Михайло Гордей[1], Сергій Горошкевич[1], Олена Карлова[1,2]

Асимптотична щільність нещасливих чисел

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ розглянемо суму квадратів усіх його цифр і позначимо її через $S^2(n)$. Покладемо $T_0(n) = n$, $T_1(n) = S^2(n)$, $\ldots$, $T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n))$ для $k \geq 1$. Число n називається щасливим, якщо існує $k \geq 1$, таке, що $T_k(n) = 1$. Інакше, число n називається нещасливим. Відомо, що для кожного нещасливого числа n існує таке $k \geq 1$, що $T_k(n) \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. Якщо $c \in C$, то ми кажемо, що нещасливе число n є c-нещасливим у випадку, коли $T_k(n) = c$ і $T_{k-1}(n) \notin C$ для деякого $k \geq 1$.

В даній роботі досліджується щільність c-нещасливих чисел. Одержано оцінки на верхню та нижню асимптотичні щільності c-нещасливих чисел та доведено, що натуральної щільності нещасливих чисел не існує.

Ключові слова і фрази: щасливі числа, апроксимативна щільність, цифрові функції.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *o.karlova@chnu.edu.ua*

1 Мотивація і постановка задачі

Через $\mathbb{N}_+$ ми позначаємо множину всіх невід'ємних цілих чисел. Під *інтервалом* $I = [a, b]$ ми розуміємо множину $\{n \in \mathbb{N}_+ : a \leq n \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Символом $|I|$ позначається потужність, тобто, кількість цілих чисел в інтервалі I.

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ через $\omega(n)$ ми будемо позначати кількість цифр цього числа. Нехай

$$n = \sum_{k=0}^{\omega(n)-1} 10^k b_k,$$

де $b_k \in \{0, \ldots, 9\}$, і

$$S^2(n) = \sum_{k=0}^{\omega(n)-1} b_k^2.$$

Далі, покладемо

$$T_0(n) = n,\ T_1(n) = S^2(n),\ \ldots,\ T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n)) \text{ для } k \geq 1.$$

Означення 1. Число n називається *щасливим*, якщо існує $k \geq 1$, таке, що $T_k(n) = 1$. Інакше, число n називається *нещасливим*.

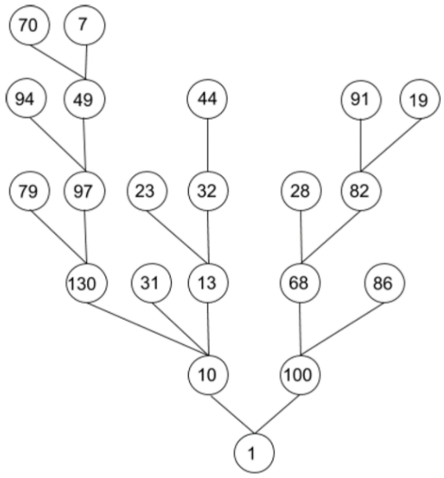


Рис. 1: Щасливе дерево

Добре відомо [4], що для кожного нещасливого натурального числа n існує $k \in \mathbb{N}$, таке, що $T_l(n) \in \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$ для всіх $l \geq k$. Позначимо

$$C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}.$$

Означення 2. *Якщо $c \in C$, то число $n \in \mathbb{N} \setminus C$ назвемо c-нещасливим, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $T_k(n) = c$ і $T_{k-1}(n) \notin C$.*

Для інтервалу I через $d(I)$ позначимо *щільність щасливих чисел* в цьому інтервалі, а для $c \in C$ через $d_c(I)$ позначимо *щільність c-нещасливих чисел* в цьому інтервалі, тобто

$$d(I) = \frac{|\{n \in I : n \text{ є щасливим}\}|}{|I|}, \quad d_c(I) = \frac{|\{n \in I : n \text{ є } c\text{-нещасливим}\}|}{|I|}.$$

Якщо $I = [1, 100]$, то (див. рис. 1 і 2)

$$d(I) = 0.2, d_4(I) = 0.05, d_{16}(I) = 0.05, d_{37}(I) = 0.19, \tag{1}$$

$$d_{58}(I) = 0.03, d_{89}(I) = 0.56, d_{145}(I) = 0.02, d_{42}(I) = 0, d_{20}(I) = 0.02. \tag{2}$$

Властивостям щасливих чисел присвячена низка робіт математиків (див. оглядову статтю [3] і вказану там літературу). Один із напрямків вивчення властивостей щасливих чисел пов'язаний з їх асимптотичною щільністю.

Означення 3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{P}$ – деяка властивість натуральних чисел. Позначимо $P(n) = \{k \in [1, n] : k$ має властивість $\mathcal{P}\}$. Тоді*

- *верхньою асимптотичною щільністю чисел з властивістю $\mathcal{P}$ називається число*

$$\overline{d}_{\mathcal{P}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P(n)|}{n},$$

УДК 511.174
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 11B05; Secondary 11A63.

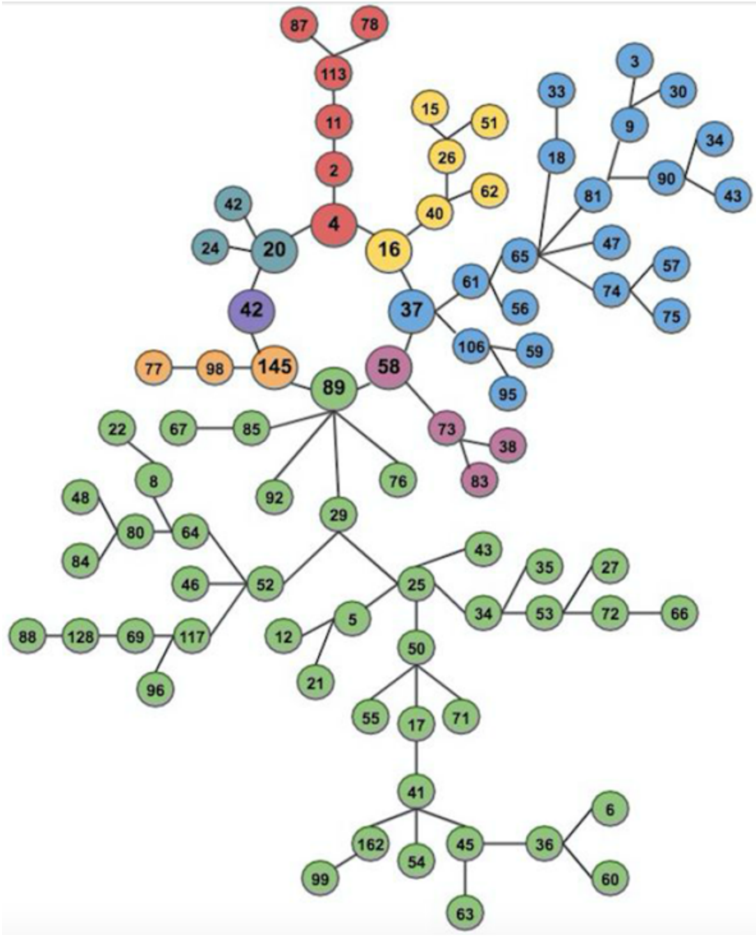


Рис. 2: Нещасливі числа

- *нижньою асимптотичною щільністю чисел з властивістю* $\mathcal{P}$ *називається число*

$$\underline{d}_{\mathcal{P}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|P(n)|}{n},$$

- *натуральною щільністю чисел з властивістю* $\mathcal{P}$ *називається число*

$$d_{\mathcal{P}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|P(n)|}{n},$$

якщо така границя існує.

Якщо $\mathcal{P}$ – це властивість числа бути щасливим, то для верхньої і нижньої асимптотичних щільностей та для натуральної щільності ми вживатимемо позначення $\overline{d}$, $\underline{d}$ та d, відповідно. Якщо $c \in C$ і $\mathcal{P}$ – це властивість числа бути c-нещасливим, то для верхньої і нижньої асимптотичних щільностей та для натуральної щільності чисел з цією властивістю ми вживатимемо позначення $\overline{d}_c$, $\underline{d}_c$ і d_c, відповідно.

В наступній послідовності наводяться значення $d(I)$, де $I = [1, 10^n]$ при $n \in [2, 17]$:

$$0.2, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.14, 0.14, 0.13, 0.12, 0.12.$$

Річард Гай [2] поставив питання, чи існують оцінки зверху і знизу для натуральної щільності щасливих чисел? У 2013 році Гілмер [1] дав відповідь на це питання і показав, що натуральної щільності щасливих чисел не існує.

Теорема 1 (Gilmer). *Верхня та нижня асимптотичні щільності щасливих чисел задовольняють нерівності*

$$\overline{d} > 0.18577 \quad i \quad \underline{d} < 0.1138,$$

отже, натуральної щільності d *не існує.*

У таблиці нижче наведено знайдені нами щільності $d_c(I)$ усіх c-нещасливих чисел для кожного $c \in C$ в інтервалах $I = [1, 10^n]$ при $n \in [2, 8]$:

	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
d_4	0.05	0.066	0.0657	0.06415	0.0063389	0.0630127	0.0601596
d_{16}	0.05	0.096	0.1097	0.10335	0.102019	0.100479	0.0983845
d_{37}	0.19	0.207	0.2202	0.20607	0.199803	0.193805	0.186994
d_{58}	0.03	0.054	0.0464	0.04545	0.046789	0.0455119	0.0451608
d_{89}	0.56	0.362	0.3628	0.38885	0.395517	0.40063	0.407542
d_{145}	0.02	0.051	0.0324	0.0274	0.02685	0.0288736	0.0317456
d_{42}	0	0.012	0.0132	0.011	0.00705	0.0051898	0.0048608
d_{20}	0.02	0.009	0.0054	0.00996	0.015512	0.0206129	0.0225954

Природно виникає задача знаходження оцінок верхньої та нижньої асимптотичних щільностей c-нещасливих чисел для кожного $c \in C$ та знаходження натуральної щільності d_c в разі існування. Дослідженню цього питання присвячена дана робота.

Стаття побудована наступним чином. У другому розділі наводяться необхідні теоретичні відомості та основні ідеї знаходження оцінок асимтотичних щільностей. Математичний апарат для знаходження оцінок побудований цілком подібно до оригінальних ідей Гілмера [1]. Третій розділ містить результати та обробку комп'ютерних обчислень, отриманих авторами. В останньому, четвертому розділі формулюється основна теорема.

Результати статті доповідалися третім співавтором на XVI Літній школі "ATA XVI: Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport" (29.07–07.08.2024, Колочава, Україна).

2 Теоретичні відомості

Нехай x_n – випадкове n-цифрове число, $x_n \in [0, 10^n - 1]$. Тоді обчислення значення випадкової величини $S^2(x_n)$ рівносильне підкиданню n разів грального кубика з 10-ма гранями вартістю $0, 1, 4, \dots, 81$ і знаходженню суми чисел, що випали. Оскільки $S^2(x_n)$ є сумою n незалежних однаково розподілених випадкових величин, то $S^2(x_n)$ досягає нормального розподілу при $n \to \infty$. Зауважимо, що для випадкової величини $x \in I$ має місце рівність

$$d_c(I) = \mathbb{P}(S^2(x) \text{ є } c\text{-нещасливим числом}).$$

Нехай μ – математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини $S^2(x_1)$ (тобто, образу випадкової цифри) і σ^2 – її стандартне відхилення. У нашому випадку $\mu = 28.5$ і $\sigma^2 = 721.05$.

Означення 4. *Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Ми кажемо, що число $n \in \mathbb{N}$ є A-типу, якщо існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $T_k(n) \in A$.*

Зрозуміло, що число щасливе тоді і тільки тоді, коли воно є числом $\{1\}$-типу, а число є нещасливим тоді і тільки тоді, коли воно є числом $\{4\}$-типу.

Основний результат Гілмера стосується оцінки знизу на верхню щільність чисел A-типу для $A = \{1\}$ та $A = \{4\}$. При цьому одним з ключових понять в цій теоремі є поняття n-строгого інтервалу.

Означення 5 ([1])**.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $n \vdots 4$. Інтервал I називається n-строгим, якщо*

- $I \subseteq [10^{n-1}, 10^n - 1]$,
- $|I| = 10^{\frac{3n}{4}}$.

Наведемо тепер теорему Гілмера [1, Theorem 4.1].

Теорема 2. *Нехай $A \subset \mathbb{N}$ – деяка скінченна множина, I_1 – n_1-строгий інтервал, де $n_1 > 13$ і $\overline{d}_A$ – верхня щільність усіх чисел A-типу. Тоді*

$$\overline{d}_A \geq d_A(I_1) \cdot \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n_1/4}} + \frac{4\sigma}{\sqrt{\mu}(1 - 10^{n_1/8})}\right). \tag{3}$$

Зауважимо, що в наших дослідженнях ми не можемо одразу використати теорему Гілмера для оцінки верхньої щільності, наприклад, 4-нещасливих чисел, оскільки ці числа є A-типу, де множина A нескінченна. Справді, для кожного натурального числа $c \in C$ та числа $m \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_c(m) = \{n \in [1, 10^m - 1] \setminus C : S^2(n) = c\} \quad \text{i} \quad A_c = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_c(m).$$

Очевидним є наступне спостереження.

Твердження 1. *Нехай $c \in C$. Число $n \in \mathbb{N}$ є c-нещасливим тоді і тільки тоді, коли n є A_c-типу.*

Безпосередньою перевіркою ми справдили, що метод Гілмера працює також і для чисел A-типу у випадку нескінченної множини A. А саме, має місце наступний факт.

Теорема 3. *Нехай $c \in C$, I_1 – n_1-строгий інтервал, де $n_1 > 100$. Тоді*

$$\overline{d_c} \geq d_c(I_1) \cdot \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n_1/4}} + \frac{4\sqrt{721.05}}{\sqrt{28.5}(1 - 10^{n_1/8})}\right). \tag{4}$$

Доведення цієї теореми досить громіздке і базується на декількох технічних лемах, пояснення яких повністю копіює доведення Гілмера з тим уточненням, що метод Гілмера наведений для чисел в системі числення з основою b, а наша перевірка стосується десяткової системи. Тому ми опускаємо доведення теореми 3 в цій статті, відсилаючи читача до оригінальної роботи Гілмера [1].

Отже, для оцінки верхньої щільності необхідно з допомогою комп'ютерного пошуку знайти інтервал $\tilde{I}_1 \subseteq [0, 10^{n_1}-1]$, на якому щільність $d_c(\tilde{I}_1)$ достатньо велика, побудувати n_1-строгий інтервал I_1, такий, що $d_c(I_1) \geq d_c(\tilde{I}_1)$ та застосувати Теорему 3. Для оцінки нижньої щільності необхідно знайти інтервал $\tilde{I}_2 \subseteq [0, 10^{n_2} - 1]$, на якому щільність $d_c(\tilde{I}_2)$ достатньо мала, побудувати n_2-строгий інтервал I_2, такий, що $d_{\neq c}(I_2) \geq 1 - d_c(\tilde{I}_2)$ та застосувати Теорему 3 (тут через $d_{\neq c}$ ми позначаємо щільність усіх чисел, які не є c-нещасливими).

2.1 Строгі інтервали

Опишемо нескладний спосіб побудови n-строгих інтервалів з даною щільністю.

Лема 1. *Нехай $c \in C$, $n \in \mathbb{N}$, $n \,\vdots\, 4$ і $I = [10^{n-1}, 10^n - 1]$. Тоді існує n-строгий інтервал J, такий, що $d_c(J) \geq d_c(I)$.*

Доведення. Розіб'ємо інтервал I на неперетинні відрізки

$$I_k = \left[10^{n-1} + (k-1) \cdot 10^{\frac{3n}{4}}, 10^{n-1} + k \cdot 10^{\frac{3n}{4}} - 1\right],$$

такі, що $|I_k| = 10^{\frac{3n}{4}}$ для кожного $1 \leq k \leq N$, де $N = 9 \cdot 10^{\frac{n}{4}-1}$, та $I = \bigcup_k I_k$.

Позначимо через m_k кількість c-нещасливих чисел в інтервалі I_k. Зауважимо, що

$$d_c(I_k) = m_k \cdot 10^{-\frac{3n}{4}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{N} m_k = d_c(I) \cdot |I| = d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1},$$

то існує таке $k \in [1, N]$, що

$$m_k \geq \frac{d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}}{N}.$$

Тоді

$$m_k \geq \frac{d_c(I) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}}{9 \cdot 10^{\frac{n}{4}-1}} = 10^{\frac{3n}{4}} \cdot d_c(I),$$

звідки

$$d_c(I_k) = \frac{m_k}{10^{\frac{3n}{4}}} \geq d_c(I).$$

Залишилось покласти $J = I_k$. □

2.2 Алгоритм знаходження щільностей $d_c(I)$

Позначимо $S = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ і нехай $P_{m,i} = \mathbb{P}(S^2(Y_m) = i)$, де Y_m – випадкове m-цифрове число. Тоді

$$P_{m,i} = \frac{|\{(a_1, a_2, \ldots, a_m) : a_k \in S \text{ і } \sum_{k=1}^{m} a_i = i\}|}{10^m}.$$

Для фіксованого m послідовність $(P_{m,i})_{i=1}^{\infty}$ має генеруючу функцію

$$f_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{m,i} x^i = \left(\frac{1 + x + x^4 + \cdots + x^{81}}{10}\right)^m.$$

Звідси випливають наступні рекурентні співвідношення з початковими умовами $P_{0,0} = 1$, $P_{0,i} = 0$ при $i \in F \setminus \{0\}$, і

$$P_{m,i} = \frac{P_{m-1,i} + P_{m-1,i-1} + P_{m-1,i-4} + \cdots + P_{m-1,i-81}}{10}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $S^2(x_m) \subseteq [0, 81m]$. Зокрема, $P_{m,i} = 0$ при $i > 81m$. Використовуючи цей факт разом з (5), ми отримуємо наступний алгоритм для швидкого обчислення щільностей c-нещасливих чисел на інтервалі $[0, 10^m - 1]$.

Алгоритм обчислення $d_c(I)$ для $I = [0, 10^m - 1]$

1. Обчислити значення $P_{m,i}$ для кожного $i \in [0, 81m]$ за допомогою рекурентної формули (5).

2. Використовуючи комп'ютерний перебір, знайти множину $U_c(81m)$ усіх c-нещасливих чисел на проміжку $[0, 81m]$.

3. Обчислити
$$d_4(I) = \sum_{\substack{i \in [0,81m] \\ i \in U_c(81m)}} P_{m,i}.$$

За допомогою цього алгоритму знаходження щільностей $d_c(I)$ є обчислювально можливим для досить великих m.

3 Експериментальні дані та оцінка щільностей

Для $n \vdots 4$ позначимо

$$\delta(n) = \exp\left(\frac{2}{1 - 10^{n/4}} + \frac{4\sqrt{721.05}}{\sqrt{28.5}(1 - 10^{n/8})}\right). \tag{6}$$

Опишемо алгоритм знаходження оцінок щільностей на прикладі $c = 4$. За допомогою алгоритму з попереднього пункту обчисляємо значення $d_4(I_n)$ для всіх $n \in [1, 10^{10\,000}]$.

Мінімальне значення $d_4^m = 0.0436595$ досягається при $n_{4,\min} = 770$, максимальне значення $d_4^M = 0.0664854$ досягається при $n_{4,\max} = 2845$. Далі,

$$d_4([10^{771}, 10^{772}-1]) = 0.043682, \quad d_4([10^{2843}, 10^{2844}-1]) = 0.066484433.$$

З Леми 1 випливає, що існує 2844-строгий інтервал I_2, такий, що

$$d_4(I_2) \geq 0.066484433.$$

Крім того, оскільки

$$d_{\neq 4}([10^{771}, 10^{772}-1]) = 1 - 0.0436595,$$

то Лема 1 гарантує існування 772-строгого інтервалу I_1, такого, що

$$d_{\neq 4}(I_1) \geq 1 - 0.0436595.$$

Для $\delta(772)$ та $\delta(2844)$ маємо оцінки

$$\delta(772) > 1 - 10^{-95}, \quad \delta(2844) > 1 - 10^{-354}.$$

Звідси за Теоремою 3 отримуємо, що

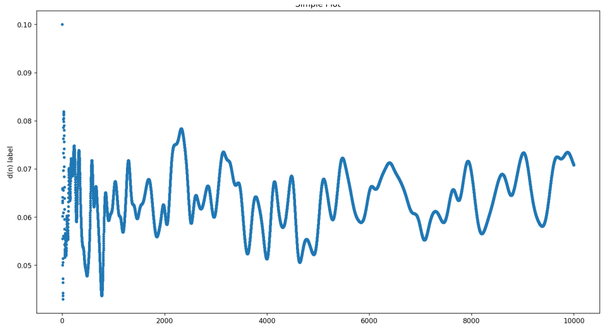
$$\overline{d_4} > 0.0664844329,$$

$\overline{d_{\neq 4}} > 1 - 0.0436594$, звідки випливає, що

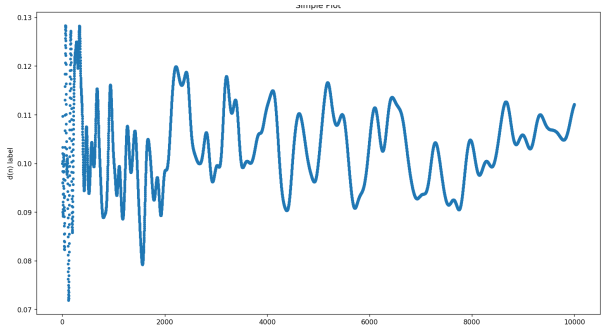
$$\underline{d_4} < 0.0436594.$$

Таким чином, для знаходження оцінок верхньої та нижньої щільності для кожного $c \in C$ нам потрібні максимальне значення d_c^M щільності $d_c(I_n)$ на проміжку $[0, 10^n - 1]$ при $n \in [1, 10^4]$ в точці n_c^M та, відповідно, мінімальне значення d_c^m щільності $d_c(I_n)$ на проміжку $[0, 10^n - 1]$ при $n \in [1, 10^4]$ в точці n_c^m На основі значень n_c^m та n_c^M ми будуємо $n_{1,c}$- та $n_{2,c}$-строгі інтервали з відповідною щільністю та знаходимо оцінки для $\delta_{n_{1,c}}$ та $\delta(n_{2,c})$. Наведемо усі необхідні дані очислень у таблиці нижче та на графіках щільностей $d_c(I)$.

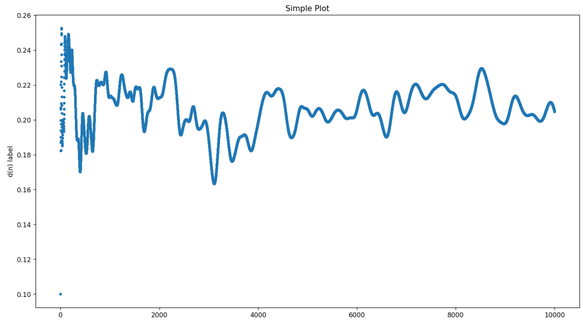
c	n_c^m	n_c^M	d_c^m	d_c^M	$n_{1,c} \vdots 4$	$n_{2,c} \vdots 4$	$\overline{d_c} >$	$\underline{d_c} <$
4	770	2845	0.0436595	0.0664854	772	2844	0.066484	0.043660
16	121	333	0.0718532	0.12826	120	332	0.128228	0.071964
37	3110	160	0.1634	0.249115	3112	160	0.249114	0.163409
58	162	119	0.0331224	0.0661158	160	120	0.0660511	0.033270
89	164	3086	0.326582	0.432535	164	3084	0.432525	0.326571
145	403	10 000	0.0133807	0.0482214	404	10 000	0.048220	0.013383
42	5435	787	0.000630386	0.0189713	5436	788	0.018964	0.000631
20	235	6895	0.000651611	0.0280241	236	6896	0.028021	0.000654



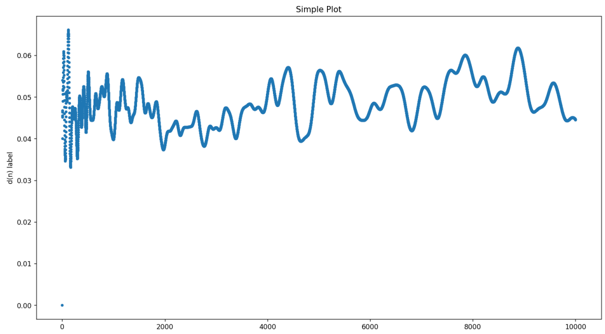
(а) d_4



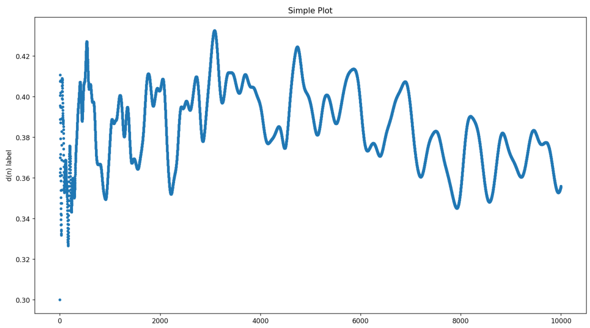
(б) d_{16}



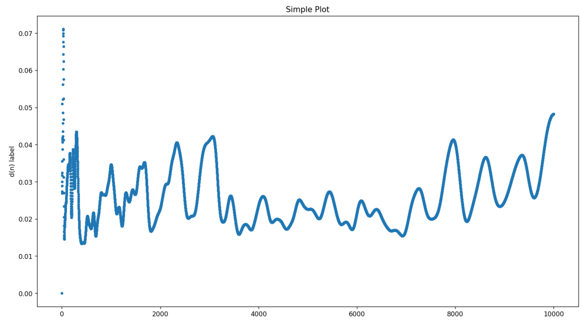
(а) d_{37}



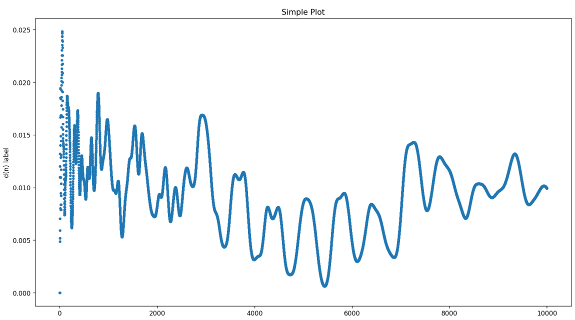
(б) d_{58}



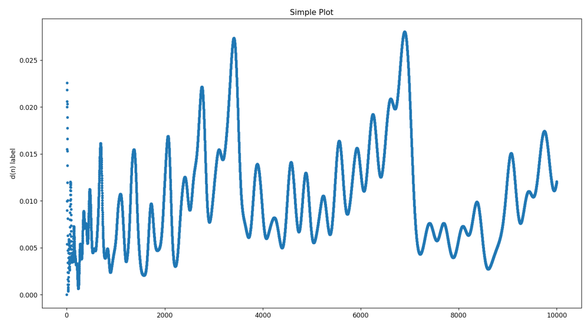
(а) d_{89}



(б) d_{145}



(а) d_{42}



(б) d_{20}

4 Основний результат

Теорема 4. *Нехай* $\overline{d_c}$ *та* $\underline{d_c}$ *– це верхня та нижня щільності c-нещасливих чисел, відповідно,* $c \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. *Тоді*

1. $\underline{d_4} < 0.04366 < 0.0664 < \overline{d_4}$,
2. $\underline{d_{16}} < 0.071964 < 0.128228 < \overline{d_{16}}$,
3. $\underline{d_{37}} < 0.163409 < 0.249114 < \overline{d_{37}}$,
4. $\underline{d_{58}} < 0.03327 < 0.0660511 < \overline{d_{58}}$,
5. $\underline{d_{89}} < 0.326571 < 0.432525 < \overline{d_{89}}$,
6. $\underline{d_{145}} < 0.013383 < 0.048220 < \overline{d_{145}}$,
7. $\underline{d_{42}} < 0.000631 < 0.018964 < \overline{d_{42}}$,
8. $\underline{d_{20}} < 0.000654 < 0.028021 < \overline{d_{20}}$.

Зокрема, не існує d_c *для жодного* $c \in C$.

Список літератури

1. Gilmer J. *On the density of happy numbers*, Integers, **13** (13), 599–713.
2. Guy R.K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edn. Springer, New York (2004), https://doi.org/10.1007/978-0-387-26677-0
3. Grundman H., Hall-Seelig L. *Happy Numbers, Happy Functions, and Their Variations: A Survey*, La Matematica **(1)** (2022), 404–430, https://doi.org/10.1007/s44007-021-00010-x
4. Porges A. *A set of eight numbers*, Amer. Math Mon. **52**, (1945), 379–382.

Bibliography:

1. Gilmer J. *On the density of happy numbers*, Integers, **13** (13), 599–713.
2. Guy R.K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edn. Springer, New York (2004), https://doi. org/10.1007/978-0-387-26677-0
3. Grundman H., Hall-Seelig L. *Happy Numbers, Happy Functions, and Their Variations: A Survey*, La Matematica **(1)** (2022), 404–430, https://doi.org/10.1007/s44007-021-00010-x
4. Porges A. *A set of eight numbers*, Amer. Math Mon. **52**, (1945), 379–382.

Надійшло 12.11.2024

Mykhaylo Hordei, Sergii Horoshkevych, Olena Karlova *Asymptotic density of unhappy numbers*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 49–59.

For a number $n \in \mathbb{N}$ we consider the sum of squares of all digits of n and denote it by $S^2(n)$. Let $T_0(n) = n$, $T_1(n) = S^2(n)$, $\dots$, $T_{k+1}(n) = T_1(T_k(n))$ for $k \geq 1$. A number n is happy, if there exists $k \geq 1$ such that $T_k(n) = 1$. Otherwise, n is unhappy. It is well-known that for every unhappy number n there exists $k \geq 1$ such that $T_k(n) \in C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. If $c \in C$, then an unhappy number n is called c-unhappy in the case $T_k(n) = c$ and $T_{k-1}(n) \notin C$ for some $k \geq 1$.

By $\mathbb{N}_+$ we denote the set of all non-negative integers. We define *an interval* $I = [a, b]$ as the set $\{n \in \mathbb{N}_+ : a \leq n \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Moreover, the symbol $|I|$ stands for the cardinality (i.e. the number of integers) of I.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $c \in C$. We put $P_c(n) = \{k \in [1, n] : k \text{ is c-unhappy}\}$ and define the numbers $\overline{d_c}$, $\underline{d_c}$ and d_c as the following.

- *Upper asymtotic density* of c-unhappy numbers is

$$\overline{d}_c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

- *lower asymptotic density* of c-unhappy numbers is

$$\underline{d}_c = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

- *natural density* of c-unhappy numbers is

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{|P_c(n)|}{n},$$

  if the limit exists.

Gilmer in 2013 answering a question of Richard Guy showed that the natural density of happy numbers does not exist. Moreover, he proved that the following estimations hold

$$\overline{d} > 0.18577 \quad \text{and} \quad \underline{d} < 0.1138,$$

where $\overline{d}$ and $\underline{d}$ denote upper and lower asymptotic density of happy numbers. It is natural to ask if there exists upper (lower, natural) density for c-unhappy numbers for every $c \in C$.

In this paper we study density of c-unhappy numbers. We obtain estimations on upper and lower asymptotic density of c-unhappy numbers and following the Gilmer's arguments prove that the natural density does not exist.