Петрина Г.О., Станжицький О.М., Мартинюк О.В.

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ У НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

У статті представлено детальну схему апроксимації у середньому квадратичному для еволюційних стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах.

Основна увага приділяється заміні початкової системи з післядією еволюційною системою стохастичних рівнянь без післядії. Запропонований підхід передбачає розбиття інтервалу запізнення на підінтервали та побудову відповідної системи рівнянь, яка апроксимує поведінку початкової системи. Важливо зазначити, що кількість рівнянь у такій апроксимуючій системі збільшується зі зростанням кількості підінтервалів. Основний результат дослідження показує, що за умови, коли розбиття стає дедалі дрібнішим (тобто кількість підінтервалів прямує до нескінченності), відстань у середньому квадратичному між розв'язками рівняння із запізненням і розв'язками системи без запізнення прямує до нуля.

Теоретична основа методу апроксимації використовує ключові поняття та результати зі стохастичного аналізу в нескінченновимірних просторах, зокрема, для вирішення проблем, пов'язаних із функціональною природою післядії та необмеженістю простору станів. Дослідження не лише узагальнює попередні результати для скінченновимірних випадків до нескінченновимірного середовища, але й розширює методи, застосовані для детермінованих рівнянь із запізненням, на стохастичні системи. Методологія базується на класичній ідеї розкладу розв'язку рівняння із запізненням за формулою Тейлора за довжиною інтервалу запізнення $h > 0$ h>0. Такий підхід дозволяє замінити початкову задачу для рівняння із запізненням системою задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованих спеціальним чином.

Результати роботи мають значні практичні наслідки, особливо для систем, де запізнення є природними, таких як стохастичні системи управління, динаміка популяцій або нескінченновимірні системи, описувані стохастичними рівняннями в частинних похідних. Замінюючи складні системи із запізненнями більш простими системами без запізнень, запропонований метод не лише спрощує чисельні обчислення, але й забезпечує глибше розуміння динаміки таких систем. Доведення умов, за яких апроксимація є коректною, сприяє розвитку теоретичної бази стохастичних рівнянь із запізненнями у нескінченновимірних просторах та пропонує потужний інструмент для їх аналізу та моделювання.

Ключові слова і фрази: запізнення, стохастичний інтеграл, процес Вінера, генератор, напівгрупа, апроксимація.

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E05.
Дослідження Олександра Станжицького підтримано Національним фондом досліджень України, проект 2023, 03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із банатозначною та стохастичною динамікою".

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *grpetryna@gmail.com, ostanzh@gmail.com, o.martynyuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Дана робота є продовженням досліджень роботи [5], де подібна задача розглядалась у скінченновимірному випадку. Основна ідея даних досліджень полягає у заміні вихідного об'єкту із післядією, системою рівнянь без післядії. Кількість рівнянь такої системи залежить від кількості точок розбиття інтервала запізнення. Виявляється, якщо кількість інтервалів розбиття спрямувати до нескінченності, то відстань у середньому квадратичному між відповідними розв'язками рівняння із запізненнями і розв'язками апроксимуючої системи без запізнень прямує до нуля. Як дана робота так і робота [5] узагальнює на стохастичний випадок результати робіт І.М. Черевка та його учнів [6, 7, 8]. У вказаних роботах початкова задача для системи рівнянь із запізненнями заміюється набором задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованої спеціальним чином за вихідною системою із запізненнями. Даний підхід базується на ідеї М.М. Красовського, пов'язаної із розкладом розв'язків системи із запізненням за формулою Тейлора за довжиною $h > 0$ відрізка запізнення

Робота складається зі вступу та чотирьох частин. У першій частині приведені необхідні у подальшому поняття та результати пов'язані зі стохастичними рівняннями у нескінченновимірних просторах. Друга частина роботи присвячена постановці задачі, формулюванню основного результату, та деяким допоміжним твердженням. Доведення основної теореми приведено у частині три. У четвертій частині приведено приклад застосування отриманого результату для стохастичних рівнянь у частинних похідних.

1 Простори, оператори та стохастичні функціонально-диференціальні рівняння

Нехай H і K гільбертові простори з нормами $||\cdot||$ і $||\cdot||_K$ відповідно. Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ є повним ймовірнісним простором, а Q лінійний, обмежений коваріаційний оператор такий, що $Tr(Q) < \infty$. Введемо Q- ядерний K-значний вінерівський процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t) l_i, \quad t \geq 0.$$

Тут $\beta_i(t)$ - стандартні, одновимірні, незалежні у сукупності процеси броунівського руху, $l_i, i \geq 1$ ортонормований базис в K, послідовність невід'ємних чисел λ_i задовольняє умови

$$Ql_i = \lambda_i l_i, \quad i = \overline{1, 2, ...}$$

та

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$$

$\mathcal{F}_t, t \geq 0$ нормальна фільтрація, що задовільняє умови:

1. $W(t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірним;

2. $W(t+h) - W(t)$ не залежить від σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ для всіх $t \geq 0$ та $h \geq 0$.

Через $L_2^0 = \mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}(K), H)$ позначимо простір операторів Гільберта-Шмідта, що діють з $Q^{\frac{1}{2}}$ в H зі скалярним добутком

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{L_2^0} = Tr(\Phi Q \Phi^*)$$

. Нехай $A : H \to H$- необмежений, замкнутий, лінійний оператор і $D(A) \subset H$- його область визначення.

Будемо вважати , що він є генератором компактної напівгрупи $S(t), t > 0$ в H.

Для L_2^0- значних, $\mathcal{F}_t$- вимірних випадкових процесів $\Phi(t)$ таких, що

$$\mathbb{P}\{\int_0^T ||\Phi(t)||^2_{L_0^2} dt < \infty\} = 1,$$

введемо, аналогічно [1] H- значний стохастичний інтеграл

$$\int_0^t \Phi(t) dW(s).$$

Знову аналогічно [1] будемо використовувати стохастичну конволюцію

$$\int_0^t \mathcal{S}(t-s)\Phi(t) dW(s),$$

для якої справедливе твердження.

Лема 1. *[1] Нехай $p > 2$, $T > 0$ та $\Phi \in L_2^0$- значний, $\mathcal{F}_t$- вимірний процес, що*

$$\mathbb{E} \int_0^T ||\Phi(t)||^2_{L_0^2} dt \leq \infty.$$

Тоді існує стала $M = M(T) > 0$, така, що

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} || \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\Phi(s) dW(s)||^p \leq M \mathbb{E} \int_0^T ||\Phi(s)||^2_{L_0^2} ds$$

Через $C = C([-h, 0]; H)$ позначимо простір H-значних, неперервних функцій φ : $[-h, 0] \to H$ із супремною нормою

$$||\varphi||_C = \sup_{t\in[-h,0]} ||\varphi(t)||,$$

тут $h > 0$- інтервал запізнення.

В даній роботі розглядається нескінченновимірне стохастичне рівняння із запізненням вигляду

$$du(t) = [Au(t) + f(t, u(t), u(t-h))]dt + \sigma(t, u(t), u(t-h))dW(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0].$$

Відносно відображень f і σ будемо вважати виконаними наступні умови:

1. $f : [0, T] \times H \times H \to H, \sigma : [0, T] \times H \times H \to L_2^0$ є неперервним за сукупністю аргументів;

2. існує стала $L > 0$, що виконана умова лінійного росту
$$||f(t, u, v)||^2 + ||\sigma(t, u, v)||^2_{L_2^0} \leq L(1 + ||u||^2 + ||v||^2),$$
для довільних t, u, v з області визначення;

3. та умова Ліпшиця
$$||f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)||^2 + ||\sigma(t, u_1, v_1) - \sigma(t, u_2, v_2)||^2_{L_2^0} \leq L(||u_1 - u_2||^2 + ||v_1 - v_2||^2),$$
для $t \in [0, T]$ та довільних $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$;

4. початкова невипадкова функція $\varphi : [-h, 0] \to H$ є неперервною.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти у м'якому сенсі.

Означення 1. *Неперервний $\mathcal{F}_t$ адаптований випадковий процес $u : [-h, T] \times \Omega \to H$ назвемо м'яким розв'язком початкової задачі (1) на $[0, T]$ якщо:*

1. $u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]$*;*

2. *На $[0, T]$ $u(t)$ задовольняє інтегральне рівняння*
$$u(t) = S(0)\varphi(0) + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(s, u(s), u(s-h))ds + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h))dW(s), \tag{2}$$
з [1]. Тут перший інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера, а другий як стохастичний інтеграл Іто.

З роботи [3] випливає, що за виконання умов 1-4, початкова задача (1) має єдиний на [0, T] м'який розв'язок, який має обмежений p-момент ($p \geq 1$).

2 Постановка задачі. Основний результат

За рівнянням (1) побудуємо наступну систему стохастичних еволюційних рівнянь без запізнення, яку ми назвемо апроксимуючою.

Зафіксуємо натуральне m та розіб'ємо відрізок $[-h,0]$ точками $\frac{h}{m}j, j=\overline{0,m}$ на m частин. Визначимо процеси $z_j(t)\in H$ як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0(t)=[Az_0+f(t,z_0(t),z_m(t))]\,dt+\sigma(t,z_0(t),z_m(t))\,dW(t), & \\ dz_j(t)=\frac{m}{h}\left(z_{j-1}(t)-z_j(t)\right), & t\in[0,T], \\ z_j(0)=\varphi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j=\overline{0,m}. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $z_0(t)$- розв'язок першого рівняння, розуміється у м'якому сенсі, а решта m рівнянь у звичайному сенсі, де $\frac{dz_j(t)}{dt}$ розглядається як сильна, за нормою простору H похідна. З [1] випливає, що задача Коші (3) має єдиний на $[0,T]$ розв'язок, де процес $z_0(t)$ задовільняє (3) у м'якому сенсі, а $z_j(t)$ задовільняють наступні m рівнянь у звичайному сенсі.

Означення 2. *Система* (3) *називається апроксимуючою для* (1) *у середньому квадратичному, якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}||u(t-\frac{h}{m}j)-z_j(t)||^2\to 0,\quad m\to\infty,\quad j=\overline{0,m}.$$

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *За виконання умов 1-4 система* (3) *є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі* (1) *рівномірно по* $j=\overline{0,m}$, *тобто*

$$\sup_{j=\overline{0,m}}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}||u(t-\frac{h}{m}j)-z_j(t)||^2\to 0,\quad m\to\infty. \tag{4}$$

В подальшому нам знадобиться лема, що є аналогом леми 1 з роботи [5] для нескінченновимірного випадку.

Лема 2 (Про модуль неперервності)**.** *За виконання умов 1-4 для розв'язку початкової задачі* (1) *справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1\in[-h,T]}\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}||u(t_2)-u(t_1)||^2\le C(T,||\varphi||_C,l)\to 0,\quad l\to 0 \tag{5}$$

Доведення. З означення розв'язку маємо

$$\begin{aligned}\|u(t)\|\le 3\left\|\mathcal{S}(t)\varphi(0)\right\|^2+3\left(\int_0^t\left\|\mathcal{S}(t-s)f(s,u(s),u(s-h))\right\|ds\right)^2\\ +3\left\|\int_0^t\mathcal{S}(t-s)\sigma(s,u(s),u(s-h))\,dW(s)\right\|^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ є напівгрупою класу C_0, то $\|\mathcal{S}\| \le M$, при $t \in [0,T]$ [2]. Тоді, в силу умови 2, матимемо

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 \le & 3M\|\varphi(0)\|^2 + 3TM\int_0^t L\left(1+\|u(s)\|^2+\|u(s-h)\|^2\right)ds \\ & + 3\sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s \mathcal{S}(t-\tau)\sigma(\tau,u(\tau),u(\tau-h))dW(\tau)\right\|^2 \\ \le & 3\Bigg(M\|\varphi(0)\|^2 + TM\int_0^t L\Big(1+\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau)\|^2+\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau-h)\|^2\Big)ds \\ & + \sup_{s\in[0,t]}\left\|\int_0^s \mathcal{S}(t-\tau)\sigma(\tau,u(\tau),u(\tau-h))dW(\tau)\right\|^2\Bigg),\end{aligned} \tag{7}$$

при цьому для оцінки першого інтеграла використана нерівність Коші-Буняковського.

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s\in[0,t]}\|u(s-h)\|^2 \le \|\varphi\|_C^2 + \sup_{s\in[0,t]}\|u(s)\|^2. \tag{8}$$

Врахувавши (8) та Лему 1, матимемо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)\|^2 \le & 3\Big(M\|\varphi(0)\| + T^2LM\|\varphi\|_C + T^2ML + 2TM\int_0^t L\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau)\|^2\,ds \\ & + C_1(T,\|\varphi\|_C) + C_2(T,\|\varphi\|_h)LM\int_0^t \mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}\|u(\tau)\|^2\,d\tau\Big),\end{aligned}$$

звідси, в силу нерівності Грогуолла, отримаємо оцінку

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|u(s)\|^2 \le C_3(T,\|\varphi\|_T). \tag{9}$$

Нехай $t_2 = t_1 + r$. Далі, якщо $t_1 \geq 0$ то із (2) матимемо

$$
\begin{aligned}
u(t_2) - u(t_1) = &(\mathcal{S}(t_2) - \mathcal{S}(t_1))\varphi(0) \\
&+ \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_2 - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}(t_2 - s) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
&+ \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_2 - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}(t_2 - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
= &(\mathcal{S}(t_1 + r) - \mathcal{S}(t_1))\varphi(0) \\
&+ \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_1+r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) f(s, u(s), u(s-h))\, ds \\
&+ \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \\
&+ \int_{t_1}^{t_1+r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1 + l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 = \mathbb{E} \sup_{r \in [0,l]} \|u(t_1 + r) - u(t_1)\|^2 \\
&\leq 5 \Bigg(\sup_{r \in [0,l]} \|\mathcal{S}(t_1 + r)\varphi(0) - \mathcal{S}(t_1)\varphi(0)\|^2 \\
&\quad + T\mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \int_0^{t_1} \|\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)\|^2 \|f(s, u(s), u(s-h))\|^2\, ds \\
&\quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \int_{t_1}^{t_1+l} L \|\mathcal{S}(t_1 + r - s)\|^2 \left(1 + \mathbb{E}\|u(s)\|^2 + \mathbb{E}\|u(s-h)\|^2\right) ds \\
&\quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \left\| \int_0^{t_1} (\mathcal{S}(t_1 + r - s) - \mathcal{S}(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \right\|^2 \\
&\quad + \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,l]} \left\| \int_{t_1}^{t_1+r} \mathcal{S}(t_1 + r - s) \sigma(s, u(s), u(s-h))\, dW(s) \right\|^2 \Bigg) \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Оцінимо кожен доданок в (11). Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ є напівгупою класу C_0, то в силу рівномірної неперервності вираз I_1 рівномірно по t_1 прямує до нуля при $r \to 0$.

Далі, для оцінки I_2 маємо

$$\begin{aligned} I_2 &\le T\mathbb{E}\left(\sup_{\tau\in[0,l]} \int_0^{t_1} \|\mathcal{S}(t_1+r-s)-\mathcal{S}(t_1-s)\|^2\,ds \sup_{s\in[0,t_1]} \|f(s,u(s),u(s-h))\|^2 \right) \\ &\le T\int_0^T \|\mathcal{S}(t+r)-\mathcal{S}(t)\|^2\,dt\,L\Big(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h)\Big), \end{aligned} \tag{12}$$

в силу (9). Оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ компактна, то в силу [2], вона є неперервною в рівномірній операторній топології при $t>0$, а тому вираз у правій частині (12) прямує до 0 при $r\to 0$, в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність. Оцінимо вираз I_3. Маємо в силу (9)

$$I_3 \le L(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h))\int_{t_1}^{t_1+l}\|\mathcal{S}(t_1+r-s)\|^2 \le LM^2(1+2C_3(T,\|\varphi\|_h))l\to 0, \tag{13}$$

при $l\to 0$. Для оцінки I_4 використаємо факторизаційну формулу [1], згідно з якою

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1}(\mathcal{S}(t_1+r-s)-\mathcal{S}(t_1-s))\sigma(s,u(s),u(s-h))\,dW(s) \\ &=\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\int_0^{t_1}\Big((t_1+r-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1+r-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1-s)\Big)\mathcal{Y}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\mathcal{Y}(s)=\int_0^s (s-v)^{-\alpha}\mathcal{S}(s-v)\sigma(v,u(v),u(v-h))dW(v),$$

$\alpha\in(0,1)$

Виберемо для $p>1,\ \alpha\in(\frac{1}{2p},\frac{1}{2})$. Тоді, із нерівності Гельдера для оцінок доданку I_4 отримуємо

$$\begin{aligned} I_4 &\le \mathbb{E}\left(\sup_{r\in[0,1]}\left(\int_0^{t_1}\Big\|(t_1+r-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1+r-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{S}(t_1-s)\Big\|^{2q}ds\right)^{\frac{p}{q}}\times \right.\\ &\left.\times\int_0^{t_1}\|\mathcal{Y}(s)\|^{2p}\,ds\right)=\sup_{r\in[0,1]}\left(\int_0^{T_1}\left|(s+r)^{\alpha-1}\mathcal{S}(s+r)-s^{\alpha-1}\mathcal{S}(s)\right|^{2q}ds\right)^{\frac{p}{2q}}\times \\ &\quad\times\mathbb{E}\int_0^{t_1}\|\mathcal{Y}(s)\|^{2p}\,ds. \end{aligned} \tag{15}$$

Але, оскільки напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ компактна при $t>0$, то вона неперервна в рівномірній операторній топології. Отже перший співмножник у (15) прямує до нуля в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність. Покажемо, що другий співмножник обмежений. Маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\mathcal{Y}(t)\|^{2p}=\mathbb{E}\left\|\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{S}(t-s)\sigma(s,u(s),u(s-h))dW(s)\right\|^{2p}\le \\ C_T\mathbb{E}\left(\int_0^t(t-s)^{-2\alpha}\|\sigma(s,u(s),u(s-h)\|^2_{L_2^0}\right)^p. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$\int_0^{t_1} \mathbb{E}\,\|\mathcal{Y}(t)\|^{2p}\,dt \le C_T \left(\int_0^T (t-s)^{-2\alpha}\right)^p \mathbb{E}\int_0^T \|\sigma(s),u(s),u(s-h)\|_{L_2^0}^{2p}$$
$$\leqslant C_3 \int_0^T L^P\left(1+E\|u(s)\|^p + E\|u(s-h)\|^p\right)ds \le C_4.$$

Оцінюємо нарешті доданок I_5. Маємо

$$I_5 \le \mathbb{E}\sup_{r\in[0,l]} \|\int_{t_1}^{t+r} \mathcal{S}\,(t_1+r-s)\,\sigma(s,u(s),u(s-h)dW(s)\|^2 \le$$
$$\le \mathbb{E}\int_{t_1}^{t_1+l} M^2\|\sigma\Big(s,u(s),u(s-h)\|_{L_2^0}^2 ds \le C_5 l \to 0,\ l\to 0.$$

Якщо ж t_1 та t_1+l належать $[-h,0]$, то в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}\|u(t_2)-u(t_1)\|^2 = \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}\|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\|^2 \to 0,\ l\to 0,$$

в силу рівномірної неперервності на $[-h,0]$ функції $\varphi(t)$.
Якщо ж $t_1\in[-h,0]$, а $t_2>0$, то $\|u(t_2)-u(t_1)\| \le \|u(t_2)-\varphi(0)\| + \|u(t_1)-\varphi(0)\|$.
Очевидно, що $t_1\to 0$ і $t_2\to 0$, якщо $l\to 0$. Тоді, врахувавши, що всі отримані вище оцінки рівномірні по t_1, отримуємо доведення леми. $\square$

3 Доведення основного результату

Зауважимо, що принциповою відмінністю даної роботи від [5] є доведення леми про модуль нерівності. В решті роботи ідеї доведення схожі з [5], тому ми детально не будемо його повторювати, а зупинимось лише на тих відмінностях, які з'являються завдяки нескінченновимірності.

Зазначимо, що з [1] випливає неперервність траєкторії $u(t)$ в нормі простору H. Введемо наступний згладжений випадковий процес $u_\mu(t)$ побудований для кожного малого $\mu>0$ наступним чином

$$u_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t+\mu} u(s)ds, \quad t\in[-h,T]. \tag{16}$$

При цьому для $t\ge T$ процес $u(s)$ продовжено як сталу випадкову величину за неперервністю. Із властивостей інтегралу Бохнера випливає сильна гладкість процесу $u_\mu(t)$ і з [5]

$$\dot{u}_\mu(t) = \frac{1}{\mu}[u(t+\mu)-u(t)]. \tag{17}$$

Оцінимо різницю у середньому квадратичному між $u(t)$ і $u_\mu(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\|u(t)-u_\mu(t)\|^2 = \frac{1}{\mu^2}\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\left\|\int_t^{t+\mu}(u(s)-u(t))ds\right\|^2 \leqslant$$
$$\leq \frac{1}{\mu^2}\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}\left(\int_t^{t+\mu}\|(u(s)-u(t))\|\,ds\right)^2 \leqslant \frac{1}{\mu}\sup_{t\in[-h,T]}\int_t^{t+\mu}\mathbb{E}\,\|(u(s)-u(t))\|^2\,ds \leq$$
$$\leq C(T,\|\varphi\|_C\,,\mu)\to 0,\ \mu\to 0,$$

в силу леми про модуль неперервності.

Оскільки в системі (3) всі рівняння починаючи з другого є лінійними рівняннями із обмеженими сталими операторами, то вони мають єдиний сильний розв'язок.

Далі система (3) розбивається на дві системи, і розв'язок $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$ подається в даній формі, де $z_j^{(1)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot z_1^{(1)} = u(t) - z_1^{(1)} \\ \frac{h}{m}\dot z_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j=\overline{1,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = u(-\frac{hj}{m}). \end{cases} \tag{18}$$

а $z_j^{(2)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot z_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x) \\ \frac{h}{m}\dot z_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j=\overline{1,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left\|u(t-\frac{hj}{m}) - z_j(t)\right\|^2 \leq 2\left(\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|u(t-\frac{hj}{m}) - z_j^{(1)}(t)\right\|^2 + \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|z_j^{(2)}(t)\right\|^2\right). \tag{20}$$

Позначимо $(y_j(t) = u(t-\frac{hj}{m}), iiN_j(t) = \mathbb{E}\left\|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right\|^2, \quad j=\overline{0,m}.$

Далі, аналогічно [5], для першого доданку у (19) отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{E\left\|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right\|^2} \leq \frac{2h}{\mu}C^{\frac12}(T,\|\varphi\|_C\,,\frac{h}{m}) + 3C^{\frac12}(T,\|\varphi\|_C\,,\mu)). \tag{21}$$

Якщо в останній нерівності покласти $\mu = C^{\frac14}(T,\|\varphi\|_C\,,\frac{h}{m})$, то матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{E\left\|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right\|^2}\le\frac{2h}{\mu}C^{\frac{1}{4}}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})+3C^{\frac{1}{2}}(T,\|\varphi\|_C,C^{\frac{1}{4}}(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m}))=$$
$$=\alpha(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})\to 0,\quad m\to\infty. \tag{22}$$

Відповідні оцінки для системи (19) набирають вигляду

$$E\left\|z_j^{(2)}(t)\right\|^2\le\sup_{t\in[0,T]}N_0(t). \tag{23}$$

Тому, аналогічно [5] отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{N_j(t)}\le\alpha\left(T,\|\varphi_C\|,\frac{h}{m}\right)+\sqrt{\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)}. \tag{24}$$

Нарешті оцінимо $N_0(t)$. Маємо

$$z_0(t)-u(t)=\int_0^t\mathcal{S}(t-s)(f(s,z_0(s),z_m(s))ds+$$
$$+\int_0^t\mathcal{S}(t-s)(\sigma(s,z_0(s),z_m(s))-\sigma(s,u(s),u(s-h))dW(s).$$

Із властивостей стохастичних інтегралів тоді отримуємо

$$N_0(t)\le 2T\int_0^t LM^2\left(\mathbb{E}\|z_0(s)-u(s)\|^2+\mathbb{E}\|z_m(s)-u(s-h)\|^2\right)ds\le$$
$$\le 2TLM^2\int_0^t 4L\sup_{\tau\in[0,s]}N_0(s)ds+2\alpha^2C(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m}).$$

Звідси, з урахуванням леми Гронуолла, матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)\le 2\alpha^2C(T,\|\varphi\|_C,\frac{h}{m})e^{(T+1)LMT}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Остання оцінка із урахуванням (24) доводять теорему.

4 Приклад застосування

Проілюструємо отриманий результат наступним стохастичним функціонально-диференціальним рівнянням типу реакція-дифузія.

Нехай D-обмежена область в $\mathbb{R}^d$ із межею ∂D, що задовольняє умову Ляпунова $H=L^2(D)$ і оператор A є диференціальним оператором другого порядку еліптичного типу

$$\mathrm{A}\,u = \sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = \mathrm{div}(a(x)\nabla u).$$

Тут a_{ij} є неперервним за Гельдером коефіцієнтами із показниками Гельдера $\beta \in (0,1)$, симетричними, обмеженими, що задовольняють умову рівномірної еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\eta_i\,\eta_j \geq C_0|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^d,$$

для деякою сталої $C_0 > 0$, $|\cdot|$ - евклідова норма в $\mathbb{R}^d$. Нехай $e_n(x)$- ортонормований базис в H такий, що $e_n(x) \in L^\infty(D)$, $\sup_n \|e_n\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Введемо коваріаційний оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такий, що Q є невід'ємним і $Tr(Q) < \infty$, а також $Qe_n = \lambda_n e_n$. При цьому λ_n є послідовність невід'ємних чисел, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Тепер визначимо H-значний Q-ядерний процес Вінера

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\beta_i(t)e_i(x), \quad t \geq 0.$$

При цьому вважаємо, що простори K і H в означенні вінерівського процесу співпадають, тобто $K = H = L^2(H)$. Позначимо $V := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Як випливає з [4](Лема 2.2) $V \subset L^\infty(D)$.

Тоді можна ввести мультиплікативний оператор $\Psi : V \to H$ наступним чином. Для кожного фіксованого $\varphi \in L^2(D)$ покладемо $\Psi(\varphi) = \varphi\cdot\psi$, для $\psi \in V$. Оскільки $\varphi \in L^2(D)$ та $\psi \in L^\infty(D)$, то оператор Ψ коректно визначений, а також $\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}} : L^2(D) \to L^2(D)$ визначає оператор Гільберта-Шмідта із оцінкою норми

$$\left\|\Psi \circ Q^2\right\|_{L_2^0}^2 \leq \mathrm{Tr}(Q) \sup_n \|e_n\|_\infty^2 \|\varphi\|_{L^2(D)}^2 .$$

Розглянемо наступне рівняння

$$\begin{cases} d(u(t,x)) = [\mathrm{A}\,u + f(t,u(t),u(t-h))]\,dt + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\sigma(t,u(t),u(t-h))e_i(x)\,d\beta_i(t) \\ u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in [-h,0],\; u(0,x) = \varphi_0(x) \quad \text{в } D, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in \partial D,\; t \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

Тут дійснозначні функції $f : [0,T]\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$, визначені, неперервні за сукупністю змінних та задовольняють за другою та третьою змінними глобальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту. Із [2] випливає, що оператор A є генератором компактної напівгрупи операторів $\mathcal{S}(t) : H \to H$. Неважко бачити, що умови 1-4 для рівняння (25) виконані, а тому для (25) справедливе твердження теореми.

Список літератури

[1] De Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 454p.

[2] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983, 279p.

[3] Stanzytskiy A., Misiats O., and Stanzhytskiy O. *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients.* Evolution equations and Control theory 2022, **11** (6), 1929–1953 DOI: 10.3934/eect.2022005

[4] Manthey R., Zausinger T. *Stochastic evolution equations in* L_p^{2v}. Stochastics and Stochastic Reports 1999, **66**, 37–85

[5] Петрина Г.О., Станжицький А.О. *Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненнями стохастичною системою без запізнення.* Буковинський математичний журнал 2024, **12** (1), 120–136. (in Ukrainian)

[6] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням і їх стійкість.* Нелінійні коливання 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[7] Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різнецевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь.* Нелінійні коливання 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[8] Іліка С.А., Матвій О.В., Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Схема апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування.* Буковинський математичний журнал 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Список літератури

[1] De Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 454p.

[2] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983, 279p.

[3] Stanzytskiy A., Misiats O., and Stanzhytskiy O. *Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients.* Evolution equations and Control theory 2022, **11** (6), 1929–1953 DOI: 10.3934/eect.2022005

[4] Manthey R., Zausinger T. *Stochastic evolution equations in* L_p^{2v}. Stochastics and Stochastic Reports 1999, **66**, 37–85

[5] Petryna G.O., Stanzhytskiy A.O. *Approximation of systems of stochastic equations with delays by a stochastic system without delays.* Bukovinian Mathematical Journal 2024, **12** (1), 120–136. (in Ukrainian)

[6] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of systems with delay and their stability.* Nonlinear oscillations 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[7] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations.* Nonlinear oscillations 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[8] Ilika S.A., Matviy O.V., Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Scheme of approximation of differential functional equations and their applications.* Bukovinian Mathematical Journal 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Надійшло 16.12.2024

Petryna G., Stanzhytskiy O., and Martynyuk O. *On the Approximation of Stochastic Delay Equations in Infinite-Dimensional Spaces*, Bukovinian Math. Journal. **12** (2) (2024), 168–181.

The article presents a detailed scheme for the mean square approximation of evolutionary stochastic delay equations in infinite-dimensional spaces. The primary focus lies in substituting the original system with delay by a system of evolutionary stochastic equations without delay. The proposed approach involves partitioning the delay interval into subintervals and constructing a corresponding system of equations that approximates the original system's behavior. Notably, the number of equations in the approximating system grows as the number of partition subintervals increases. A significant result of this study demonstrates that, as the partitioning becomes finer (i.e., the number of subintervals approaches infinity), the mean square distance between the solutions of the delay equation and the solutions of the delay-free approximating system converges to zero.

The theoretical framework of the approximation method leverages key concepts and results from infinite-dimensional stochastic analysis, incorporating tools to address the challenges posed by the functional nature of the delay term and the unboundedness of the state space. The study not only generalizes earlier finite-dimensional results to the infinite-dimensional setting but also extends the methods used for deterministic delay systems to stochastic systems. The methodology builds on the classical idea of decomposing the solution of the delay equation using a Taylor expansion in terms of the delay length $h > 0$. This decomposition allows the construction of an approximating system that replaces the original delay equation with a system of Cauchy problems for ordinary differential equations (ODEs).

The results have significant implications for practical applications, particularly for systems where delays naturally arise, such as in stochastic control, population dynamics, and infinite-dimensional systems described by stochastic PDEs.

The ability to replace complex delay systems with delay-free approximations not only simplifies numerical computations but also provides insight into the underlying dynamics of these systems. By rigorously establishing the conditions under which the approximation is valid, this work contributes to the theoretical foundation of stochastic delay equations in infinite-dimensional spaces and offers a robust tool for analyzing and simulating such systems.