Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 143–153 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 143–153

Мединський І. П., Пасічник Г. С.

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ПАРАМЕТРА, ТА З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова із залежними від параметра зростаючими коефіцієнтами та з виродженням на початковій гіперплощині побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його властивості. Коефіцієнти рівняння є досить гладкими, а їх ріст залежить від росту деякої функції. Такі властивості є важливими для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтими, залежними від змінних основної групи.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, зростаючі коефіцієнти, фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна (Мединський І. П.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *ihor.p.medynskyi@lpnu.ua (Мединський І.П.), pasichnyk.gs@gmail.com (Пасічник Г.С.)*

Вступ

Дослідження класів параболічних рівнянь і систем рівнянь, які мають виродження на множині задання початкових даних, започатковані в середині 90-х років минулого століття у Чернівцях. Ними охоплено параболічні за Петровським чи за Ейдельманом системи з обмеженими або необмеженими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами, вироджені параболічні типу Колмогорова (ультрапараболічні) рівняння з обмеженими коефіцієнтами. Більшість вищеназваних результатів увійшли повністю, або частково до монографії [1], а огляди результатів містяться в [2, 3]. Питання побудови, дослідження і застосування фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних типу Колмогорова рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині, коефіцієнти якого можуть зростають при $|x| \to \infty$, залишається відкритим. Ми розглядаємо ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова другого порядку з виродженнями на початковій гіперплощині, коефіцієнти якого задежать від параметра y_1 і можуть зростають при $|y_1| \to \infty$.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K45, 35K65, 35K70, 35A08.

1 Постановка задачі

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \leq n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1 m_1 + n_2 m_2$, де $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Будемо використовувати ще позначення: $x_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1'' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + t x_1'$; α і β – неперервні на $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна; $B(t, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$.

Розглядатимемо в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ рівняння

$$\left(S - \beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1)\partial_{x_{1j}} + a_0(t, y_1)\Big)\right) u(t, x) = 0, \qquad (1)$$

в якому $S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}$, y_1 – фіксована точка з $\mathbb{R}^{n_1}$.

Припускається, що на коефіцієнти рівняння (1) виконуються наступні умови.

$\mathbf{A}_1$. Існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(y_1) \to \infty$ при $|y_1| \to \infty$;

2) функції $b_{js}(t, x_1) \equiv a_{js}(t, y_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $b_j(t, y_1) \equiv a_j(t, y_1) D(y_1)^{-1}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $b_0(t, y_1) \equiv a_0(t, y_1) D(y_1)^{-2}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $0 \leq t \leq T$, обмежені;

3) для рівняння без виродження на початковій гіперплощині

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1)\partial_{x_{1j}}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right) -$$
$$- b_0(t, y_1)\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\Big) v(t, x) = 0,$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall\, \mu \in \mathbb{R} :$$
$$\mathrm{Re}\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1)\sigma_{1j}\mu - b_0(t, x_1)\mu^2\Big) \geq \delta\Big(|\sigma_1|^2 + \mu^2\Big). \qquad (2)$$

.

$\mathbf{A}_2$. Існують неперервні похідні $\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, для яких справджуються оцінки

$|\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}(t, y_1)| \leq C(D(y_1))^{|k_1|(1-\varepsilon)}$, $|\partial_{y_1}^{k_1} a_j(t, y_1)| \leq C(D(y_1))^{1+|k_1|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_{y_1}^{k_1} a_0(t, y_1)| \leq C(D(y_1))^{2+|k_1|(1-\varepsilon)}$, $t \in [0, T]$, $\quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$,

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$; функції $b_{js}(t, y_1)$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, $b_j(t, y_1)$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $b_0(t, y_1)$ як функції t є неперервними рівномірно щодо $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

$\mathbf{A}_3$. Похідні $\partial_{y_1}^{k_1} a_{js}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, $\partial_{y_1}^{k_1} a_0$, $|k_1| \leq 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за y_1 з показником $\lambda \in (0, 1)$ рівномірно щодо $t \in [0, T]$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall \{y_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ |y_1 - z_1| \leq R \quad \forall\, t \in [0, T] : \quad |\Delta_{y_1}^{z_1} a(t, y_1)| \leq C|y_1 - z_1|^{\lambda}.$$

2 Побудова фундаментального розв'язоку задачі Коші (ФРЗК)

Розглянемо допоміжне рівняння

$$\Big(\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}+\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)+$$
$$+b_0(t,y_1)\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\Big)\Big)v(t,x,x_{n+1})=0,\qquad (t,x,x_{n+1})\in\Pi_{(0,T]}\times\mathbb{R},\tag{3}$$

де y_1 – фіксована точка простору $\mathbb{R}^{n_1}$.

Функцію φ вважатимемо такою функцією, що всі подальші міркування є законними, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є $\psi(\sigma):=F_{x\to\sigma}[\varphi],\quad \sigma\in\mathbb{R}^n$.

Шукаючи розв'язок задачі Коші для рівняння (3) у вигляді

$$v(t,x,x_{n+1})=F^{-1}_{\substack{\sigma\to x\\ \eta\to x_{n+1}}}[\tilde v(t,\sigma,\eta)],\quad t>0,\ \ (x,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\tag{4}$$

і використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції $\tilde v$ задачу Коші

$$\Big(\alpha(t)\partial_t+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}}+\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}-$$
$$-i\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\sigma_{1j}\eta-b_0(t,y_1)\eta^2\Big)\Big)\tilde v(t,\sigma,\eta)=0,\quad (t,\sigma,\eta)\in\Pi_{(\tau,T]}\times\mathbb{R},\tag{5}$$
$$\tilde v(t,\sigma,\eta)|_{t=\tau}=2\pi\psi(\sigma)\delta(\eta),\quad \sigma\in\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R}.\tag{6}$$

Рівняння (5) – це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик, згідно з яким складаємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{\alpha(t)}=\frac{d\sigma_{11}}{\beta(t)\sigma_{21}}=\ldots=\frac{d\sigma_{1n_2}}{\beta(t)\sigma_{2n_2}}=\frac{d\tilde v}{\beta(t)\Big(-\sum\limits_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}+i\sum\limits_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\sigma_{1j}\eta+b_0(t,y_1)\eta^2\Big)\tilde v}$$

і знаходимо її n_2+1 незалежних інтегралів

$$\sigma_{1j}-B(t,\tau)\sigma_{2j}=C_j,\quad j\in\{1,\ldots,n_2\};$$
$$\tilde v=C\exp\Big\{\int_\tau^t\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(\theta,y_1)\sigma_{1j}\sigma_{1s}+i\sum_{j=1}^{n_1}b_j(\theta,y_1)\sigma_{1j}\eta+b_0(\theta,y_1)\eta^2\Big)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\},$$

де C_j, C – довільні сталі. Задовольнивши початкову умову (6), в результаті одержимо

$$v(t,x,x_{n+1})=(2\pi)^{-(n+1)}\int_{\mathrm{R}^{n+1}}\exp\Big\{i((x,x_{n+1}),(\sigma,\eta))+$$
$$+\int_\tau^t\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(\theta,y_1)\big([\sigma_{1j}-B(t,\theta)\sigma_{2j}]\bar\varsigma_j+\sigma_{1j}\bar{\bar\varsigma}_j\big)\big([\sigma_{1s}-B(t,\theta)\sigma_{2s}]\bar\varsigma_s+\sigma_{1s}\bar{\bar\varsigma}_s\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\sigma_{1j}-B(t,\theta)\sigma_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\sigma_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\eta+b_0(\theta,y_1)\eta^2\bigg)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}\times$$

$$\times\psi\left(\sigma_1'-B(t,\tau)\sigma_2;\ \sigma_1'';\ \sigma_2\right)\,(2\pi\delta(\eta))\,d\sigma\,d\eta,\quad t>\tau,\ \ x\in\mathrm{R}^n,\ \ x_{n+1}\in\mathbb{R},$$

де $\bar{\varsigma}_j:=\begin{cases}1,\ j\in\{1,...,n_2\},\\ 0,\ j\in\{n_2+1,...,n_1\},\end{cases}$ $\bar{\bar{\varsigma}}_j:=\begin{cases}0,\ j\in\{1,...,n_2\},\\ 1,\ j\in\{n_2+1,...,n_1\}.\end{cases}$

Зробивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\sigma_1'-B(t,\tau)\sigma_2=\mu_1',\quad \sigma_1''=\mu_1'',\quad \sigma_2=\mu_2,\qquad \eta=\nu,$$

змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$v(t,x,x_{n+1})=\int\limits_{\mathrm{R}^{n+1}} G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)\varphi(\xi)\,d\xi\,d\xi_{n+1},$$

$$t>0,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ x_{n+1}\in\mathbb{R},$$

де

$$G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)=(2\pi)^{-(n+1)}\int\limits_{\mathrm{R}^{n+1}}\exp\Bigg\{i((x_1-\xi_1,\mu_1)+$$

$$+(x_2+B(t,\tau)x_1'-\xi_2,\mu_2)+(x_{n+1}-\xi_{n+1},\nu))+$$

$$+\int\limits_\tau^t\bigg(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(\theta,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(\theta,y_1)\nu^2\bigg)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}\,d\mu\,d\nu=$$

$$=F^{-1}_{\substack{\mu\to X(B(t,\tau))-\xi\\ \nu\to x_{n+1}-\xi_{n+1}}}[V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)](t,\tau,x,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1),\tag{7}$$

а функція

$$V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)=\exp\Bigg\{\int\limits_\tau^t\bigg(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(\theta,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+$$

$$+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(\theta,y_1)\big([\mu_{1j}+B(\theta,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(\theta,y_1)\nu^2\bigg)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Bigg\}$$

є розв'язком задачі

$$\bigg[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t,y_1)\big([\mu_{1j}+B(t,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\big([\mu_{1s}+B(t,\tau)\mu_{2s}]\bar{\varsigma}_s+\mu_{1s}\bar{\bar{\varsigma}}_s\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1} b_j(t,y_1)\big([\mu_{1j}+B(t,\tau)\mu_{2j}]\bar{\varsigma}_j+\mu_{1j}\bar{\bar{\varsigma}}_j\big)\nu+b_0(t,y_1)\nu^2\Big)\bigg]V(t,\tau,\mu,\nu,y_1)=0,\tag{8}$$

$$V|_{t=\tau}=1.$$

В інтегралі (7) зробимо заміну змінних інтегрування за формулами

$$\mu_1 = (B(t,\tau))^{-1/2}\sigma_1,\ \mu_2 = (B(t,\tau))^{-3/2}\sigma_2,\ \nu = (B(t,\tau))^{-1/2}\eta,\ B(\theta,\tau) = B(t,\tau)\vartheta.$$

В результаті отримаємо рівність

$$G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1) = (B(t,\tau))^{-(n_1+3n_2+1)/2}\times$$
$$\times F^{-1}_{\substack{\sigma_1\to(B(t,\tau))^{-1/2}(x_1-\xi_1)\\ \sigma_2\to(B(t,\tau))^{-3/2}(x_2+(t-\tau)x_1'-\xi_2)\\ \eta\to(B(t,\tau))^{-1/2}(x_{n+1}-\xi_{n+1})}}[\hat V(t,\tau,\sigma,\eta,y_1)](t,\tau,z,z_{n+1},y_1)\Big|_{\substack{z=(X(B(t,\tau))-\xi)_{B(t,\tau)}\\ z_{n+1}=(B(t-\tau))^{-1/2}(x_{n+1}-\xi_{n+1})}}, \quad (9)$$

в якій $x_t = (t^{-1/2}x_1, t^{-3/2}x_2)$, і з урахуванням обмеженості коефіцієнтів b_{js}, b_j, $j \in \{1,\dots,n_1\}$, та b_0

$$|\hat V(t,\tau,\sigma,\eta,y_1)| \le \exp\Big\{\int\limits_0^1\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\big([\sigma_{1j}+\vartheta\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\sigma_{1s}+\vartheta\sigma_{2s}]\varsigma_s'+\sigma_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\big([\sigma_{1j}+\vartheta\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)\eta+\eta^2\Big)d\vartheta\Big\}.$$

Як в [1], отримується оцінка

$$|\hat V(t,\tau,\sigma+i\gamma,\eta,y_1)| \le C\exp\{-\delta_1|\sigma|^2+c_1|\gamma|^2-\delta|\eta|^2\},$$
$$0<\tau<t\le T,\ \ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

де $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$. Тому

$$|V(t,\tau,\sigma+i\gamma,\eta,y_1)| \le C\exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2+c_1|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_1|\sigma_2|^2+c_1|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3-$$
$$-\delta|\eta|^2B(t,\tau)\},\quad 0<\tau<t\le T,\ \ \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (10)$$

в якій $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$.

З (7) та (10) за умови $\mathbf{A}_1$ одержуємо, як в [1], оцінку

$$|\partial_x^k\partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}}G_0(t,x,\tau,\xi,x_{n+1}-\xi_{n+1},y_1)| \le C_{kk_{n+1}}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-|k_{n+1}|/2}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$
$$\times\exp\Big\{-c\frac{|x_{n+1}-\xi_{n+1}|^2}{B(t,\tau)}\Big\},\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{x_{n+1},\xi_{n+1}\}\subset\mathbb{R},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (11)$$

де

$$E_c(t,x,\xi) = \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{t}+\frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{t^3}\Big)\Big\},$$

а $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $k_{n+1}\in\mathbb{Z}_+^1$, $C_{kk_{n+1}}>0$, $c>0$ – деякі сталі, $M_{kl} := (|k_1|+|l_1|)m_1+(|k_2|+|l_2|)m_2$. При цьому, зокрема, похідна $\partial_x^kG_0(t,x,\tau,\xi,z,y_1)$, $z=z'+iz''\in\mathbb{C}$, як функція аргументу $(B(t,\tau))^{-1/2}z$ при фіксованих t,τ,x,ξ і y є цілою функцією, для якої справджуються оцінки

$$|\partial_x^kG_0(t,x,\tau,\xi,z,y_1)| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\Big\{-c\frac{|z'|^2}{B(t,\tau)}+c'\frac{|z''|^2}{B(t,\tau)}\Big\},$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{C},\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (12)$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$

Нехай $\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1) \equiv F_{z\to\nu}[G_0(t,x;\tau,\xi;z;y_1)]$. Тоді функція $\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\nu\in\mathbb{R}$, є ФРЗК для рівняння

$$\Big(\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\beta(t)\Big(\sum_{j,s=1}^{n_1}b_{js}(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}-\sum_{j=1}^{n_1}b_j(t,y_1)\partial_{x_{1j}}\nu- \\ -b_0(t,y_1)\nu^2\Big)\Big)\,\tilde{v}(t,x)=0, \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

для довільно фіксованих точок $\nu\in\mathbb{R}$ і $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$.

З оцінок (12) на підставі леми 1.1 з [4, с. 35] про перетворення Фур'є випливають такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;\nu;y_1)\right|\le C_k(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{-c\nu^2B(t,\tau)\}, \\ 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \nu\in\mathbb{R} \quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}. \tag{14}$$

Тепер, поклавши $\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\equiv\hat{G}_0(t,x;\tau,\xi;D(y_1);y_1)$, з оцінок (14) одержуємо

$$\left|\partial_x^k\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\right|\le C_k(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{-cB(t,\tau)(D(y_1))^2\}, \\ 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,\}\subset\mathbb{R}^n, \quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{15}$$

де $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $C_k>0$, $c>0$.

При цьому функція $\hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)=F^{-1}_{\sigma\to X(B(t,\tau))-\xi}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\xi,y_1)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, в якій $V_0(t,\tau,\sigma,y_1)=V(t,\tau,\sigma,D(y_1),y_1)$ згідно з (8) є розв'язком рівняння

$$\Big[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}a_{js}(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+B(t,\tau)\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\sigma_{1s}+B(t,\tau)\sigma_{2s}]\varsigma_s'+\sigma_{1s}\varsigma_s''\big)+ \\ +i\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,y_1)\big([\sigma_{1j}+B(t,\tau)\sigma_{2j}]\varsigma_j'+\sigma_{1j}\varsigma_j''\big)+a_0(t,y_1)\Big)\Big]V_0(t,\tau,\sigma,y_1)=0, \tag{16}$$

є ФРЗК для рівняння (1) для кожної фіксованої точки $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$.

Зазначимо, з (10) випливає оцінка

$$|V_0(t,\tau,\sigma+i\gamma,y_1)|\le C\exp\{(-\delta_1|\sigma_1|^2+c_1|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_1|\sigma_2|^2+c_1|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3- \\ -\delta(D(y_1))^2B(t,\tau)\}, \quad 0<\tau<t\le T, \ \{\sigma,\,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n, \ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{17}$$

де $C>0$, $\delta_1>0$, $c_1>0$, $\delta>0$.

3 Властивості ФРЗК для рівняння (1)

Оцінка (17) лежить в основі отримання повного аналітичного опису $\hat{G}$.

Наведемо деякі властивості ФРЗК для рівняння (1).

Властивість 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$. *Тоді справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k \partial_{y_1}^l \hat{G}(t,x;\tau,\xi;y_1)\right| \leq C(B(t,\tau))^{-(M+M_{k0}+|l|(1-\varepsilon)/2)} E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$
$$\times \exp\{-cB(t,\tau)(D(y_1))^2\},\ \ 0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ k\in\mathbb{Z}_+^n,\ |l|\leq 2. \quad (18)$$

Доведення. Оцінимо спочатку похідні від $\hat{G}$ за y_1. Згідно з вищевикладеним досить одержати оцінку $V_0(t,\tau,\varrho,y_1)$, $0\leq\tau<t\leq T$, $\varrho\in\mathbb{C}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$. Диференціюючи рівність (16) за y_{1j}, $j\in\{1,...,n_1\}$, одержуємо

$$\partial_{y_{1j}} V_0(t,\tau,\varrho,y_1) = \int\limits_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)\times$$
$$\times\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_{js}(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(\theta,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_j(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1j}}a_0(\theta,y_1)\Big)V_0(\theta,\tau,\varrho,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta.$$

Використавши умову $\mathbf{A}_2$, оцінку (17), нерівність

$$|r|^k\exp\{-c|r|^p\}\leq C_k\exp\{-c_0|r|^p\},\quad r\in\mathbb{R}, \quad (19)$$

в якій $k>0$, $p>0$, $c>0$, $0<c_0<c$, $C_k>0$, одержимо

$$\left|\partial_{y_{1j}}V_0(t,\tau;\varrho;y_1)\right|\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-$$
$$-\delta(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\Big((D(y_1))^{1-\varepsilon}+(D(y_1))^{2-\varepsilon}+(D(y_1))^{3-\varepsilon}\Big)B(t,\tau)\leq$$
$$\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-\delta^1(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\times$$
$$\times\Big(B(t,\tau)^{-(1-\varepsilon)/2}+B(t,\tau)^{-(2-\varepsilon)/2}+B(t,\tau)^{-(3-\varepsilon)/2}\Big)B(t,\tau)\leq$$
$$\leq C\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+c_4|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-\delta^1(D(y_1))^2B(t,\tau)\Big\}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(1-\varepsilon)/2},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n, \quad (20)$$

де $\delta_3>0$, $c_3>0$, $\delta_4>0$, $c_4>0$, $0<\delta^1<\delta$.

Диференціюючи рівність (16) за y_{1j} та y_{1k}, $\{j,k\}\subset\{1,...,n_1\}$, отримуємо

$$\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)=\int\limits_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)Q(\theta,\tau,\varrho,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta,$$

де

$$Q(t,\tau,\varrho,y_1)=$$
$$=\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1k}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(t,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$
$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1k}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1k}}a_0(t,y_1)\Big)\partial_{y_{1j}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)+$$

$$+\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(t,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{y_{1j}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial_{y_{1j}}a_0(t,y_1)\Big)\partial_{y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)+$$

$$+\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_{js}(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+(t-\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_j(t,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(t-\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}a_0(t,y_1)\Big)V_0(t,\tau,\varrho,y_1)/$$

За допомогою умови $\mathbf{A}_2$, оцінок (17), (20) та нерівності (19) одержуємо

$$\Big|\partial^2_{y_{1j}y_{1k}}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)\Big|\le C\exp\Big\{(-\delta_5|\sigma_1|^2+c_5|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_6|\sigma_2|^2+c_6|\gamma_2|^2)B(t,\tau)^3-$$

$$-\delta^1(D(y_1))^2(t-\tau)\Big\}(B(t,\tau))^{-2(1-\varepsilon)/2},\ 0\le\tau<t\le T,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n. \quad (21)$$

Оцінки (20) та (21) дозволяють одержати повний аналітичний опис для похідних за y_1 від функції $\hat G$, тобто похідних

$$\partial^l_{y_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)=B(t,\tau)^{-M}F^{-1}_{\sigma\to z}[\partial^l_{y_1}V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,z,y_1)\Big|_{z=(X(B(t,\tau))-\xi)_{B(t,\tau)}}$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.$$

□

Зауваження 1. З оцінок (18) випливають оцінки

$$\Big|\partial^{k_1}_{x_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;x_1)\Big|\le C(B(t,\tau))^{-(M+M_{k_10})}E_c(B(t,\tau),x,\xi)\times$$

$$\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(x_1))^2\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad |k_1|\le 2,$$

Властивість 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$. *Тоді справджуються оцінки*

$$\forall R>0\quad \exists C>0\quad \forall\{y_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\ |y_1-z_1|\le R:$$

$$|\Delta^{z_1}_{y_1}\partial^k_x\partial^l_{y_1}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\Big|\le C|y_1-z_1|^\lambda(B(t,\tau))^{-(M+M_{k0}+|l|(1-\varepsilon)/2)}E_c(B(t,\tau),x,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad k\in\mathbb{Z}^n_+,\quad |l|\le 2, \quad (22)$$

де $C>0$, $c>0$, $\lambda\in(0,1]$ *з умови* $\mathbf{A}_3$, $\varepsilon\in(0,1)$ *з умови* $\mathbf{A}_2$.

Доведення. Для отримання оцінки (22) досить одержати оцінку $|\Delta^{z_1}_{y_1}\partial^l_{y_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)|$, $\{y_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}$, $|y_1-z_1|\le R$, $0\le\tau<t\le T$, $\varrho\in\mathbb{C}^n$. Згідно з (16)

$$\Delta^{z_1}_{y_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)=\int_\tau^t V_0(t,\theta;\varrho;y_1)\times$$

$$\times\Big(-\sum_{j,s=1}^{n_1}\Delta^{z_1}_{y_1}a_{js}(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)\big([\varrho_{1s}+B(\theta,\tau)\varrho_{2s}]\varsigma_s'+\varrho_{1s}\varsigma_s''\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_1}^{z_1}a_j(\theta,y_1)\big([\varrho_{1j}+B(\theta,\tau)\varrho_{2j}]\varsigma_j'+\varrho_{1j}\varsigma_j''\big)+\Delta_{y_1}^{z_1}a_0(\theta,y_1)\Big)V_0(\theta,\tau,\varrho,z_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta.$$

Скориставшись умовою $\mathbf{A}_3$ та оцінкою (17), маємо

$$\left|\Delta_{y_1}^{z_1}V_0(t,\tau,\varrho,y_1)\right|\le C|y_1-z_1|^\lambda\exp\Big\{(-\delta_3|\sigma_1|^2+c_3|\gamma_1|^2)B(t,\tau)+(-\delta_4|\sigma_2|^2+$$
$$+c_4|\gamma_2|^2)(B(t,\tau))^3\Big\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{y_1,z_1\}\subset B_R,\quad \varrho\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n.$$

Аналогічно оцінюємо прирости похідних за y_1, використовуючи (18). □

Властивість 3. *Справджується рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=\exp\Big\{\int\limits_\tau^t a_0(\theta,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\},\ 0\le\tau<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.\quad (23)$$

Доведення. Маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=F^{-1}_{\sigma\to X(B(t,\tau))-\xi}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\xi,y_1).$$

Здійснивши заміну змінних інтегрування ξ за формулами $X(B(t,\tau))-\xi=\eta$, одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(F^{-1}_{\sigma\to\eta}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)]\Big)(t,\tau,x,\eta,y_1)\,d\eta=$$
$$=F_{\eta\to0}[F^{-1}_{\sigma\to\eta}[V_0(t,\tau,\sigma,y_1)](t,\tau,x,\eta,y_1)]=V_0(t,\tau,x,0,y_1)=\exp\Big\{\int\limits_\tau^t a_0(\theta,y_1)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\}.$$

□

Зауваження 2. З (23) випливає, що

1) для довільних $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$, $0\le\tau<t\le T$ і $x\in\mathbb{R}^n$, $y_1\in\mathbb{R}^{n_1}$

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=0;$$

2)

$$\lim_{t\to\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=1$$

рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$, а якщо $a_0=0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat G(t,x;\tau,\xi;y_1)\,d\xi=1,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_1\in\mathbb{R}^{n_1}.$$

В наступній властивості $z^{(1)}:=(z_1,x_2)$, $z^{(2)}:=(x_1,z_2)$, $\Delta_{x_s}^{z_s}f(\cdot,x,\cdot):=\Delta_x^{z^{(s)}}f(\cdot,x,\cdot)$, $s\in\{1,2\}$; $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n,|x|\le R\}$, $R>0$.

Властивість 4. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$*, а непрервна функція* $\varphi(t,x;\tau,\xi)$*,* $0 \le \tau < t \le T$*,* $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$*, задовольняє умови*

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-1+\varepsilon/2} E_c(B(t,\tau),x,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\forall R > 0 \quad \exists \lambda_1^s \in (0,1),\ \lambda_1^1 < \varepsilon,\ \lambda_1^2 < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \{x, z^{(s)}\} \subset B_R :$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \varphi(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\lambda_1^s} (B(t,\tau))^{-M-1+\lambda_2^s m_s} \Big(E_c(B(t,\tau),x,\xi) + E_c(B(t,\tau), z^{(s)}, \xi)\Big),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_2^1 \equiv \varepsilon - \lambda_1^1, \quad \lambda_2^2 \equiv \frac{\varepsilon}{3} - \lambda_1^2, \quad s \in \{1,2\}.$$

Тоді функція

$$w(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}(t,x;\theta,y,x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$*,* $|k_1| \le 2$*, и* Sw*, для яких правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}} w(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{x_{1j}x_{1l}} w(t,x;\tau,\xi) &= \int_\tau^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^2_{x_{1j}x_{1l}} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+ \\ &+ \int_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^2_{x_{1j}x_{1l}} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(B(t,\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+ \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial^2_{x_{1j}x_{1l}} \hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)dy\right)\varphi(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}Sw(t,x;\tau,\xi) &= \varphi(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+ \\ &+ \int_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)\Delta_y^{X(B(t,\theta))}\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+ \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} S\hat{G}(t,x;\theta,y;x_1)dy\right)\varphi(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\end{aligned} \tag{26}$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad B(t,t_1) = B(t,\tau)/2.$$

Доведення. Доведення (24) – (26) проводиться модифікацією доведень аналогічних властивостей для рівняння без виродження на початковій гіперплощині та рівнянь з [1], використовуючи властивості оцінних функцій E_c з [5]. $\square$

4 Висновки

Для виродженого параболічного рівняння другого порядку типу Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами, залежними від параметра $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, та з виродженням на початковій гіперплощині побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші. Аналогічні результати є правильними для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння з коефіцієнтами, залежними від t і параметра y, $y \in \mathbb{R}^n$.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження фундаментального розв'язу задачі Коші для рівняння з виродженням на початковій гіперплощині і зростаючими коефіцієнтами, залежними від змінної $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Список літератури

[1] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[2] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic Equations with degenerations on initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2016. **4** (3–4), 57–68. (in Ukrainian)

[3] Mtdynsky I. *Fundamental solutsons of Cauchy problem for degeneratt equations* Thesis for the degree of Doctor of Science (DSc) Lviv, 2021. (in Ukrainian)

[4] Eidelman S. D. Parabolic systems. Nauka, Moscow, 1964. (in Russian) English edition: North-Holland, Amsterdam, 1969.

[5] Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic kolmogorov-type equations with degeneration on the initial hyperplane.* Bukovinian. Mat. J. 2015. **3** (3-4), 41–51. (in Ukrainian)

Надійшло 15.12.2024

Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. *Fundamental solution of the Cauchy problem for an ultraparabolic equation with increasing coefficients depending on a parameter and with degeneration on the initial hyperplane*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 143–153.

For an ultraparabolic Kolmogorov type equation with parameter-dependent increasing coefficients and with degeneration on the initial hyperplane, a fundamental solution of the Cauchy problem is constructed and its properties are investigated. The coefficients of the equation are quite smooth, and their growth depends on the growth of some function. Such properties are important for constructing a fundamental solution of the Cauchy problem for an equation of Kolmogorov type with increasing coefficients depending on the variables of the main group.