) \in Y_x$. Візьмемо будь-яке $0 < \varepsilon < y$. Тоді $V_\varepsilon(y) \subseteq (0, +\infty)$, отже $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times V_\varepsilon(y) \subseteq \{x\} \times (0, +\infty) = Y_x$. Тому Y_x – це окіл довільної своєї точки p , а значить, відкрита множина.

Для доведення замкненості підпростору Y_x розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus Y_x$. Якщо $x_0 = x$ і $y_0 = 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ множина $W = W_\varepsilon(p_0)$ буде околом точки p_0 , таким, що $W \cap Y_x = \emptyset$. Якщо ж $x_0 \neq x$, а $y_0 > 0$, то $W = \{x_0\} \times (0, +\infty)$ є околом точки p_0 в \mathbb{M} і $W \cap Y_x = \emptyset$. Розглянемо нарешті випадок, коли $x_0 \neq x$, а $y_0 = 0$. Тоді $|x_0 - x| = \varepsilon > 0$ і множина $W = ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times [0, +\infty))$ є околом точки p_0 в \mathbb{M} , таким, що $W \cap Y_x = \emptyset$. Це показує, що множина Y_x містить всі свої точки дотику, отже, є замкненою в \mathbb{M} .

Підпростір Y_x є зв'язним, як образ зв'язної множини $(0, +\infty)$ при побудованому вище неперервному відображенні $\psi_x :$

$(0, +\infty) \rightarrow Y_x$.

Доведемо тепер замкненість підпростору X_0 площини Сідра. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{M} \setminus X_0$. Тоді обов'язково $y_0 > 0$ і множина $W = \{x_0\} \times (0, +\infty) = Y_{x_0}$ є околом точки p_0 в \mathbb{M} , таким, що $W \cap X_0 = \emptyset$, звідки випливає замкненість X_0 .

Зв'язність підпростору X_0 отримується з того, що X_0 гомеоморфний до числової прямої \mathbb{R} , яка є зв'язним простором.

Якщо $x_1 \neq x_2$, то очевидно, що $Y_{x_1} \cap Y_{x_2} = \emptyset$. Перетин підпросторів Y_x та X_0 також порожній, оскільки для довільної точки $p = (x, y) \in Y_x$ обов'язково $y > 0$, а для $p = (x, y) \in X_0$ мусить виконуватись умова, що $y = 0$. При цьому точка $p = (x, y) \in \mathbb{M}$ входить в X_0 , якщо $y = 0$ і в Y_x , якщо $y > 0$.

З твердження 1 та теореми 3 негайно випливає

Наслідок 2. Нехай $Y_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ – підпростори площини Сідра \mathbb{M} . Тоді $\mathcal{C}(\mathbb{M}) = \{Y_x : x \in \mathbb{R}\} \cup \{X_0\}$ – система усіх компонент зв'язності площини Сідра \mathbb{M} .

5. Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень від двох змінних зі значеннями в площині Сідра. Нам буде потрібне таке

Твердження 2. Нехай X, Y – зв'язні топологічні простори, Z – топологічний простір і $f : X \times Y \rightarrow Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді $f(X \times Y)$ – зв'язна множина.

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і розглянемо множину $f^x(Y)$, яка є зв'язною, як образ зв'язної множини Y при неперервному відображенні $f^x : Y \rightarrow Z$. Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Розглянемо $y_0 \in Y$ і відповідний горизонтальний розріз $f_{y_0}(X)$, він є зв'язною підмножиною простору Z , як образ зв'язної множини X при неперервному відображенні $f_{y_0} : X \rightarrow Z$. Оскільки $f(x, y_0) \in f^x(Y)$ і $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X)$ для довільного $x \in X$, то маємо, що $f_{y_0}(X) \cap f^x(Y) \neq \emptyset$ для всіх $x \in X$. Отже, за лемою 1 множина $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Нагадаємо, що множиною зліченного типу називають таку підмножину B топологічного простору Y , що для неї існує по-

слідовність відкритих в Y множин V_n , така, що для кожного $y \in B$ система $\{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в Y .

Добре відома теорема Калбрі-Троалліка [9] твердить, що для довільних топологічних просторів X і Y , метризовного простору Z , нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ і множини B зліченного типу в Y існує така залишкова множина A в X , що $A \times B \subseteq C(f)$. З цієї теореми легко випливає, що для нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ зі значеннями в метризовному просторі Z множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X , якщо Y задовольняє першу чи другу аксіому зліченності відповідно.

Теорема 4. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення і B – множина зліченного типу в Y . Тоді множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X .*

Доведення. Оскільки X та Y – зв'язні простори, то за твердженням 2 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в \mathbb{M} , а значить, за теоремою 2 міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра \mathbb{M} . В площині Сідра компонентами зв'язності є підпростори Y_x , де $x \in \mathbb{R}$, та X_0 , що встановлено в наслідку 2, тому $f(X \times Y) \subseteq Y_x$ для деякого $x \in \mathbb{R}$ або $f(X \times Y) \subseteq X_0$. Оскільки для довільного $x \in \mathbb{R}$ підпростір Y_x гомеоморфний до метризовного підпростору $(0, +\infty)$ числової прямої \mathbb{R} , а X_0 гомеоморфний до числової прямої \mathbb{R} , то f набуває значень в метризовному підпросторі площини Сідра \mathbb{M} . Тому за теоремою Калбрі-Троалліка існує залишкова множина A в X , така що $A \times B \subseteq C(f)$. Тоді і множина $C_B(f)$ є залишковою в X , адже $A \subseteq C_B(f)$.

Наслідок 3. *Нехай X і Y – зв'язні топологічні простори, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X , якщо Y задовольняє першу чи другу аксіому*

зліченності відповідно.

Доведення. Нехай Y задовольняє першу аксіому зліченності, тобто для довільного $y \in Y$ існує система $\mathcal{V}_y = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин в Y , яка є базою околів точки y . Отже, будь-яка одноточкова множина $\{y\}$ буде множиною зліченного типу в Y . Тоді множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$ за теоремою 4.

Нехай тепер Y задовольняє другу аксіому зліченності, тобто існує $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y . В цьому випадку сам простір Y є множиною зліченного типу. Отже, за теоремою 4 множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X .

6. Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій від багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра. Користуючись відомими результатами В. Маслюченка про величину множини точок неперервності нарізно неперервних відображень багатьох змінних зі значеннями в метризовних просторах [10], ми можемо перенести теорему попереднього розділу на випадок $n + 1$ змінної. Для цього нам будуть потрібні такі теореми:

Теорема А. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – довільний топологічний простір, простори X_2, \dots, X_{n+1} задовольняють першу аксіому зліченності, простір Z метризовний і $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_y(f) = \{x \in X = X_1 \times \dots \times X_n : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y = X_{n+1}$ буде залишковою в X .*

Теорема В. (Маслюченко В.К., 1998) *Якщо X_1 – топологічний простір, X_2, \dots, X_n задовольняють першу аксіому зліченності, $Y = X_{n+1}$ задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний, $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow Z$ – нарізно неперервне відображення, то множина $C_Y(f) = \{x \in X = X_1 \times \dots \times X_n : (\{x\} \times Y) \subseteq C(f)\}$ буде залишковою в X .*

Теорема 5. *Нехай X_1, X_2, \dots, X_n – зв'язні топологічні простори, Z – топологічний простір і $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді*

$f(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ – зв'язна множина в Z .

Доведення. Для доведення застосуємо індукцію відносно n . Для $n = 1$ твердження теореми це не що інше як добре відомий факт, яким ми не раз користувалися в даній роботі, про те, що образ зв'язної множини при неперервному відображенні є зв'язною множиною. При $n = 2$ ця теорема – це твердження 2. Припустимо, що ця теорема вірна для функцій від n змінних, де $n \geq 2$, і доведемо, що вона має місце і для функцій від $n + 1$ змінної.

Нехай X_1, \dots, X_n, X_{n+1} – зв'язні топологічні простори. Тоді добуток $X = X_1 \times \dots \times X_n$ є також зв'язним [7, с. 521]. Покладемо $Y = X_{n+1}$ і будемо розглядати відображення з формулювання теореми, як відображення на добутку двох зв'язних просторів X та Y . Зрозуміло, що $f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$. Всі множини $f^x(Y)$ зв'язні, оскільки відображення $f^x : Y \rightarrow Z$ неперервні і Y – зв'язний простір. Зафіксуємо $y_0 \in Y$ і розглянемо множину $f_{y_0}(X)$, яка є зв'язною за індуктивним припущенням, адже $f_{y_0} : X \rightarrow Z$ – нарізно неперервне відображення. Оскільки $f(x, y_0) \in f_{y_0}(X) \cap f^x(Y)$ для довільного $x \in X$, то $f^x(Y) \cap f_{y_0}(X) \neq \emptyset$ для кожного $x \in X$. Тому за лемою 1 множина $f(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1}) = f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f^x(Y)$ є зв'язною.

Теорема 6. *Нехай X_1, \dots, X_n, X_{n+1} – зв'язні топологічні простори, X_2, \dots, X_n задовольняють першу аксіому зліченності, $X = X_1 \times \dots \times X_n$, $Y = X_{n+1}$ і $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} \rightarrow M$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множини $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ для кожного $y \in Y$ чи $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ будуть залишковими в X , якщо Y задовольняє першу чи другу аксіому зліченності відповідно.*

Доведення. За теоремою 5 множина $f(X \times Y)$ є зв'язною в M , а значить міститься в деякій компоненті зв'язності площини Сідра M . Далі, міркуючи аналогічно як і в доведенні теореми 4, отримаємо, що множина значень $f(X \times Y)$ нашого відображення f міститься в метризовному підпросторо-

рі площини Сідра M . Отже, якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то за теоремою А множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$ для кожного $y \in Y$. Якщо ж простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то за теоремою В отримуємо залишковість множини $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ в просторі X .

Висловлюю щирю вдячність Маслюченку Володимирі Кириловичу за допомогу та постійну увагу при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори // *Мат. вісн. НТШ.* – 2010. – **7**. – С.111-121.
2. *Карлова О.О., Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Площина Бінга і нарізно неперервні відображення // *Мат. студії.* – 2012. – **38**, №2. – С.188-193.
3. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // *Pacif. J. Math.* – 1961.–**11**. – P. 105-126.
4. *В. Маслюченко, О. Мироник* Вичерпність гребінця Сідра // *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"*. Тези доповідей. 20 - 26 лютого, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2012. - С.44-45.
5. *В. Маслюченко, О. Маслюченко, О. Мироник* Аксіоми відокремності і метризованість добутку Сідра // *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"*. Тези доповідей. 25 лютого - 3 березня, Ворохта. - Ів.-Франківськ, 2013. - С. 63-64.
6. *В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник* Добуток Сідра та вичерпні простори // *Бук. мат. журн.* – 2013. – Т. 1, №1-2. С. 107-112.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
8. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
9. *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // *C.R. Acad. Sc. Paris. Sécs. A.* – 1979. – **288**. – P.647-648.
10. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // *Мат. методи і фіз-мех. поля.* – 1998. – **41**, №4. – С. 39-45.