УДК 510.22 + 51-71

©2015 р. Я.І. Грушка

Інститут математики НАН України, м. Київ

ТЕОРЕМА ПРО ЕВОЛЮЦІЙНЕ РОЗШИРЕННЯ ДЛЯ УНІВЕРСАЛЬНИХ КІНЕМАТИК *

Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для універсальних кінематичних множин. Доведено теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик. Отримані результати можуть бути застосовані для формулювання математичних основ спеціальної теорії відносності в рамках теорії кінематичних мінливих множин.

Analogs of the set-theoretic inclusion relation and the set-theoretic operation of union for universal kinematic sets are introduced. A theorem on evolutional extension for universal kinematic is proved. The obtained results can be used for formulation of mathematical foundations of special relativity in the framework of the theory of kinematic changeable sets.

1 Вступ.

Досягнення сучасної теоретичної фізики широко відомі, але проблема математично строгого обґрунтування її основ, тобто шоста проблема Гільберта [1], залишається відкритою і по сьогодні [2–5]. В роботах [6–11] було запропоновано новий математичний апарат для розв'язання зазначеної проблеми — математичну теорію мінливих множин. З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (зокрема змінювати свої властивості в часі, розпадатись на частини, чи навпаки — об'єднуватись в одне ціле). Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження (тобто від області сприймання або системи відліку). В роботах [12–15] на базі теорії мінливих множин було побудовано новий клас математичних об'єктів — кінематичні мінливі множини, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики, а також показано, що теорія кінематичних мінливих множин може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонних розширень. Кінематичні мінливі множини являють собою математичні об'єкти, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. Крім того, в роботі [14] досліджено кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат (універсальні кінематичні множини, або універсальні кінематики). Роботи [12–15] можна вважати продовженням ідей, висловлених на фізичному рівні в роботах [16–18], в яких ставилась проблема дослідження довільних можливих систем просторово-часових перетворень координат.

В фізиці часто зустрічаються міркування, коли до фізичної системи подумки долучають додаткові, реально не існуючі в ній компоненти. Наприклад, під час виведення формул перетворень Лоренца для систем відліку з паралельними осями використовується метод "світлової сфери", тобто припускається, що в нульовий момент часу на початку відліку "спалахнуло світло", і світлові промені розходяться від початку відліку у всіх напрямках (див., наприклад, [19,

* Робота частково підтримана проектом "Mathematics for Life Sciences", FP7-People-2011-IRSES, No. 295164.

стор. 25]). Таке припущення зовсім не означає, що в довільній моделі еволюції в рамках спеціальної теорії відносності (СТВ) мусить існувати “світлова сфера”. Просто робиться припущення, що перетворення координат не зміниться, коли ми до будь-якої еволюційної моделі в рамках СТВ долучимо світлову сферу, тобто коли замість даної моделі розглянемо “розширену” модель, в якій світлова сфера вже присутня.

В роботі [20] було визначено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об’єднання для базових мінливих множин (тобто для мінливих множин з однією системою відліку). На основі введених понять було дано математично строге обґрунтування процедури долучення до вихідної моделі нових “віртуальних” еволюціонуючих об’єктів за припущення, що еволюція цих, нових, об’єктів **не впливає** на еволюцію вихідної системи в рамках теорії базових мінливих множин. Також в роботі [20] доведено теорему про еволюційне розширення для базових мінливих множин, тобто теорему про існування еволюційного розширення базової мінливої множини, що включає задану систему абстрактних траєкторій у свої лінії долі. В роботі [21] конструкції роботи [20] перенесено на кінематичні мінливі множини з багатьма системами відліку, зокрема введені аналоги теоретико-множинного відношення включення для кінематичних мінливих множин та універсальних кінематик, а також досліджено їхні властивості. Також в роботі [21] побудувано аналог операції об’єднання для диз’юнктних універсальних кінематик (тобто операцію диз’юнктного еволюційного об’єднання).

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих в [21]. В другому розділі роботи поняття еволюційного об’єднання поширюється на більш загальний клас випадків в порівнянні з роботою [21], а саме, вводиться поняття еволюційного об’єднання довільної сім’ї універсальних кінематик (не обов’язково диз’юнктних). В четвертому розділі доводиться теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик, і, таким чином, узагальнюються результати роботи [20].

2 Еволюційне об’єднання універсальних кінематик.

Оскільки дана робота є продовженням роботи [21], надалі будемо використовувати систему понять і позначень теорії універсальних кінематик, прийняту в [21]. Зокрема, для довільних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ будемо використовувати запис $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ ($\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$) для позначення того факту, що кінематика $\mathcal{F}_1$ еволюційно (суперpermеволюційно) включається в $\mathcal{F}_2$ відповідно.

В роботі [21] доведено, що для довільних універсальних кінематик $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_3$ мають місце такі властивості:

Властивості 1.

1. $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$.
2. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_1$ *то* $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.
3. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_3$ *то* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_3$.
4. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ *то* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ *(при цьому обернене твердження, взагалі кажучи, не правильне, тобто із супереволюційного включення* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$*, взагалі кажучи, не випливає еволюційного включення* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$*).*
5. $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}$.
6. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_1$ *то* $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.
7. *Якщо* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ *і* $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_3$ *то* $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_3$.

По аналогії з [20, означення 12] можна сформулювати наступне означення еволюційного об’єднання для універсальних кінематик.

Означення 1. *Нехай,* $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} \neq \emptyset$) *— довільна індексована сім’я універсальних кінематик. Універсальну кінематику* $\mathcal{F}$ *будемо називати* ***еволюційним об’єднанням*** *сім’ї* $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$*, якщо:*

(EO$_1$) $\mathcal{F}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$ *для довільного* $\alpha \in \mathcal{A}$.

($\mathbf{EO}_2$) *Якщо $\mathcal{F}'$ — універсальна кінематика і $\mathcal{F}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}'$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}'$.*

Твердження 1. *Довільна сім'я універсальних кінематик $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} \neq \emptyset$) може мати не більш, ніж одне еволюційне об'єднання.*

Доведення. Справді, нехай універсальні кінематики $\mathcal{F}$ і $\widetilde{\mathcal{F}}$ є еволюційним об'єднанням сім'ї універсальних кінематик $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Тоді, за означенням 1, $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}$.

Отже, за властивістю 1(3),[1] $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$. $\square$

Враховуючи твердження 1 (тобто єдиність еволюційного об'єднання), еволюційне об'єднання $\mathcal{F}$ сім'ї універсальних кінематик $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (якщо воно існує) будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{F} = \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{F}_\alpha.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A} = \{1, ...n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), то будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \cdots \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_n := \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{k=1}^{n}} \mathcal{F}_k := \overset{\longleftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{F}_\alpha.$$

В роботі [21] для довільних диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ було введено операцію диз'юнктного еволюційного об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$. Нижче доводиться, що операція еволюційного об'єднання, введена в означенні 1, є узагальненням операції диз'юнктного еволюційного об'єднання.

Твердження 2. *Для довільних диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ існує еволюційне об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2$. При цьому:*

$$\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2.$$

Доведення. Нехай, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики. Тоді, згідно [21, теорема 1], існує диз'юнктне еволюційне об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$. Покладемо $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$. Згідно з [21, твердження 21] універсальна кінематика $\mathcal{F}$ задовольняє такі умови:

1. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubsetneq} \mathcal{F}$.

2. Якщо $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$ для деякої універсальної кінематики $\widetilde{\mathcal{F}}$, то $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \widetilde{\mathcal{F}}$.

З першої умови, згідно з [21, твердження 15] випливає наступна умова:

1′. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subsetneq} \mathcal{F}$.

Отже, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ задовольняє умови $1'$ і 2. Тому, за означенням 1, кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційним об'єднанням універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, тобто $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2$. $\square$

Означення 1 дає можливість поширити поняття еволюційного об'єднання на більш загальний клас випадків, порівняно з роботою [21]. Наприклад, якщо $\mathcal{F}$ довільна універсальна кінематика і $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, то, за означенням 1, маємо, $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, тобто

$$\mathcal{F} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

З іншої сторони, для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})) \neq \emptyset,$$

оскільки, згідно [20, означення 1], множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ елементарно-часових станів довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ не може бути порожньою. Отже, згідно [21, твердження 18], універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ не є диз'юнктними. Тому, введеного в [21] диз'юнктного еволюційного об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$ (тобто $\mathcal{F} \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}$) не існує.

3 Системи абстрактних траєкторій і траєкторії мінливих систем.

Означення 2. *Нехай M — довільна множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна непорожня ($\mathbf{T} \neq \emptyset$) лінійно упорядкована множина (в сенсі* [22, с. 12]*).*

[1] Посилання на властивість 1(3) означає посилання на посилання на пункт 3 з групи властивостей "властивості 1".

1. *Відображення* $r : \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ $(\mathfrak{D}(r) \neq \emptyset)$ *будемо називати* ***абстрактною траєкторією*** *з* $\mathbb{T}$ *в* M, *якщо* $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ *(де* $\mathfrak{D}(r)$ *— область визначення траєкторії* r*).*

2. ***Системою абстрактних траєкторій*** *з* $\mathbb{T}$ *в* M *будемо називати довільну множину* $\mathcal{R}$, *елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з* $\mathbb{T}$ *в* M *таку, що*

$$\bigcup_{r\in\mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$$

(де $\mathfrak{R}(r)$ *— область значень абстрактної траєкторії* r*).*

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ — базова кінематична множина. Для довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ покладемо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A] &:= \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(A) = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega) \mid \omega \in A\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Множину $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A]$ будемо називати ***траєкторією*** множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

Відповідно для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ можна визначити траєкторією довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$:

$$\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A;\mathcal{F}] := \mathfrak{trj}_{\mathcal{F}\upharpoonright\mathfrak{l}}[A] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in A\right\} \quad (2)$$

(у тих випадках, коли універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є наперед відомою, замість позначення $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A;\mathcal{F}]$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A]$).

4 Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик.

Основною метою цього розділу є доведення наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай,* $\mathcal{F}$ *— універсальна кінематика,* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *— довільна система відліку* $\mathcal{F}$ *і* $\mathcal{R}$ *— система абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ *в* M *така, що* $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$. *Тоді:*

1. *Існує суперpredеволюційне розширення* $\mathcal{F}_1 \sqsupset \mathcal{F}$ *універсальної кінематики* $\mathcal{F}$ *таке, що всі траєкторії* $r \in \mathcal{R}$ *є траєкторіями елементарних процесів в системі відліку* $\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1$ *(тобто* $\forall r \in \mathcal{R}\,\exists L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1)\,(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}\downharpoonleft\mathcal{F}_1}[L,\mathcal{F}_1])$*).*

2. *Якщо, додатково, універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *є еволюційно видимою, то існує еволюційно видиме суперeволюційне розширення* $\mathcal{F}_1 \sqsupset \mathcal{F}$ *універсальної кінематики* $\mathcal{F}$, *що задовольняє умову 1 даної теореми.*

Зауважимо, що поняття еволюційно видимої універсальної кінематики було визначено в [21, означення 16, пункт 2].

Для доведення теореми 1 необхідно довести деякі допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай,* $\mathfrak{Q}$ *– довільний координатний простір і* $\mathcal{R}$ *— система абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *в* M *де* $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

Тоді для довільної множини $\mathcal{K}$ *існує базова кінематична множина* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$ *така, що:*

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathbb{T}$;

2. $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathfrak{Q}$;

3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$;

4. *всі траєкторії* $r \in \mathcal{R}$ *є траєкторіями елементарних процесів в* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$ *(тобто* $\forall r \in \mathcal{R}\,\exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)\left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}}[L]\right)$*).*

Доведення. Нехай, ξ — довільний математичний об'єкт (тобто множина), що має наступну властивість:

$$\forall x \in \mathcal{K} \quad (\{\xi\} \notin x). \quad (3)$$

Така множина ξ існує. Справді, покладемо:

$$Y := \{y \mid \exists x \in \mathcal{K}\ (y \in x)\} = \bigcup_{X\in\mathcal{K}} X;\ [2]$$

[2] В даній роботі ми дотримуємося класичної аксіоматизації теорії множин [23] або ж близької до класичної [24]. Тому застосування операції $\bigcup_{X\in\mathbf{K}} X$ є коректним для будь-якої множини $\mathbf{K}$.

$$Y_1 := \left\{ \{u\} \mid u \in 2^Y \right\}.$$

За теоремою Кантора про потужність множини всіх підмножин заданої множини, $\mathbf{card}(Y) < \mathbf{card}\,(Y_1)$. Отже $Y_1 \setminus Y \neq \emptyset$. Тому, довільна множина $\xi \in 2^Y$ така, що $\{\xi\} \in Y_1 \setminus Y$ задовольнятиме умову (3).

Отже, зафіксуємо довільну множину ξ, що задовольняє умову (3).

Для довільної траєкторії $r \in \mathcal{R}$ покладемо:

$$r^{\#}(t) := (\xi, r, r(t)), \quad t \in \mathfrak{D}(r) \qquad (4)$$
$$\left(\mathfrak{D}\left(r^{\#}\right) = \mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}\right)$$
$$\mathcal{R}^{\#} := \left\{ r^{\#} \mid r \in \mathcal{R} \right\}.$$

Де довільна упорядкована пара стандартним чином трактується як множина $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$, а упорядкована трійка — як множина виду $(a,b,c) = (a,(b,c)) = \{\{a\}, \{a,(b,c)\}\}$.

Доведемо, що $\mathcal{R}^{\#}$ є системою індивідуальних траєкторій з $\mathbb{T}$ у $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$, тобто що для довільних $r_1^{\#}, r_2^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ з умови $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$ випливає, що $r_1^{\#} \cap r_2^{\#} = \emptyset$. Нехай, $r_1^{\#}, r_2^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ і $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$. Припустимо, що $\left(t, x^{\#}\right) \in r_1^{\#} \cap r_2^{\#}$ (де $t \in \mathbf{T}$). Тоді $t \in \mathfrak{D}\left(r_1\right) \cap \mathfrak{D}\left(r_2\right)$ і $x^{\#} = r_1^{\#}(t) = r_2^{\#}(t)$. Оскільки $r_1^{\#}(t) = r_2^{\#}(t)$, то, згідно (4), $r_1 = r_2$, а отже $r_1^{\#} = r_2^{\#}$, що суперечить початковій умові. Отже, припущення помилкове, а тому $\mathcal{R}^{\#}$ є системою індивідуальних траєкторій. Покладемо:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}^{\#}\right).$$

Тоді, згідно з [11, теорема 3.2] та [20, теорема 1], маємо:

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}^{\#}\right)\right) = \mathcal{R}^{\#}; \qquad (5)$$
$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}. \qquad (6)$$

Доведемо, що

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{K} = \emptyset. \qquad (7)$$

Справді, нехай $y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Згідно [11, властивість 2.1(6)],

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \left\{ \mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \right\}. \qquad (8)$$

Отже, існує елементарно-часовий стан $\omega = (t,y) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Де, згідно з [20, теорема 1],

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} r^{\#}. \qquad (9)$$

Тому існує траєкторія $r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ така, що $\omega = (t,y) \in r^{\#}$, тобто така, що

$$t \in \mathfrak{D}\left(r^{\#}\right) \quad \text{і} \quad y = r^{\#}(t).$$

Припустимо, що $y \in \mathcal{K}$. Тоді, $r^{\#}(t) \in \mathcal{K}$, тобто, згідно (4), $(\xi, r, r(t)) \in \mathcal{K}$. Але, $(\xi, r, r(t)) = \{\{\xi\}, \{\xi, (r, r(t))\}\}$. Отже, для елемента $x = \{\{\xi\}, \{\xi, (r, r(t))\}\} \in \mathcal{K}$ будемо мати, що $\{\xi\} \in x$, що суперечить умові (3). Отже, зроблене припущення — не правильне. Тому жоден елемент $y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ не може належати до $\mathcal{K}$. Рівність (7) доведено.

Використовуючи рівності (8) та (9), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) &= \left\{ \mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \bigcup_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} r^{\#} \right\} = \\ &= \left\{ \mathsf{bs}(\omega) \mid \exists r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#} \left(\omega \in r^{\#}\right) \right\} = \\ &= \left\{ \mathsf{bs}(\omega) \mid \exists r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#} \right. \\ &\qquad \left. \left(\mathsf{bs}(\omega) = r^{\#}\left(\mathsf{tm}\,(\omega)\right)\right) \right\} = \\ &= \bigcup_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right).\end{aligned}$$

Для $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$ покладемо:

$$k(x) := r(t) \qquad (10)$$
$$\left(x \in \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right),\ x = r^{\#}(t) \text{ де } t \in \mathfrak{D}(r)\right)$$

Згідно із співвідношенням (4), для довільних $r^{\#}, r_1^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$, $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $t_1 \in \mathfrak{D}\left(r_1\right)$, з умови $x = r^{\#}(t) = r_1^{\#}\left(t_1\right)$ випливає, що $r(t) = r_1\left(t_1\right)$. Отже, відображення $k : \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q})$ у формулі (10) визначено коректно. Тому, пара:

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q},\, k)) \qquad (11)$$

є базовою кінематичною множиною. При цьому:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathcal{B}, & \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathfrak{Q}, \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}} = k, & \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{L}d(\mathcal{B}). \end{array} \qquad (12)$$

Крім того, згідно з (11), (6), (7) та позначеннями, прийнятими в теорії кінематичних мінливих множин (див. [12, 14, 15, 21]), маємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}\right) = \mathbb{T}; \tag{13}$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \mathcal{K} = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{K} = \emptyset. \tag{14}$$

Отже, базова кінематична множина $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$ задовольняє перші три умови леми 1. Перевіримо виконання четвертої умови цієї леми для $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$.

Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. Тоді, $r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$. Отже, згідно (5) та (12),

$$r^{\#} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right).$$

При цьому, згідно (4), $\mathfrak{D}\left(r^{\#}\right) = \mathfrak{D}(r)$. Тому, використовуючи означення координат Мінковського (див. [21, стор. 151]) а також формули (1), (12) та (10) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left[r^{\#}\right] &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega) \mid \omega \in r^{\#}\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(\left(t, r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r^{\#}\right)\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(\left(t, r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \\ &= \left\{\left(t, \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left(r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \\ &= \left\{\left(t, k\left(r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \\ &= \left\{(t, r(t)) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = r.\end{aligned}$$

Отже, **для довільної траєкторії** $r \in \mathcal{R}$ **існує елементарний процес** $r^{\#} \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)$ **такий, що** $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left[r^{\#}\right] = r$, тобто четверта умова леми 1 для $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$ також виконується. □

З леми 1 виводиться наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай, $\mathfrak{Q}$ – довільний координатний простір і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M де $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

Тоді для довільної множини $\mathcal{K}$ існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$, що задовольняє умови 1,2,4 леми 1, а також умову:

3′. $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset.$

Доведення. Покладемо:

$$\mathcal{K}_1 := \bigcup_{W \in \mathcal{K}} W; \qquad \mathcal{K}_2 := \bigcup_{W_1 \in \mathcal{K}_1} W_1.$$

Згідно з лемою 1, існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$, що задовольняє такі умови:

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}$;
2. $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathfrak{Q}$;
3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \left(\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}\right) = \emptyset$;
4. $\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left[L\right]\right)$.

З умови 3 випливає, що $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Отже, для доведення наслідку лишається показати, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Припустимо супротивне. Тоді існує елементарно-часовий стан $\omega = (t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)$ такий, що $\omega \in \mathcal{K}$ (де $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)$). Оскільки $\omega = (t, x) = \{\{t\}, \{t, x\}\} \in \mathcal{K}$ і $\{t, x\} \in \omega$, то $\{t, x\} \in \bigcup_{W \in \mathcal{K}} W = \mathcal{K}_1$. Оскільки $x \in \{t, x\}$, де $\{t, x\} \in \mathcal{K}_1$, то $x \in \bigcup_{W_1 \in \mathcal{K}_1} W_1 = \mathcal{K}_2$. Отже, $x \in \mathcal{K}_2$, що суперечить умові 3 (тобто умові $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \left(\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}\right) = \emptyset$). Отже, припущення помилкове. Тому, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$, тобто $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. □

Лема 2. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика, $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$ і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $M \subseteq \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$.*

Тоді існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що:

1. *$\mathcal{F}_1$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$;*
2. *всі траєкторії $r \in \mathcal{R}$ є траєкторіями елементарних процесів в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \downharpoonright \mathcal{F}_1$ (тобто $\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}_0 \downharpoonright \mathcal{F}_1\right)\left(r = \mathfrak{trj}_{\,\mathfrak{l}_0 \mid \mathcal{F}_1}\left[L, \mathcal{F}_1\right]\right)$).*

Доведення. Оскільки $\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0$ є базовою кінематичною множиною і $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right) = \mathbf{Zk}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0\right) = \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0\right)\right)$, то, за наслідком 1, існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{(0)}$, що задовольняє такі умови:

$(\mathbf{C}_0^1)$: $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$;

$(\mathbf{C}_0^2)$: $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right)$;

$(\mathbf{C}_0^3)$: $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) \cap \left(\bigcup_{\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})} \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right) = \emptyset$;

$(\mathbf{C}_0^4)$**:** $\forall r \in \mathcal{R}\ \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L]\right).$

З умов $(\mathbf{C}_0^1)$, $(\mathbf{C}_0^2)$ випливає, що:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \\ &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \\ &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right)\right) = \\ &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right).\end{aligned} \quad (15)$$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Покладемо $\alpha_0 := \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}_0)$. Для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ покладемо:

$$\mathcal{U}_\alpha(\omega) := \\ := \begin{cases} \left(\mathsf{tm}\left(\left[\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\, \mathcal{F}\right] \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega)\right), \omega\right), & \alpha \neq \alpha_0 \\ \omega, & \alpha = \alpha_0. \end{cases} \quad (16)$$

$\mathcal{U}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ в $\mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) \times \mathcal{X}_\alpha$, де

$$\mathcal{X}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), & \alpha \neq \alpha_0 \\ \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), & \alpha = \alpha_0. \end{cases} \quad (17)$$

Для довільних $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right)$ покладемо:

$$\mathcal{K}_\alpha(\mathrm{w}) := \left[\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}. \quad (18)$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$. Доведемо, що п'ятірка $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right), \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right), \mathcal{K}_\alpha\right)$ є універсальним кінематичним проектором для $\mathfrak{C}^{(0)}$.

2.1) Оскільки $\mathcal{U}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)$ в $\mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) \times \mathcal{X}_\alpha$, то, згідно [14, означення 7], упорядкована трійка $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right), \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\right)$ є еволюційним проектором для $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$.

2.2) Згідно з означеннями [21, означення 3 та 5], і системою позначень теорії кінематичних множин та універсальних кінематик (див. [12, 14, 15, 21]), $\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right)$ є координатним простором.

2.3) За означенням [21, означення 5] і системою позначень теорії універсальних кінематик, ***відображення*** $\mathcal{K}_\alpha$***, що задається формулою (18), є бієкцією з*** $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right)$ ***на*** $\mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right) = \mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right)\right)$, де, згідно (15), $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. При цьому, використовуючи (18) та [21, рівності (7) та (8)], для $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right)$ отримуємо:

$$\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w}) = \left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}),\, \mathcal{F}\right] \mathrm{w} \quad (19)$$

2.4) Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ і $\mathsf{bs}\left(\mathcal{U}_\alpha(\omega_1)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{U}_\alpha(\omega_2)\right)$. Тоді при $\alpha \neq \alpha_0$ з (16) отримуємо, $\omega_1 = \omega_2$, а отже і $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_2)\right)\right)$.

У випадку, $\alpha = \alpha_0$, згідно (16), отримуємо:

$$\mathsf{bs}(\omega_1) = \mathsf{bs}(\omega_2). \quad (20)$$

Оскільки $\alpha_0 = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}_0)$, то $\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathbf{lk}_{\alpha_0}(\mathcal{F}) = \mathfrak{l}_0$. Отже, використовуючи (18) та [21, рівність (7)], отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\alpha(\mathrm{w}) &= \mathcal{K}_{\alpha_0}(\mathrm{w}) = \\ &= \left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right] \mathrm{w} = \mathrm{w},\ \mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}\right).\end{aligned} \quad (21)$$

Тому, використовуючи означення координат Мінковського на $\mathfrak{C}^{(0)}$, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega)\right) = \\ = \mathsf{bs}\left(\left(\mathsf{tm}(\omega),\, \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(0)}}(\mathsf{bs}(\omega))\right)\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(0)}}(\mathsf{bs}(\omega)).$$

Звідси, враховуючи (20), отримуємо, $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_2)\right)\right)$.

Отже, в обох випадках для $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ з умови $\mathsf{bs}\left(\mathcal{U}_\alpha(\omega_1)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{U}_\alpha(\omega_2)\right)$ випливає рівність:

$$\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_1)\right)\right) = \\ = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)} \right\rangle}(\omega_2)\right)\right).$$

2.5) Використовуючи (16), (18) у випадку $\alpha \neq \alpha_0$ для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathsf{tm}\left(\mathcal{U}_\alpha\left(\omega\right)\right) = \\ &\quad = \mathsf{tm}\left(\left[\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\ \mathcal{F}\right] \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)}\right\rangle}(\omega)\right) = \\ &\qquad = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)}\right\rangle}(\omega)\right)\right).\end{aligned}$$

У випадку $\alpha = \alpha_0$, згідно (16), $\mathcal{U}_\alpha\left(\omega\right) = \omega$ $\left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)$. Отже, використовуючи (21), при $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{tm}\left(\mathcal{U}_\alpha\left(\omega\right)\right) &= \mathsf{tm}\left(\omega\right) = \\ &= \mathsf{tm}\left(\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(0)}}\left(\mathsf{bs}(\omega)\right)\right)\right) = \\ &= \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)}\right\rangle}(\omega\right) = \\ &= \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)}\right\rangle}(\omega)\right)\right).\end{aligned}$$

Таким чином, рівність $\mathsf{tm}\left(\mathcal{U}_\alpha\left(\omega\right)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(0)}\right\rangle}(\omega)\right)\right)$ $\left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)$ виконується в обох випадках.

З пунктів 2.1)–2.5), за означенням [14, означення 13], випливає, що п'ятірка $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right), \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right), \mathcal{K}_\alpha\right)$ є універсальним кінематичним проектором для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{(0)}$ (при довільному значення індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)$). Отже, за означенням [14, означення 13], індексована сім'я

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} = \big(&\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right), \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha,\right. \\ &\left.\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right), \mathcal{K}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)\big)\end{aligned}$$

є універсальним кінематичним мультипроектором для $\mathfrak{C}^{(0)}$.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Покладемо:

$$\mathcal{F}_1 := \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right], \tag{22}$$

де сенс позначення $\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right]$ роз'яснення в роботі [14].

3.1) Доведемо, що $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}$.

3.1.1) Згідно з теоремою [14, теорема 4],

$$\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{(e)}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right], \tag{23}$$

де $\mathfrak{P}^{(e)} = \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right), \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)\right)$.

Згідно з властивістю [14, властивість 8(2)]:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right]\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right).$$

3.1.2) Використовуючи [14, властивість 8(1)], отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right]\right) = \\ &\quad = \left\{\left(\alpha, \mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)\right]\right) \mid \right. \\ &\qquad\qquad \left. \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

(зауважимо, що у властивостях 8 з роботи [14] під символом $\mathcal{B}$ слід розуміти базову мінливу множину $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$). З формули (24) випливає, що для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)$ виконується рівність:

$$\begin{aligned}&\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) = \\ &\quad = \left(\alpha, \mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)\right]\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Отже, в силу теореми [14, теорема 1]:

$$\begin{aligned}&\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \\ &\quad = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)\right]\right) = \\ &\qquad = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right),\end{aligned}$$

а в силу теореми [14, теорема 4] (пункт 2):

$$\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right).$$

3.1.3) Розглянемо довільні індекси $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)$. Враховуючи (25), покладемо:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) = \\ &\quad = \left(\alpha, \mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)\right]\right); \\ &\mathfrak{m} := \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) = \\ &\quad = \left(\beta, \mathcal{U}_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right)\right)\right]\right).\end{aligned}$$

Використовуючи теорему [14, теорема 4] (пункт 3) та рівності (18), (19) і [21, рівність (8)], для довільного $\omega \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}_1\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w} = \\ &\quad = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha{}^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = \\ &\quad = \left[\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\ \mathcal{F}\right]\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right] \mathrm{w} = \\ &\qquad = \left[\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right] \mathrm{w}.\end{aligned}$$

3.1.4) З підпунктів 3.1.1)–3.1.3), за означенням [21, означення 6], випливає, що $\mathcal{F} \left[\equiv\right] \mathcal{F}_1$.

3.2) Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$.

З рівності (25) та теореми [14, теорема 1] випливає, що для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) = \\
&\quad = \mathbb{Bs}\left(\mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{Tm}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}))\right]\right) = \\
&\qquad = \mathcal{U}_\alpha\left(\mathbb{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)\right) = \\
&\qquad\quad = \mathcal{U}_\alpha\left(\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \\
&\qquad\qquad = \left\{\mathcal{U}_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Звідси, оскільки $\mathcal{U}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ в $\mathbf{Tm}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) \times \mathcal{X}_\alpha$, то, згідно [11, властивість 2.1(6)] або [8, property 7.1(6)] при $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) = \\
&\quad = \left\{\mathsf{bs}(\mathcal{U}_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right\} \subseteq \mathcal{X}_\alpha,
\end{aligned}$$

де множина $\mathcal{X}_\alpha$ визначається формулою (17), тобто $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \cup \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. Тому, з умови $(\mathbf{C}_0^3)$ отримуємо, $\mathcal{X}_\alpha \cap \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \emptyset$ $(\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}))$. Таким чином, для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \cap \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \\
&\qquad \subseteq \mathcal{X}_\alpha \cap \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що, згідно з пунктом 3.1), $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}$, за означенням [21, означення 12], отримуємо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$.

3.3) Оскільки $\alpha_0 = \mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)$, то, використовуючи [21, формула (30)], а також формулу (25) та умову $(\mathbf{C}_0^1)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\alpha_0}(\mathcal{F}_1) = \\
&\quad = \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{Tm}(\mathbf{lk}_{\alpha_0}(\mathcal{F}))\right]\right) = \\
&\quad = \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{Tm}(\mathfrak{l}_0)\right]\right) = \\
&\quad = \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right]\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Оскільки, згідно (16), $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ є тотожним відображенням, то, згідно з зауваженням [14, зауваження 9], $\mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right] = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. Отже, згідно з (26):

$$\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} = \left(\alpha_0, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right).$$

З останньої рівності випливає, що:

$$\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right); \tag{27}$$

$$\mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right). \tag{28}$$

Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. За умовою $(\mathbf{C}_0^4)$, існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ така, що:

$$r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L]. \tag{29}$$

З рівності (28) випливає, що

$$L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}). \tag{30}$$

З рівності (26) та пункту 2 теореми [14, теорема 4] випливає, що:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) = \mathcal{K}_{\alpha_0}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}\left(\mathcal{U}_{\alpha_0}{}^{[-1]}(\omega)\right)\right), \\
&\qquad\qquad \omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}),
\end{aligned}$$

де, згідно (27), $\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. З рівностей (16) та (21) випливає, що $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ та $\mathcal{K}_{\alpha_0}$ — тотожні відображення. Отже:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega), \\
&\qquad\qquad \omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right).
\end{aligned}$$

Тому, з рівності (29), використовуючи означення траєкторії множини (див. рівності (2),(1)), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega) \mid \omega \in L\right\} = \\
&\quad = \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) \mid \omega \in L\right\} = \\
&\qquad = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1],
\end{aligned}$$

де, згідно (28), $L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})$. Отже, ми довели, що:

$$\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})\ \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1]\right).$$

З пунктів 3.2), 3.3) випливає, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ задовольняє умови 1,2 даної леми. При цьому, згідно з рівністю (22) і наслідком [21, наслідок 4], універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ є еволюційно видимою. □

Доведення теореми 1. Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathcal{R}$ —

система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в M така, що $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$. За лемою 2, існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$ така, що:

$$1)\ \mathcal{F}_1^{\sim} \text{ диз'юнктна з } \mathcal{F}; \tag{31}$$

$$2)\ \forall r \in \mathcal{R}\ \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1^{\sim}\right) \quad \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}}\left[L, \mathcal{F}_1^{\sim}\right]\right) \tag{32}$$

Покладемо:

$$\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}_1^{\sim} \overleftarrow{\sqcup} \mathcal{F}. \tag{33}$$

Оскільки, згідно (31), кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$, то диз'юнктне еволюційне об'єднання в правій частині (33) існує (згідно з [21, теорема 1]). Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ задовольняє умови теореми 1.

1. Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. За умовою (32), існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1^{\sim}\right)$ така, що

$$r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}}\left[L, \mathcal{F}_1^{\sim}\right]. \tag{34}$$

Оскільки $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{\sim} \overleftarrow{\sqcup} \mathcal{F}$, то, згідно з твердженням [21, твердження 21], пункт 1, $\mathcal{F}_1^{\sim} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_1$. Отже, згідно з твердженням [21, твердження 17], пункт 4, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1^{\sim}\right) &= \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\left(\mathcal{F}_1^{\sim}\right)\right) \subseteq \\ &\subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1\right).\end{aligned}$$

Отже, оскільки $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1^{\sim}\right)$, то $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \downharpoonright \mathcal{F}_1\right)$. При цьому, використовуючи рівності (34) та (2), а також [21, твердження 17, пункт 6], отримуємо:

$$\begin{aligned}r &= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}}\left[L, \mathcal{F}_1^{\sim}\right] = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}\right\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_1^{\sim}\right) \mid \omega \in L\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}|\mathcal{F}_1\right\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_1\right) \mid \omega \in L\right\} = \\ &= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1}\left[L, \mathcal{F}_1\right].\end{aligned}$$

Отже, перший пункт теореми 1 для універсальної кінематики $\mathcal{F}_1$ виконується.

2. Нехай, додатково, кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою. Оскільки універсальна кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$, за доведеним вище, також еволюційно видима, то кінематика $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{\sim} \overleftarrow{\sqcup} \mathcal{F}$ є еволюційно видимою за теоремою [21, теорема 2]. □

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Проблемы Гильберта.* Сборник под ред. П.С. Александрова. – "Наука", Москва. – 1969. – 240 с.
2. А.Д. Гладун. *Шестая проблема Гильберта.* // Потенциал. – 2006. – **N 3**. (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).
3. Yu.I. Petunin, D.A. Klyushin. *A structural approach to solving the 6th Hilbert problem.* // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2005. – **N 71**. – P. 165-179.
4. Adonai S. Sant'Anna. *The definability of physical concepts.* // Bol. Soc. Parana. Mat. (3s.). – 2005. – **V 23**, N 1-2. – P. 163–175.
5. Newton C. A. da Costa, Adonai S. Sant'Anna. *The mathematical role of time and space-time in classical physics.* // Foundations of Physics Letters. – 2001. – **V 14**, N 6. – P. 553-563.
6. Я.І. Грушка. *Примітивні мінливі множини та їх властивості.* // Математичний Вісник НТШ. – 2012 – **Т 9**. – С. 52-80.
7. Грушка Я.І. *Мінливі множини та їх властивості.* // Доповіді НАНУ. – 2012. – **N 5**. – С. 12-18.
8. Ya.I. Grushka. *Abstract concept of changeable set.* – Preprint arXiv:1207.3751v1. – 2012.
9. Я.І. Грушка. *Видимість у мінливих множинах.* // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2012. – **Т. 9**, N 2. – С. 122-145.
10. Я.І. Грушка. *Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів.* // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **Т. 11**, N 1. – С. 192-227.
11. Я. І. Грушка. *Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем.* // Укр. мат. журн. – 2013 – **Т. 65**, N 9. – С. 1190-1210.
12. Грушка Я.І. *Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах.* // Буковинський математичний журнал. – 2014. – **Т. 2**, N 2-3. – С. 59-71.
13. Грушка Я.І. *Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах.* // Доповіді НАН України. – 2015. – N 3. – С. 24-31.
14. Грушка Я.І. *Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат.* // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **Т. 12**, N 1. – С. 74–118.

15. Grushka Ya.I. *Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties.* – Preprint arXiv:1504.02685v2. – 2015.
16. Valentina Baccetti, Kyle Tate, Matt Visser. *Inertial frames without the relativity principle.* // Journal of High Energy Physics. – 2012. – **V. 2012**, N 5.
17. Valentina Baccetti, Kyle Tate, and Matt Visser. *Lorentz violating kinematics: Threshold theorems.* // Journal of High Energy Physics. – 2012. – **V. 2012**, N 3.
18. Valentina Baccetti, Kyle Tate, and Matt Visser. *Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry.* – Preprint: arXiv:1302.5989. – 2013.
19. В. Паули. *Теория относительности.* – "Наука", Москва. – 1991. – 325 с.
20. Я.І. Грушка. *Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин.* // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **Т. 11**, N 2. – С. 66-99.
21. Грушка Я.І. *Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик.* // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **Т. 12**, N 2. – С. 139-204.
22. Г. Биркгоф. *Теория Решёток.* – "Наука", Москва. – 1984. – 567 с.
23. К. Куратовский, А. Мостовский. *Теория множеств.* – "Мир", Москва. – 1970. – 416 с.
24. Мендельсон. *Введение в математическую логику.* – "Наука", Москва. – 1984. – 320 с.