Попов М. М., Українець О. З.

ЦІЛОЧИСЛЕННІ ТОВАРНІ ВЕКТОРИ У МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ ЕРРОУ-ДЕБРЕ

Ми розглядаємо невід'ємні цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Наш основний результат є версією теореми Ерроу-Дебре про рівноважну ціну, адаптовану до випадку цілочисленних товарних векторів. Доведення базується на геометричній формі теореми Гана-Банаха та істотно використовує специфіку цілочисленного простору товарів. Наше доведення працює лише для одноточкової множини агентів, і ми не знаємо, чи можна його модифікувати для загального випадку, використовуючи ту ж саму ідею.

Ключові слова і фрази: модель Ерроу-Дебре, відношення переваги, товарний вектор, функція попиту.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine (Popov M. M.)
Yury Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Ukrainets O. Z.)
e-mail: *o.ukrainets@chnu.edu.ua (Ukrainets O. Z.), misham.popov@gmail.com (Popov M.M.)*

Вступ

Класична модель економіки Ерроу-Дебре побудована ще в середині минулого століття. Незважаючи на це, вона залишається актуальною темою сучасних досліджень, див. [4], [5], [7]. Автори даної замітки у недавній статті [8] досліджували модель типу Ерроу-Дебре на основі нового фазового простору, який називається комплементарним простором, і який узагальнює простори Рісса та булеві кільця.

В даній статті розглядається версія класичної моделі Ерроу-Дебре, в якій розглядаються лише цілочисленні кількості товарів, що є природним обмеженням для практичних задач. Таке обмеження дозволяє по-новому осмислити задачу існування рівноважної ціни. Доведення цілочисленної версії теореми Ерроу-Дебре, з одного боку, виглядає простішим. Але, з іншого боку, доведення, яке базується на геометричній версії теореми Гана-Банаха, годиться лише для випадку одного агента. Залишається відкритим питання, чи можна дану ідею доведення застосувати до випадку довільної скінченної кількості агентів.

УДК 519.865
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47B38; Secondary 47B65.

1 Термінологія моделі Ерроу-Дебре

Загальноприйняту термінологію та позначення з теорії векторних ґраток ми запозичили з підручника Аліпрантіса і Буркіншава [2].

Нагадаємо, що бінарне відношення $\succeq$ на множині P називається ***відношенням переваги*** (див. [1, Definition 1.1.1]), якщо виконуються наступні умови для довільних $x, y, z \in P$:

1. $x \succeq x$ (рефлексивність);

2. $x \succeq y$ або $y \succeq x$ (лінійність);

3. якщо $x \succeq y$ та $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивність).

Очевидно, що кожне відношення нестрогого лінійного порядку є відношенням переваги, але, наприклад, максимальне відношення P^2, тобто, $(\forall x, y \in P)\, x \succeq y$ є відношенням переваги, яке не є відношенням порядку. З іншого боку, на фактор-множині по відношенню еквівалентності $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \succeq y$ та $y \succeq x$, відношення переваги індукує відношення порядку. Запис $x \not\succeq y$ означає заперечення $x \succeq y$. "Строга" версія відношення переваги визначається так: $x \succ y$ означає, що $x \succeq y$ та $y \not\succeq x$. Вживають також $y \preceq x$, як рівносильну версію запису $x \succeq y$ (аналогічне правило стосується відношень $\succ$ та $\not\succeq$). Відношення $x \not\succ y$ означає заперечення $x \succ y$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на множині P. Елемент $q_0 \in Q$ підмножини $Q \subseteq P$ називається ***$\succeq$-максимальним*** (чи просто ***максимальним***, якщо зрозуміло, про яке відношення переваги йдеться), якщо не існує $x \in Q$ такого, що $x \succ q_0$.

Класична модель економіки Ерроу-Дебре [3], [1] базується на додатному конусі $\mathbb{R}^d_+$ d-вимірного простору Рісса $\mathbb{R}^d$, де $d \in \mathbb{R}$ – це кількість товарів даної економіки. Вектори $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+$ розглядаються як вибірки кількостей товарів і називаються ***товарними векторами***, які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися.

Для елементів $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ та $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ простору Рісса $\mathbb{R}^d$ вважається, що:

- $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, якщо $u_i \leq v_i$ для кожного $i = 1, \ldots, d$;

- $\mathbf{u} < \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ та $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається:

- ***монотонним***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d_+$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$;

- ***строго монотонним***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d_+$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Елементи дуального простору Рісса $(\mathbb{R}^d)'$ всіх лінійних на $\mathbb{R}^d$ функціоналів, який ототожнюється із самим $\mathbb{R}^d$, називаються ***цінами***. Таким чином, кожна ціна $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d_+$, як функція на E^+, визначає ціну довільного стану $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+$ за допомогою виразу $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, який дорівнює $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d p_k x_k$.

Кожна фіксована ціна $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d_+$ та фіксований товарний вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$ (який називається ***початковим запасом***) визначають ***бюджетну множину*** товарних векторів за допомогою рівності:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \big\{x \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \le \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\big\}.$$

Геометрично, бюджетна множина – це багатовимірна піраміда, яка за умови $\mathbf{p} \gg 0$ є компактною підмножиною $\mathbb{R}^d$, і яка цілком природно має $\succeq$-максимальні елементи для широкого класу відношень переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ (див. [1, Subsection 1.2]), а при певних умовах на відношення переваги максимальний елемент єдиний [1, Theorem 1.2.3] (на просторі Рісса $\mathbb{R}^d$ відношення $(x_1, \dots, x_d) \gg (y_1, \dots, y_d)$ означає, що $x_k > y_k$ для всіх $k = 1, \dots, d$). Оскільки умова $\mathbf{p} \gg 0$, яка рівносильна до умови $\mathbf{p} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$, є, очевидно, необхідною для обмеженості бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$, то максимальні елементи бюджетних множин розглядаються лише для цін $\mathbf{p}$ з внутрішності $\operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}^d_+$ та $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$ – початковий запас. Позначимо через $\mathcal{D}^{\succeq}_{\boldsymbol{\omega}}$ – множину всіх цін $\mathbf{p} \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$, для яких існує єдиний $\succeq$-максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, який називатимемо ***вектором попиту*** відношення переваги $\succeq$ при дії ціни $\mathbf{p}$ і позначатимемо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$. Відповідне відображення $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}} \colon \mathcal{D}^{\succeq}_{\boldsymbol{\omega}} \to \mathbb{R}^d_+$ називається ***функцією попиту***, що відповідає відношенню переваги $\succeq$.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх відношень переваги на $\mathbb{R}^d_+$.

Нехай A – скінченна множина (елементи якої називаються **агентами**). Довільне відображення $\mathcal{E} \colon A \to \mathbb{R}^d_+ \times \mathcal{P}$ називається **економікою обміну**.

Значення економіки обміну записують в індексній формі: для кожного агента $k \in A$ значення $\mathcal{E}_k = (\boldsymbol{\omega}_k, \succeq_k)$ характеризує початковий запас k-го агента $\boldsymbol{\omega}_k$ та відношення переваги $\succeq_k$, яке він обрав. Далі уводиться поняття ***повного запасу економіки***, яке дорівнює $\boldsymbol{\omega} := \sum_{k \in A} \boldsymbol{\omega}_k$. Для кожного $k \in A$ функція попиту $\mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k} \colon \mathcal{D}^{\succeq_k}_{\boldsymbol{\omega}_k} \to \mathbb{R}^d_+$ визначена на своїй області. Тому розглянемо спільну область визначення економіки обміну $\mathcal{E}$ рівністю $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \bigcap_{k \in A} \mathcal{D}^{\succeq_k}_{\boldsymbol{\omega}_k}$. Нарешті, ***функція надлишкового попиту*** $\zeta \colon \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}^d$ уводиться за допомогою формули

$$\zeta(\mathbf{p}) := \sum_{k \in A} \big(\mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_k\big) = \sum_{k \in A} \mathbf{x}_{k,\boldsymbol{\omega}_k}(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Вектор цін $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ називається ***рівноважним***, якщо $\zeta(\mathbf{p}) = 0$. Основне питання моделі економіки Ерроу-Дебре полягає у наступному.

Проблема 1. *За яких умов на економіку обміну існує рівноважний вектор цін?*

Класична теорема Ерроу-Дебре дає позитивну відповідь для, так званої, неокласичної економіки обміну (див. [3], [1, Theorem 1.4.9]).

2 Випадок цілочисленних товарних векторів

У даному розділі ми розглядатимемо випадок, у якому кількість товарів не може бути дробовою, що є вельми природною вимогою для значної кількості товарів. Отже, товарні вектори розглядатимуться у множині $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді роль внутрішності $\operatorname{Int} \mathbb{R}_+^d$ для $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$ відіграватиме $\mathbb{N}^d$. Решта понять з попереднього підрозділу залишаються без змін. Зокрема, ціни, як і раніше, розглядаються з додатного конусу $p \in \mathbb{R}_+^d$.

Позначимо $\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^d \subseteq \mathbb{R}_+^d$ при $i = 1, \dots, d$.

Твердження 1. *Для довільного ненульового початкового запасу $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{N}_0^d$ і довільної ціни $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}_+^d$ наступні умови рівносильні:*

(i) *бюджетна множина $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ скінченна;*

(ii) $\mathbf{p} \gg 0$.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай, навпаки, існує число $i \in \{1, \dots, d\}$ таке, що $p_i = 0$, де $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо $n \cdot \mathbf{e}_i \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, що суперечить (i).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Для довільного $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ та довільного $i \in \{1, \dots, d\}$ маємо

$$p_i x_i \leq \sum_{j=1}^{d} p_j x_j \leq \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega}).$$

Оскільки $p_i > 0$, то з попередньої нерівності отримуємо $x_i \leq \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i}$. Беручи до уваги, що $x_i \in \mathbb{N}_0$, отримуємо $x_i \in \left\{0, 1, \dots, \left[\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i}\right]\right\}$, де через $[z]$ позначається ціла частина числа $z \in \mathbb{R}$. Тому кількість елементів бюджетної множини має оцінку

$$|\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})| \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\left[\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})}{p_i} \right] + 1 \right).$$

□

Твердження 2. *Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}_+^d$ та $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{N}_0^d$ – ненульовий початковий запас. Тоді для кожної ціни $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d$ існує $\succeq$-максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$. Якщо, крім того, відношення переваги $\succeq$ є лінійним порядком, то такий максимальний елемент єдиний, а отже, $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\omega}}^{\succeq} = \mathbb{N}^d$.*

Доведення. Згідно з твердженням 1, бюджетна множина $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ скінченна. Використовуючи лінійність відношення переваги $\succeq$, індукцією за кількістю елементів $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$ доводимо існування максимального елементу. Єдиність максимального елементу є безпосереднім є наслідком того, що відношення переваги є відношенням лінійного порядку. □

3 Коротке доведення версії теореми Ерроу-Дебре для випадку цілочисленних товарних векторів

Нагадаємо, що підмножина $K \subseteq \mathbb{R}^d$ називається ***опуклою***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ та довільного скаляру $\lambda \in (0, 1)$ маємо $\lambda\, \mathbf{x} + (1 - \lambda)\, \mathbf{y} \in K$. ***Опукла оболонка***

$\operatorname{conv} K$ довільної підмножини $K \subseteq \mathbb{R}^d$ визначається, як перетин всіх опуклих підмножин $\mathbb{R}^d$, що містять K. Опукла оболонка довільної підмножини є коректно визначеною. Безпосередньо легко довести, що $\operatorname{conv} K$ є опуклою множиною.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається ***опуклим***, якщо для довільного $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d_+$ множина $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{x} \succeq \mathbf{z}\}$ є опуклою в $\mathbb{R}^d$.

Дещо інакше дається означення строго опуклого відношення переваги (див. [1, Definition 1.1.5]). Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}^d_+$ називається ***строго опуклим***, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d_+$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0,1)$ маємо $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.

Наведемо версію останнього означення, адаптовану до випадку цілочисленних товарних векторів.

Означення 1. *Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{N}^d_0$ називатимемо* **строго опуклим**, *якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{N}^d_0$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0,1)$ з умови $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d_0$ випливає, що $\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.*

Позначимо через $\mathcal{P}_0$ множину всіх строго монотонних і строго опуклих відношень переваги на $\mathbb{N}^d_0$.

Теорема 1. *Кожна одноагентна економіка обміну $\mathcal{E} \colon \{a\} \to \mathbb{N}^d_0 \times \mathcal{P}_0$ з умовою $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{N}^d$ має рівноважний вектор цін $\mathbf{p}_0 \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^d_+$.*

Доведення базується на геометричній формі теореми Гана-Банаха.

Лема 1 (Теорема Гана-Банаха, [6], с. 280)**.** *Нехай A, B – неперетинні опуклі підмножини дійсного нормованого простору X, причому A – відкрита множина. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний функціонал $f \colon X \to \mathbb{R}$ та дійсне число γ такі, що $f(x) < \gamma$ для довільного $x \in A$ та $f(y) \geq \gamma$ для довільного $y \in B$.*

Доведення теореми 1. Позначимо $\mathcal{E}(a) = (\boldsymbol{\omega}, \succeq)$; $\boldsymbol{\omega} = (\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_d)$. Тоді сума (1) складається з одного доданку, а отже, означення рівноважного вектору $\mathbf{p}_0$ зводиться до рівності
$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$
яку потрібно довести.

Визначимо множини $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+ : \mathbf{x} < \boldsymbol{\omega}\}$, $B_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d_0 : x \succeq \boldsymbol{\omega}\}$ та $B := \operatorname{conv} B_0$. З опуклості відношення переваги $\succeq$ отримуємо:
$$B \cap N^d_0 = B_0. \tag{3}$$

Згідно з означеннями,
$$(\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d_+)\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) \in B_0 \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}), \tag{4}$$
а отже, поклавши $B_0^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d_0 : x \succ \boldsymbol{\omega}\}$, отримуємо, що умова (2) рівносильна до наступної:
$$B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \varnothing. \tag{2'}$$

Розглянемо $\mathbb{R}^d$, як нормований простір, наприклад з евклідовою нормою $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$ для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Відкритість та опуклість множини A доводяться стандартно, використовуючи лише означення. Виберемо, згідно з лемою 1, функціонал $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{R}^d$ та дійсне число γ так, щоб $\mathbf{q}(\mathbf{x}) < \gamma$ для довільного $\mathbf{x} \in A$ та $\mathbf{q}(\mathbf{y}) \geq \gamma$ для довільного $\mathbf{y} \in B$. Оскільки $\mathbf{0} \in A$, то $0 = \mathbf{q}(\mathbf{0}) < \gamma$. Отже, $\gamma > 0$.

Покладемо $\lambda_m := 1 - \frac{1}{m}$ та $\mathbf{x}_m := \lambda_m \boldsymbol{\omega}$ для $m = 1, 2, \ldots$. Тоді $\lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}_m\| = 0$ та $\mathbf{x}_m \in A$. З неперервності $\mathbf{q}$ та нерівності $\mathbf{q}(\mathbf{x}_m) < \gamma$ отримуємо $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \leq \gamma$, а з умови $\boldsymbol{\omega} \in B$ – нерівність $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \geq \gamma$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{d} q_i \overline{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma. \tag{5}$$

Оскільки для кожного $i \in \{1, \ldots, d\}$ маємо $\boldsymbol{\omega} - \overline{\omega}_i \mathbf{e}_i \in A$, то

$$\gamma - q_i \overline{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega} - \overline{\omega}_i \mathbf{e}_i) < \gamma,$$

звідки дістаємо, що $q_i \overline{\omega}_i > 0$, а отже, $q_i > 0$. Таким чином,

$$\mathbf{q} \gg 0. \tag{6}$$

Позначимо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d)$ відповідний вектор попиту, який є коректно визначений, згідно з (6). З максимальності вектора попиту випливає, що $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in B_0$, а отже, $\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) \geq \gamma$. З іншого боку, оскільки $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$, то з (5) дістаємо $\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) \leq \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma$. Таким чином,

$$\mathbf{q}\big(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})\big) = \gamma. \tag{7}$$

Отже, вектор попиту $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ лежить на гіперплощині $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \gamma\}$. Будувати шуканий вектор ціни $\mathbf{p}_0$ з умовою (2) будемо за рахунок "малого" збурення вектора $\mathbf{q}$.

Якщо $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega}$, то $\mathbf{p}_0 := \mathbf{q}$ є шуканим вектором цін з умовою (2). Розглянемо випадок $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \neq \boldsymbol{\omega}$. Тоді з максимальності та єдиності максимального вектора $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ випливає $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \succ \boldsymbol{\omega}$. Зі строгої монотонності відношення переваги випливає, що існує координата $i \in \{1, \ldots, d\}$ така, що

$$\overline{x}_i > \overline{\omega}_i. \tag{8}$$

Вектор цін $\mathbf{p}_0$ шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{p}_\varepsilon = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + \varepsilon, q_{i+1}, \ldots, q_d), \ \ \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) \overset{(9)}{=} \mathbf{q}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) + \varepsilon \overline{x}_i \overset{(7)}{=} \gamma + \varepsilon \overline{x}_i \overset{(8)}{>} \gamma + \varepsilon \overline{\omega}_i \overset{(5)}{=} \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon \overline{\omega}_i \overset{(9)}{=} \mathbf{p}_\varepsilon(\boldsymbol{\omega}),$$

тобто, $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \notin \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$, а отже, $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ не може бути вектором попиту $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$ при дії ціни $\mathbf{p}_\varepsilon$. Аналогічно, для довільних $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B_0$ та $\varepsilon > 0$ виконується імплікація

$$(x_i > \overline{\omega}_i) \ \Rightarrow \ \Big(\mathbf{x} \notin \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)\Big). \tag{10}$$

Доведемо включення

$$\bigcap_{\varepsilon\in(0,1]} \big(B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)\big) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}). \tag{11}$$

Дійсно, нехай $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ – довільний елемент B_0^*. Якщо для довільного $\varepsilon \in (0,1]$ виконується $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_\varepsilon)$, то

$$(\forall \varepsilon \in (0,1])\ \mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^d q_j y_j + \varepsilon y_i \le \sum_{j=1}^d q_j \overline{\omega}_j + \varepsilon \overline{\omega}_i,$$

звідки при $\varepsilon \downarrow 0$ дістаємо

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^d q_j y_j \le \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}),$$

а отже, (11) доведено. Оскільки всі множини, які фігурують в (11), є підмножинами скінченної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_1)$, то всі ці множини теж скінченні. Тому з очевидного включення $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_1}) \supseteq \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_2})$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ випливає, що серед множин лівої частини (11), які стоять в перетині, є найбільший (в розумінні включення) елемент. Отже, умова (11) може бути рівносильно переписана так:

$$\big(\exists \varepsilon_0 \in (0,1]\big)\ \big(B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})\big) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}). \tag{11$'$}$$

З (11$'$) випливає, що коли за допомогою збурення q_i на ε_0 ми виключаємо з множини B_0^* елемент $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \ne \boldsymbol{\omega}$, який не потрапляє до множини бюджетних векторів збуреного вектора $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})$, ми не отримуємо нових бюджетних векторів, а отже, кількість елементів множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ зменшується на 1. Залишається розглянути при цьому можливість при новому виключенні чергового елементу повторного отримання вже вилученого раніше. Якщо на якомусь етапі вилучення вектора $\mathbf{z}$ при збуренні певної координати q_s на довільне $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ у відповідній множині бюджетних векторів з'являється вже вилучений на попередніх етапах вектор $\mathbf{u}$, то в цьому випадку вектор $\mathbf{u}$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{\omega}$ та $\mathbf{z}$ (інакше вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{z}$ можна було б відокремити прямою, що проходить через вектори $\boldsymbol{\omega}$, при певному збуренні ε). Оскільки на кожному етапі вилучення відповідні координати вектора $\mathbf{z}$ задовольняють умову (8), а з імплікації (10) випливає, що координати вектора $\mathbf{u}$ не можуть задовольняти аналогічну умову, то вектори $\mathbf{z}$ та $\mathbf{u}$ знаходяться по різні боки прямої від точки $\boldsymbol{\omega}$. Це означає, що існує $\lambda \in (0,1)$ таке, що $\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{z} + (1-\lambda)\mathbf{u}$. Оскільки $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in B_0$ та $\mathbf{z} \ne \mathbf{u}$, зі строгої опуклості відношення переваги $\succeq$ випливає, що $\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{z} + (1-\lambda)\mathbf{u} \succ \boldsymbol{\omega}$, – суперечність. Отже, строга опуклість відношення $\succeq$ гарантує, що при поетапному збуренні вектора ціни $\mathbf{q}$ на кожному етапі будуть виключатися по одному вектору з $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$, причому не лише нових елементів не з'явиться, але й не повернуться вже вилучені вектори. За рахунок скінченності множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ процес вилучення призведе до порожньої у залишку множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0)$. Таким чином, теорему доведено. $\square$

Список літератури

[1] Aliprantis C. D., Brown D. J., Burkinshaw O. *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin. (1989). DOI 10.1007/978-3-662-21893-8

[2] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators, Springer, Dordrecht, 2006.

[3] Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competetive economy, Econometrica 1954, **22**, 265–290.

[4] Chen P.-A., Lu C.-J., Lu, Y.-S. An alternating algorithm for finding linear Arrow-Debreu market equilibria. Preprint. (2019). Available at arXiv:1902.01754. https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.01754

[5] Fratini S. M. Interest, profit and saving in Arrow-Debreu equilibrium models. Review of Keynesian Economics, 8, (2020), no 1, 39–53.

[6] Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: СПД Чижиков, 2011, – 600 с.

[7] Keller C., Tseng M. C. Arrow-Debreu meets Kyle: Price discovery for derivatives. Preprint. (2023). Available at arXiv:2302.13426. https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.13426

[8] Popov M. M., Ukrainets O. Z. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Mat. Studii. 62 (2024), no 2, 199–210. https://doi.org/10.30970/ms.62.2.199-210

Надійшло 15.12.2024

Popov M. M., Ukrainets O. Z. *Integer commodity vectors in the Arrow-Debreu model of economy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 182–189.

We consider nonnegative integer values of commodity in the Arrow-Debreu model of economy. Our main result is a version of the Arrow-Debreu equilibrium price theorem adapted to the setting of integer commodity vectors. The proof is based on the geometric form of the Hahn-Banach theorem and essentially uses peculiarity of the integer-valued commodity space. Our proof works for one-point set of agents only, and we do not know, whether it can be adjusted to the general case using the same idea.