УДК 517.55

©2015 р. А.О. Куриляк, О.Б. Скасків, С.Р. Скасків

Львівський національний університет імені Івана Франка

АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА І ЕФЕКТ ЛЕВІ ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У БІКРУЗІ

Доведено аналог нерівності Вімана для випадкових функцій аналітичних в бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Отримані нерівності точні.
Ключові слова: максимум модуля, максимальний член, аналітична функція в бікрузі, нерівність типу Вімана, випадкова аналітична функція.

In this paper we prove some analogue of Wiman's type inequality for random analytic functions in the bidisc $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. The obtained inequality is sharp.
Key words: maximum modulus, maximal term, analytic functions in the bidisc, Wiman's type inequality, random analytic function.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{A}_1$ — клас аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \colon |z| < 1\}$ функцій f, предсталених степеневим рядом вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R(f) = 1$. Для $r \in [0;1)$ і $f \in \mathcal{A}_1$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n \colon n \geq 0\}$. Для будь-якої аналітичної функції $f \in \mathcal{A}_1$ і кожного $\delta > 0$ існує множина $E_f(\delta) \subset (0,1)$ скінченної логарифмічної міри на $(0,1)$, тобто

$$\int_{E_f(\delta)} \frac{dr}{1-r} < +\infty,$$

така, що для всіх $r \in (0,1)\backslash E_f(\delta)$ виконується нерівність (1, 2])

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}. \tag{2}$$

Подібні нерівності можна знайти в [3–8]. В [2] зазначено, що для функції $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^\varepsilon\} z^n$, $\varepsilon \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\varliminf_{r\to 1-0} \frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \frac{\mu_g(r)}{1-r}} \geq C > 0. \tag{3}$$

У [9 – 17] доведено різні аналоги нерівності Вімана для цілих та випадкових цілих функцій від декількох змінних, а в [18] для аналітичних в області $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ функцій від двох змінних. Нерівність типу Вімана в класі $\mathcal{A}^2$ аналітичних в одиничному бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ функцій вигляду

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$$

розглянуто в [19].

Для $r = (r_1, r_2) \in [0,1)^2$ і функції $f \in \mathcal{A}^2$ позначимо

$$\triangle_r = \{t \in [0,1)^2 \colon t_1 \geq r_1,\ t_2 \geq r_2\},$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z_1, z_2)| \colon |z_1| \leq r_1,\ |z_2| \leq r_2\},$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_{nm}| r_1^n r_2^m \colon (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2\},$$
$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} |a_{nm}| r_1^n r_2^m.$$

Казатимемо, що $E \subset [0,1)^2$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^2$, якщо існує $r_0 \in [0,1)^2$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \iint_{E\cap\triangle_{r_0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} < +\infty,$$

тобто множина $E \cap \triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. Позначимо клас таких множин через $\mathcal{E}$.

Для $f \in \mathcal{A}^2$ в [19] доведено таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^2$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f,\delta) \subset [0,1)^2, E \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \backslash E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mathfrak{M}_f(r) \leq \mu_f(r)\biggl(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\times \times \ln\Bigl(\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Bigr)\biggr)^{1+\delta}. \qquad (4)$$

У статті [19] також доведено, що степінь $1+\delta$ у нерівності (4) не можна замінити числом меншим за 1. Це випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Існує функція $f \in \mathcal{A}^2$, стала $C > 0$ і множина $E \subset [0,1)^2, E \notin \mathcal{E}$ такі, що для всіх $r \in E$ маємо*

$$M_f(r) \geq C\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\times \times \ln\Bigl(\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Bigr).$$

Основною метою цієї статті є доведення точної нерівності Вімана для випадкових аналітичних функцій у бікрузі, як виявиться, м.н. степінь $1+\delta$ у нерівності (4) можна замінити числом $1/2+\delta$. При цьому цей степінь м.н. не можна замінити числом меншим за $1/2$. Але розпочинаємо з двох теорем в класі випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі, друга з яких містить одну просту ідею, якою ми наприкінці статті скористаємось у доведенні теореми 6.

2. Нерівність Вімана для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі. Нехай $\Omega = [0,1]$ і P — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Розглянемо ймовірнісний простір Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω. Нехай $X = (X_n(t))$ — деяка послідовність випадкових величин, визначена на цьому просторі. Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функції $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ через $\mathcal{K}(f,X)$ позначимо клас випадкових аналітичних функцій

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \qquad (5)$$

Вираз "майже напевно" використовуватиметься в сенсі, що відповідна властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P на $\Omega = [0,1]$. Казатимемо, що деяке співвідношення виконується майже напевно у класі $\mathcal{K}(f,X)$, якщо воно виконується кожної аналітичної функції $f(z,t)$ вигляду (5) майже напевно по t.

Припустимо, що $X = (X_n(t))$ — мультиплікативна система (МС) рівномірно обмежена 1. Тобто, для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $t \in [0,1]$ маємо $|X_n(t)| \leq 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$ і

$$\forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k: \quad \mathbf{M}(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}) = 0,$$

де $\mathbf{M}\xi$ — математичне сподівання випадкової величини ξ.

Подібно, як і у статті [3], доводиться таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $f(z,t)$ — випадкова аналітична функція вигляду (5), $X \in$ МС і $|X_n| \leq 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді майже напевно у $\mathcal{K}(f,X)$ для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f,t,\delta) \subset [0,1)$ асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0;1)$ ($\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$) така, що для всіх $r \in [0,1) \backslash E$ маємо*

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r)^2}\cdot \ln\frac{\mu_f(r)}{1-r}\right)^{1/4+\delta}. \qquad (6)$$

Точність нерівності (6) випливає з такого твердження.

Теорема 4. *Нехай X довільна послідовність випадкових величин таких, що $|X_n| \geq 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді існують аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функція $f(z)$ і сталі $C > 0$, $0 < r_0 < 1$ такі, що майже напевно у $\mathcal{K}(f,X)$ для всіх $r \in (r_0,1)$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) > C\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r)^2}\cdot \ln\frac{\mu_f(r)}{1-r}\right)^{1/4}. \qquad (7)$$

Доведення. Розглянемо

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{\sqrt{n}\} z^n,$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{\sqrt{n}/2\} z^n,$$

$$f(z,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n(t)\exp\{\sqrt{n}/2\}z^n.$$

Зауважимо, що для всіх $0<r<1$

$$\mu_g(r^2)=\max\{e^{\sqrt{n}}r^{2n}\colon n\ge 1\}=$$
$$=\max\{(e^{\sqrt{n}/2}r^n)^2\colon n\ge 1\}=(\mu_f(r))^2,$$

тому, використовуючи рівність Парсеваля, отримуємо, що майже напевно для всіх $0<r<1$ виконується нерівність

$$M_g(r^2)\le\sum_{n=1}^{+\infty}|X_n(t)|^2\exp\{\sqrt{n}\}r^{2n}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta},t)|^2d\theta\le(M_f(r,t))^2.$$

Отже, використавши (3), при $r\to 1-0$ отримаємо

$$(M_f(r,t))^2\ge M_g(r^2)\ge$$
$$\ge C\frac{\mu_g(r^2)}{1-r^2}\cdot\ln^{1/2}\frac{\mu_g(r^2)}{1-r^2}\ge$$
$$\ge\frac{C}{2}\frac{\mu_f^2(r)}{1-r}\cdot\ln^{1/2}\frac{\mu_f^2(r)}{1-r},$$

тобто,

$$M_f(r,t)\ge\sqrt{\frac{C}{3}}\frac{\mu_f(r)}{\sqrt{1-r}}\cdot\ln^{1/4}\frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

3. Нерівність Вімана для випадкових аналітичних функцій у бікрузі. Нехай $Z=(Z_{nm}(t))$ — комплексна послідовність випадкових величин $Z_{nm}(t)=X_{nm}(t)+iY_{nm}(t)$ така, що обидві послідовності $X=(X_{nm}(t))$ і $Y=(Y_{nm}(t))$ — дійсні мультиплікативні системи, $\mathcal{K}_2(f,Z)$ — клас випадкових аналітичних функцій вигляду

$$f(z,t)=\sum_{n+m=0}^{+\infty}a_{nm}Z_{nm}(t)z_1^nz_2^m.$$

Для таких функцій доведемо таку теорему.

Теорема 5. *Нехай $f\in\mathcal{A}^2$, Z — МС рівномірно обмежена числом 1, $\delta>0$. Тоді майже напевно у $\mathcal{K}_2(f,Z)$ існує множина $E=E(f,t,\delta), E\in\mathcal{E}$ така, що для всіх $r\in[0,1)^2\backslash E$*

$$M_f(r,t)\le\mu_f(r)\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\times$$
$$\times\ln\Big(\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)\Big)^{1/2+\delta}. \qquad (8)$$

Лема 1. ([12, 15]). *Нехай $X=(X_{nm}(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1. Тоді для кожного $\beta>0$ існує стала $A_\beta>0$, яка залежить тільки від β така, що для всіх $N\ge 4\pi$ і $\{c_{nm}\colon n+m\le N\}\subset\mathbb{C}$ виконується*

$$P\Big\{t\colon\max\Big\{\Big|\sum_{n+m=0}^{N}c_{nm}X_{nm}(t)e^{in\psi_1}e^{im\psi_2}\Big|\colon$$
$$\psi\in[0,2\pi]^2\Big\}\ge A_\beta S_N\ln^{\frac12}N\Big\}\le\frac{1}{N^\beta}, \qquad (9)$$

де $S_N^2=\sum_{n+m=0}^{N}|c_{nm}|^2$.

Лема 2. ([19]). *Нехай $\delta>0$. Тоді існує множина $E\subset[0,1)^2, E\in\mathcal{E}$ така, що для всіх $r\in[0,1)^2\backslash E$ виконуються нерівності*

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le$$
$$\le(\ln\mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}\cdot\frac{1}{1-r_1}\cdot\Big(\frac{1}{1-r_2}\Big)^\delta,$$
$$\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le$$
$$\le(\ln\mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}\cdot\frac{1}{1-r_2}\cdot\Big(\frac{1}{1-r_1}\Big)^\delta.$$

Доведення теореми 5. Не зменшуючи загальності, можемо припустити, що $Z=X=(X_{nm}(t))$ є МС (див. [12, 15, 16]).

Для $k\in\mathbb{Z}_+$ і $l\in\mathbb{Z}$ таких, що $k>-l$ позначимо

$$G_{kl}=\Big\{r=(r_1,r_2)\in[0;1)^2\colon$$
$$k\le\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\le k+1,$$
$$l\le\ln\mu_f(r)\le l+1\Big\},$$
$$G_{kl}^+=\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j=l}^{+\infty}G_{ij}.$$

Зауважимо, що множина

$$E_0=\Big\{r\in[0;1)^2\colon$$
$$\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}+\ln\mu_f(r)<1\Big\}=$$

$$= \Big\{ r \in [0;1)^2 \colon \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} < e \Big\} \in \mathcal{E},$$

бо $\exists r_0 \colon E_0 \cap [r_0;1)^2 = \varnothing$.

За лемою 2 існує множина $E_1 \supset E_0$, $E_1 \in \mathcal{E}$ така, що для всіх $r \in [0;1)^2 \setminus E_1$ маємо

$$\sum_{n+m=0}^{+\infty} (n+m) \cdot |a_n| r^n \le \mathfrak{M}_f(r)(\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{1-r_1} \Big(\frac{1}{1-r_2} \Big)^{\delta} + \frac{1}{1-r_2} \Big(\frac{1}{1-r_1} \Big)^{\delta} \Big) \le$$
$$\le \mu_f(r) \Bigg(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \times$$
$$\times \ln \Big\{ \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big\} \Bigg)^{1+\delta} \times$$
$$\times \Big(\ln \mu_f(r) + (1+\delta) \Big(\sum_{j=1}^{2} \ln \frac{1}{1-r_j} +$$
$$+ \ln \Big(\ln \mu_f(r) + \sum_{j=1}^{2} \ln \frac{1}{1-r_j} \Big) \Big) \Big)^{1+\delta} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{1-r_1} \Big(\frac{1}{1-r_2} \Big)^{\delta} + \frac{1}{1-r_2} \Big(\frac{1}{1-r_1} \Big)^{\delta} \Big) \le$$
$$\le \mu_f(r) \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{2+2\delta} \times$$
$$\times \ln^{2+2\delta} \Big\{ \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big\}.$$

Отож,

$$\sum_{n+m \ge d} |a_{nm}| r_1^n r_2^m \le$$
$$\le \sum_{n+m \ge d} \frac{n+m}{d} |a_{nm}| r_1^n r_2^m \le$$
$$\le \frac{1}{d} \sum_{n+m=0}^{+\infty} (n+m) |a_n| r^n \le$$
$$\le \frac{1}{d} \mu_f(r) \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{2+2\delta} \times$$
$$\times \ln^{2+2\delta} \Big\{ \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big\} \le \mu_f(r), \qquad (10)$$

де

$$d = d(r) = \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{2+3\delta} \times$$
$$\times \ln^{2+2\delta} \Big\{ \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big\}.$$

Позначимо $G_{kl}^* = G_{kl} \setminus E_2$, $I = \{(i;j) \colon G_{ij}^* \ne \varnothing\}$,

$$E_2 = E_1 \cup \Big(\bigcup_{(i,j) \notin I} G_{ij} \Big).$$

Тоді $\# I = +\infty$. Для $(k,l) \in I$ виберемо послідовність $r^{(k,l)} \in G_{kl}^*$ так, що $\mu_f(r^{(k,l)}) = \min\limits_{r \in G_{kl}^*} \mu_f(r)$. Тоді для всіх $r \in G_{kl}^*$ отримаємо

$$\mu_f(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r) \le e \mu_f(r^{(k,l)}), \qquad (11)$$
$$\frac{1}{e} \frac{1}{(1-r_1^{(k,l)})(1-r_2^{(k,l)})} \le$$
$$\le \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \le$$
$$\le e \frac{1}{(1-r_1^{(k,l)})(1-r_2^{(k,l)})}, \qquad (12)$$
$$\frac{1}{e^2} \frac{\mu_f(r^{(k,l)})}{(1-r_1^{(k,l)})(1-r_2^{(k,l)})} \le$$
$$\le \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \le$$
$$\le e^2 \frac{\mu_f(r^{(k,l)})}{(1-r_1^{(k,l)})(1-r_2^{(k,l)})} \qquad (13)$$

і також

$$\bigcup_{(k,l) \in I} G_{kl}^* = \bigcup_{(k,l) \in I} G_{kl} \setminus E_1 =$$
$$= \bigcup_{k,l=1}^{+\infty} G_{kl} \setminus E_1 = [0;1)^2 \setminus E_1.$$

Позначимо $N_{kl} = [2 d_1(r^{(k,l)})]$, де

$$d_1(r) = e \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{2+3\delta} \times$$
$$\times \ln^{2+2\delta} \Big\{ e^2 \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big\}.$$

Для $r \in G_{kl}^*$ приймемо

$$W_{N_{kl}}(r,t) = \max \Big\{ \Big| \sum_{n+m \le N_{kl}} a_{nm} r_1^n r_2^m \times$$

$$\times e^{in\psi_1+in_2\psi_2}X_{nm}(t)\Big|: \psi\in[0,2\pi]^2\Big\}.$$

Для вимірних за Лебегом множин $G\subset G_{kl}^*$ і для $(k,l)\in I$ позначимо

$$\nu_{kl}(G)=\frac{\operatorname{meas}_2(G)}{\operatorname{meas}_2(G_{kl}^*)},$$

де meas_2 — міра Лебега на $\mathbb{R}^2$.

Зауважимо, що ν_{kl} є ймовірнісною мірою визначеною на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин G_k^* ([12]). Нехай $\Omega=\bigcup_{(k,l)\in I}G_{kl}^*$ і

$$k_i,l_{i,j}\colon (k_i,l_{i,j})\in I,$$
$$k_i<k_{i+1},\ l_{i,j}<l_{i,j+1},\ \forall i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом підмножин G, які належать Ω позначимо

$$\nu(G)=2^{k_0}\sum_{i=0}^{+\infty}\Bigg(\frac{1}{2^{k_i}}\Big(1-\Big(\frac12\Big)^{k_{i+1}-k_i}\Big)\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{N_i}\frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}}\frac{(1-(\frac12)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}})}{1-(\frac12)^{l_{iN_i}}}\times$$
$$\times\nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}}(G\cap G^*_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}})\Bigg),\qquad(14)$$

де $N_i=\max\{j\colon (k_i,l_{ij})\in I\}$. Зауважимо, що $\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(G^*_{k_{j+1}l_{j+1}})=\nu(\Omega)=1$.

Тоді ν є ймовірнісною мірою визначеною на вимірних підмножинах Ω. На $[0,1]\times\Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0=P\otimes\nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν. Тепер для $(k;l)\in I$ визначимо

$$F_{kl}=\{(t,r)\in[0,1]\times\Omega\colon$$
$$W_{N_{kl}}(r,t)>AS_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2}N_{kl}\},$$
$$F_{kl}(r)=\{t\in[0,1]\colon$$
$$W_{N_{kl}}(r,t)>AS_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2}N_{kl}\},$$

де $S^2_{N_{kl}}(r)=\sum_{n+m=0}^{N_{kl}}|a_n|^2r^{2n}$ і A — стала з леми 1 з $\beta=1$. За теоремою Фубіні і лемою 1 з $c_n=a_nr^n$ and $\beta=1$, ми отримаємо для $(k,l)\in I$

$$P_0(F_{kl})=\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{F_{kl}(r)}dP\Bigg)d\nu=$$
$$=\int\limits_{\Omega}P(F_{kl}(r))d\nu\le\frac{1}{N_{kl}}\nu(\Omega)=\frac{1}{N_{kl}}.$$

Зауважимо, що

$$N_{kl}>\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^2\times$$
$$\times\ln^{2+2\delta}\Bigg\{\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Bigg\}\ge e^k(l+k)^{2+2\delta}.$$

Тому

$$\sum_{(k,l)\in I}P_0(F_{kl})\le\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=-k+1}^{+\infty}\frac{1}{e^k(l+k)^{2+2\delta}}<+\infty.$$

За лемою Бореля-Кантелі нескінченна кількість подій $\{F_{kl}\colon (k,l)\in I\}$ може відбуватися лише з ймовірністю нуль. Отож,

$$P_0(F)=1,\ F=\bigcup_{s=1}^{+\infty}\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{\substack{k\ge s,\ l\ge m\\(k,l)\in I}}\overline{F_{kl}}\subset[0,1]\times\Omega.$$

Тоді для кожної точки $(t,r)\in F$ існують $k_0=k_0(t,r)$ і $l_0=l_0(t,r)$ такі, що для всіх $k\ge k_0$, $l\ge l_0$, $(k,l)\in I$ маємо

$$W_{N_{kl}}(r,t)\le AS_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2}N_{kl}.$$

Тоді $\nu(F^\wedge(t))=1$ (див. [10]).

Для кожного $t\in F_1([10])$ і $(k,l)\in I$ виберемо точку $r_0^{(k,l)}(t)\in G^*_{kl}$ так, що

$$W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)\ge\frac34M_{kl}(t),$$
$$M_{kl}(t)\overset{\text{def}}{=}\sup\{W_{N_{kl}}(r,t)\colon r\in G^*_{kl}\}.$$

Тоді з $\nu_{kl}(F^\wedge(t)\cap G^*_{kl})=1$ для всіх $(k,l)\in I$ випливає існування точки $r^{(k,l)}(t)\in G^*_{kl}\cap F^\wedge(t)$ такої, що

$$|W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)-W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)|<\frac14M_{kl}(t)$$

або

$$\frac34M_{kl}(t)\le W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)\le$$
$$\le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)+\frac14M_{kl}(t).$$

Оскільки $(t, r^{(k,l)}(t)) \in F$, то з нерівності (14) випливає, що

$$\frac{1}{2} M_{kl}(t) \le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t) \le \\ \le AS_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t)) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

З $r^{(k,l)} = r^{(k,l)}(t)$ отримаємо

$$S^2_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r^{(k,l)}) \mathfrak{M}_f(r^{(k,l)}) \le \\ \le \mu_f^2(r^{(k,l)}) \Bigg(\frac{1}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \times \\ \times \ln \Bigg\{ \frac{\mu_f(r^{(k,l)})}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \Bigg\} \Bigg)^{1+\delta}.$$

Отож, для $t \in F_1$ і всіх $k \ge k_0(t)$, $l \ge l_0(t)$, одержимо

$$S_N(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r^{(k,l)}) \Bigg(\frac{1}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \times \\ \times \ln \Bigg\{ \frac{\mu_f(r^{(k,l)})}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \Bigg\} \Bigg)^{1/2+\delta/2}. \quad (15)$$

З (11)–(13) випливає, що $d_1(r^{(k,l)}) \ge d(r)$ для $r \in G^*_{kl}$. Тоді для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}$, $(k, l) \in I$, $k \ge k_0(t), l \ge l_0(t)$ одержимо

$$M_f(r, t) \le \sum_{n+m \ge 2d_1(r^{(k,l)})} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + W_{N_{kl}}(r, t) \le \\ \le \sum_{n+m \ge 2d(r)} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + M_{kl}(t).$$

Для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}$, $l \ge l_0(t)$ і $k \ge k_0(t)$ правильна нерівність

$$M_f(r^{(k,l)}, t) \le \mu_f(r^{(k,l)}) + \\ + 2AS_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \ln^{1/2} N_{kl} \le \mu_f(r^{(k,l)}) + \\ + 2A\mu_f(r^{(k,l)}) \Bigg(\frac{1}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \times \\ \times \ln \Bigg\{ \frac{\mu_f(r^{(k,l)})}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \Bigg\} \Bigg)^{1/2+\delta/2} \times \\ \times \ln \Bigg(6 \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 - r_j^{(k,l)})^{2+3\delta}} \times \\ \times \ln^{3/2+2\delta} \Bigg\{ \frac{e^2 \mu_f(r^{(k,l)})}{(1 - r_1^{(k,l)})(1 - r_2^{(k,l)})} \Bigg\} \Bigg).$$

Отже, для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}$, $k \ge k_0(t)$ і $l \ge l_0(t)$

$$M_f(r, t) \le \mu_f(r) \Bigg(\prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \times \\ \times \ln \Bigg\{ \frac{\mu_f(r)}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \Bigg\} \Bigg)^{1/2+\delta}. \quad (16)$$

Нерівність (16) виконується майже напевно для ($t \in F_1$, $P(F_1) = 1$) і всіх

$$r \in \Big(\bigcup_{(k,l) \in I} (G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)) \cap G^+_{kl} \Big) \backslash E^* = \\ = ([0; 1)^2 \cap G^+_{kl}) \setminus (E^* \cup G^* \cup E_1) = \\ = [0; 1)^2 \setminus E_2,$$

де

$$G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{kl},$$

$$E_2 = E_1 \cup G^* \cup E^*, \; G^* = \bigcup_{(k,l) \in I} (G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)).$$

Залишається зауважити, що для $\nu(G^*)$ правильна рівність $\nu(G^*) = \sum_{(k,l) \in I} (\nu_{kl}(G^*_{kl}) - \nu_{kl}(F^\wedge(t))) = 0$. Тоді для всіх $(k, l) \in I$ отримаємо

$$\nu_{kl}(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \frac{\mathrm{meas}_2(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t))}{\mathrm{meas}_2(G^*_{kl})} = 0, \\ \mathrm{meas}_2(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \\ = \iint_{G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)} \frac{dr_1 dr_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)} = 0.$$

Теорему 5 доведено.

4. Точність теореми 5. Доведемо що степінь $1/2 + \delta$ у нерівності (8) не можна замінити меншим числом ніж $1/2$.

Теорема 6. *Нехай Z послідовність випадкових величин таких, що $|Z_{nm}| \ge 1$ для майже всіх $t \in [0; 1]$. Тоді існує аналітична функція $f \in \mathcal{A}^2$, стала $C > 0$ і множина $E = E(f, t, \delta) \subset [0, 1)^2, E \notin \mathcal{E}$ такі, що майже напевно в $\mathcal{K}_2(f, Z)$ для $r \in E$ виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \ge C \frac{\mu_f(r)}{\sqrt{(1 - r_1)(1 - r_2)}} \times$$

$$\times \ln^{1/2}\left\{\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right\}. \qquad (17)$$

Доведення Розглянемо функцію

$$f(z) = f_0(z_1)f_0(z_2),\ z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2,$$

$$f_0(\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\sqrt{k}/2}\tau^k,\ \tau\in\mathbb{D}.$$

$g(t) = \ln\frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t}$ — додатна неперервна зростаюча на $(1/2;1)$ функція, $\lim_{t\to 1-0} g(t) = +\infty$. Тому існує обернена функція $g^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to (1/2;1)$.

Для $f(z)$ і $r\in[0;1)^2$ маємо

$$M_f(r) = M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2),$$
$$\mu_f(r) = \mu_{f_0}(r_1)\mu_{f_0}(r_2).$$

З теореми 4 випливає існування $t'\in(0;1)$ і сталої $C>0$ таких, що для $t\in(t',1)$ виконується нерівність

$$M_{f_0}(t) \geq C_1\frac{\mu_{f_0}(t)}{\sqrt{1-t}}\ln^{1/4}\frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t}. \qquad (18)$$

Спочатку доведемо нерівність

$$g^{-1}(3g(t)) - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > 1 - g^{-1}(3g(t)),$$
$$t\to 1-0. \qquad (19)$$

Для фіксованого $t\in(0;1)$ розглянемо функцію $l(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - x\ln\frac{1}{t}$. $x_{\max} = \frac{1}{16\ln^2\frac{1}{t}}$ — єдина точка максимуму функції $l(x)$. Тому

$$\max\{l(x)\colon x>0\} = l_{\max} = \frac{1}{16\ln\frac{1}{t}},$$

$$g(t) = \ln\frac{\mu_{f_0}(t)}{1-t} \sim \ln\mu_{f_0}(t) \sim \frac{1}{16\ln\frac{1}{t}} \sim$$
$$\sim \frac{1}{16(1-t)},\ t\to 1-0.$$

Тоді $g(t) < 3g(2t-1),\ t\to 1-0$. Отже,

$$g(2t-1) > \frac{g(t)}{3},\ 2t-1 > g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right),$$
$$t - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > 1-t.$$

Використавши $g^{-1}(3g(t)) > g^{-1}(g(t)) = t$ ми отримаємо при $t\to 1-0$

$$g^{-1}(3g(t)) - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) > t - g^{-1}\left(\frac{g(t)}{3}\right) >$$
$$> 1-t > 1 - g^{-1}(3g(t)).$$

Таким чином нерівність (19) доведена.

Існує стала $C_1\in(0,1)$ і $r^*\in(r',1)$, такі що для всіх $z\in\{z\colon t^*<|z_k|<1,\ k\in\{1,2\}\}$ маємо

$$M_{f_0}(r_k) \geq C_1\frac{\mu_{f_0}(r_k)}{\sqrt{1-r_k}}\ln^{1/4}\frac{\mu_{f_0}(r_k)}{1-r_k}, \qquad (20)$$
$$g^{-1}\left(\frac{g(t^*)}{3}\right) > r^0.$$

Для всіх $z\in\{z\colon r^*<|z_j|<1,\ j\in\{1,2\}\}$ правильне співвідношення

$$M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2) \geq$$
$$\geq \prod_{i=1}^{2}\left(C_1\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{\sqrt{1-r_i}}\ln^{1/4}\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}\right),$$
$$M_f(r) \geq C_1^2\mu_f(r)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{1-r_i}}\left(\prod_{i=1}^{2}\ln\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}\right)^{1/4}. \qquad (21)$$

Для $r_1\in(t^*,1)$ визначимо x і y:

$$x = x(r_1) = g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right),$$
$$y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Нехай

$$E^* = \{r\in[0,1)^2\colon r_1\in(t^*,1),\ r_2\in(x,y)\}.$$

Зафіксуємо $r_1\in(r^*,1)$. Тоді x і y також фіксовані і

$$g(x) = g(r_1)/3,\ g(y) = 3g(r_1),$$
$$g(y) = 9g(x),\ r_2\in(x,y).$$

Тоді використавши $r_1>x$ отримаємо для всіх $r\in E^*$

$$g(r_1)g(r_2) \geq g^2(x) = \frac{g^2(y)}{81} =$$
$$= \frac{1}{324}(g(y)+g(y))^2 \geq \frac{1}{324}(g(r_1)+g(r_2))^2.$$

Отож, для всіх $r\in E^*$

$$M_f(r) \geq \frac{C_1^2}{324}\frac{\mu_f(r)}{\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)}}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{2}\ln\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{C_2\mu_f(r)}{\sqrt{(1-r_1)(1-r_2)}}\ln^{1/2}\left(\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right).$$

Залишається довести, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки $g^{-1}(\frac{g(r^*)}{3})>r^0$, то $E^*\cap\triangle_{r^0}=E^*$. Отже,

$$\nu_{\ln}(E^*\cap\triangle_{r^0})=\nu_{\ln}(E^*)=$$
$$=\iint\limits_{E^*}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}=$$
$$=\int\limits_{t^*}^{1}\int\limits_{x(r_1)}^{y(r_1)}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}=$$
$$=\int\limits_{t^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-y(r_1)}-\ln\frac{1}{1-x(r_1)}\right)\frac{dr_1}{1-r_1}=$$
$$=\int\limits_{t^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-g^{-1}(3g(r_1))}-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{1}{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}\right)\frac{dr_1}{1-r_1}=$$
$$=\int\limits_{t^*}^{1}\ln\frac{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\frac{dr_1}{1-r_1}=$$
$$=\int\limits_{t^*}^{1}\ln\left(1+\frac{g^{-1}(3g(r_1))-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\right)\frac{dr_1}{1-r_1}>$$
$$>\int\limits_{t^*}^{1}\ln 2\cdot\frac{dr_1}{1-r_1}=+\infty.$$

Теорему 6 повністю доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kővari T. On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc // J. London Math. Soc. – 1966. – V.41, P. 129–137.
2. Сулейманов Н.М. Оценки типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // Докл. АН СССР. – 1980. – Т.253, №4. – С. 822–824.
3. Філевич П. В. Оцінки типу Вімана-Валірона для випадкових аналітичних у крузі функцій // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1997. – Вип.15. – С. 227–238.
4. Скасків О.Б., Куриляк А.О. Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т.2, №1. – С.109–118.
5. Куриляк А.О., Скасків О.Б. *Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера* // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. - Т.1, №4. - Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. – С.73–79.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Chyzhykov I.E. *Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions* // Bull. Soc. Sc. et des letters de Lodz. – 2012. – V.62, №3. – P.17–33.
7. Kuryliak A. O., Skaskiv O. B., Chyzhykov I.E. *Baire categories and classes of analytic functions in which the Wiman-Valiron's type inequality can be almost surely improved* // arXiv: 1206.3655v1 [math.CV] 16 Jun 2012. - 17 p.
8. Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра* // Карпатські мат. публ. – 2013. – Т.5, №2. – С.305–309.
9. Shumitzky A. A probabilistic approach to the Wiman-Valiron's theory for entire functions of several complex variables // Complex Variables. – 1989. – V.13. – P. 85–98.
10. Fenton P.C. *Wiman-Valiron theory in two variables* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – V.347, №11. – P. 4403–4412.
11. Gopala Krishna J., Nagaraja Rao I.H. *Generalized inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$* // J. Indian Math. Soc. -– 1977. -– 41. -– P.203-–219.
12. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Про нерівність Вімана для випадкових цілих функцій від двох змінних* // Мат. Студії. – 2005. – Т.23, №2. – С.149–160.
13. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Нерівностъ типу Вімана для цілих функцій від двох комплексних змінних з швидко коливними коефіцієнтами* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2005. – Т.48, №4. – С.78–87.
14. Скасків О.Б., Зрум О.В. Уточнення нерівності Фентона для цілих функцій від двох комплексних змінних// Матем. вісник НТШ. – 2006. – Вип.3. – С.56–68.
15. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequalities without exceptional sets for random

entire functions of several variables // Mat. Stud. – 2012. – V.38, №1. – P. 35–50.

16. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables // Ufimsky Mat. Journ. – 2014. – V.6, №2. – P. 118–127.
17. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O. *Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients* // Mat. Stud. – 2015. – V.43, №1. – P.16-–26.
18. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. *Wiman's type inequality for some double power series* // Mat. Stud. – 2013. – V.39, №2. – P.134–141.
19. Куриляк А., Скасків О., Шаповаловська Л. *Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі* // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т.2, №2-3. – С.130–135.
20. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. *Нерівність типу Вімана для аналітичних в полікрузі функцій* // Укр. мат. журн. – 2015. (прийнято до друку)