Сергійко Д.М., Ратушняк С.П.

СИНГУЛЯРНІ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З МАРКОВСЬКИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

У статті вводиться в розгляд трисимвольне марковське зображення чисел, що грунтується на розкладі числа в ряд

$$x=\sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i+\sum_{k=1}^{\infty}\left(q_{\alpha_1}\sum_{i=0}^{\alpha_k-1} q_{\alpha_k i}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\right)=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k\in A=\{0,1,2\},$$

де $\|q_{ij}\|$ — додатня стохастична матриця (матриця перехідних ймовірностей), $(q_0;q_1;q_2)$ — додатний стохастичний вектор. Дане зображення є узагальненням класичного трійкового зображення чисел і співпадає з ним при $q_i=\frac{1}{3}=q_{ij}$ $\forall i,j\in A$. Описано тополого-метричні властивості циліндрів марковського зображення, зокрема виписано основне метричне відношення довжин циліндрів попереднього і наступного рангів. Введено поняття марковсько-нормального числа і доведено, що множина чисел, асимптотична частота кожної цифри i яких відповідно рівна $\sum\limits_{i\in A} q_j q_{ji}$, $i,j\in A$, має повну міру Лебега.

Введена в розгляд функція (інверсор цифр), означена рівністю

$$I(x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Доведено, що функція I є неперервною строго спадною функцією на відрізку $[0;1]$. На основі поняття циліндричної похідної знайдено вираз похідної функції I в точці. Використовуючи нормальну властивість числа за його марковським зображенням і отриманий вираз похідної знайдено умови, рівності похідної нулю майже в кожній точці одничного відрізка у розумінні міри Лебега, тобто умови сингулярності функції I.

Ключові слова і фрази: сингулярна функція, нормальна властивість числа, марковське зображення дійсних чисел, інверсор цифр зображення.

Dragomanov Ukrainian State University, Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine
e-mail: *21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua, ratush404@gmail.com*

Вступ

Неперервна строго зростаюча функція розподілу випадкової величини, цифри трійкового зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю, індукує

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A30.

нову систему кодування дробової частини дійсного числа (марковське трисимвольне зображення) [5]. Це є аналогом відомого двосимвольного марковського зображення, що вивчалось у роботах [1, 2], яке заслуговувало на окрему увагу в силу мінімальності алфавіту. Геометрія цього зображення чисел, породжена залежністю цифр, продукує складніші тополого-метричні властивості множин різного роду особливостей функцій, визначених автоматами зі скінченною пам'яттю у просторах марковських зображень.

Стаття присвячена одній сингулярній функції (неперервній функції, відмінній від константи, похідна якої дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), означеній в термінах марковського зображення чисел. Розглядувана функція відноситься до класу "інверсорів цифр прикладами таких є інверсор цифр Q_2-зображення чисел [6], інверсор цифр Q_2^*-зображення [3], інверсор цифр Q_3-зображення чисел [7] тощо. Для доведення сингулярності інверсора цифр поглиблюється ергодична теорії марковського зображення чисел, а саме вводиться марковсько-нормальна властивість числа.

1 Марковське трисимвольне зображення дійсних чисел

Нехай $A \equiv \{0, 1, 2\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту, q_0, q_1, q_2 – фіксований набір додатних чисел такий, що $\sum\limits_{i=0}^{2} q_i = 1$, $\|q_{ij}\|$ — стохастична матриця 3-го порядку $(\sum\limits_{j=0}^{2} q_{ij} = 1, \forall i \in A, q_{ij} > 0)$.

Теорема 1. *Для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує $(\alpha_n) \in L$ така, що має місце рівність*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}, \tag{1}$$

де $\beta_{\alpha_1} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_1 - 1} q_i, \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_{\alpha_k i}$.

Доведення. Доведемо існування розкладу для довільного числа $x \in [0; 1]$. Зазначимо, що має місце рівність $x \in [0; 1] = [\beta_0; \beta_1] \cup [\beta_1; \beta_2] \cup [\beta_2; \beta_3] = \bigcup_{i=0}^{2} [\beta_i; \beta_{i+1}]$. Тоді існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $x \in [\beta_{\alpha_1}; \beta_{\alpha_1+1}]$, тобто

$$\beta_{\alpha_1} \leq x < \beta_{\alpha_1+1}, 0 \leq x - \beta_{\alpha_1} \equiv x_1 < \beta_{\alpha_1+1} - \beta_{\alpha_1} = q_{\alpha_1} \Rightarrow x = \beta_{\alpha_1} + x_1.$$

Якщо $x_1 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_1(0)}$. Тобто $\alpha_n = 0 \; \forall n > 1$.

Якщо $x_1 > 0$, то можна знову запустити аналогічний процес:

$$x_1 \in [0; q_{\alpha_1}) = \bigcup_{i=0}^{2} [\beta_{\alpha_1 i}; \beta_{\alpha_1 (i+1)},$$

то існує $\alpha_2 \in A$ таке, що

$$\beta_{\alpha_1 \alpha_2} q_{\alpha_1} \leq x_1 < \beta_{\alpha_1(\alpha_2+1)} q_{\alpha_1},$$

тобто

$$0 \leq (x_1 - \beta_{\alpha_1\alpha_2}q_{\alpha_1}) \equiv x_2 < q_{\alpha_1}(\beta_{\alpha_1(\alpha_2+1)} - \beta_{\alpha_1\alpha_2})$$

$$0 \leq x_2 < q_{\alpha_1}q_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Отже, $x_1 = \beta_{\alpha_1\alpha_2}q_{\alpha_1} + x_2$, а $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2}q_{\alpha_1} + x_2$.

Якщо $x_2 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2}q_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2(0)} \forall n > 2$.

Продовжуючи цей процес, знайдемо числа α_3, α_4, ..., α_n і x_3, x_4, ..., x_n, такі, що

$$0 \leq x_{n-1} - \beta_{\alpha_{n-1}\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_1\alpha_2}...q_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}} = x_n \text{ і}$$

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2}q_{\alpha_1} + ... + \beta_{\alpha_{n-1}\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_1\alpha_2}...q_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}} + x_n.$$

Аналогічно, записуємо, що оскільки

$$x_n \in [0; q_{\alpha_1}\prod_{k=1}^{n-1} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}}) = \bigcup_{i=0}^{2}[\beta_{\alpha_n i}; \beta_{\alpha_n(i+1)}),$$

то існує $\alpha_{n+1} \in A$, таке, що

$$0 \leq x_n - \beta_{\alpha_n\alpha_{n+1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_1\alpha_2}...q_{\alpha_{n-1}\alpha_n} \equiv x_{n+1} < q_{\alpha_1}q_{\alpha_1\alpha_2}...q_{\alpha_{k-1}\alpha_k}q_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1}\prod_{k=1}^{n} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}}.$$

Цей процес є нескінченним, але збіжним, оскільки $x_{n+1} < (\max\{q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11}\})^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, розклад числа x в ряд (1) існує, що й доводить теорему. □

Запис числа x у формі ряду (1) називається *марковським представленням* цього числа, а формальний запис $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ – його *марковським зображенням*, елемент α_n називають n-ою цифрою (символом) марковського зображення числа x.

Існують числа, що мають два зображення. Це числа виду:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}i(2)} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[i+1](0)}, i \in \{0, 1\}.$$

Їх називатимемо *марковсько-бінарними.* Решта чисел мають єдине зображення, їх називатимемо *марковсько-унарними.*

2 Геометрія марковського зображення чисел

Під геометрією марковського зображення чисел ми розуміємо геометричний зміст цифр, метричні співвідношення та геометричні властивості множин чисел (фігур), що мають на фіксованих місцях задані марковські цифри. Такими множинами є циліндри, напівциліндри, хвостові множини тощо [4].

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, ..., c_n)$ – фіксований впорядкований набір цифр алфавіту A. Циліндром рангу n з основою $(c_1c_2...c_n)$ називається множина $\Delta_{c_1c_2...c_n}$ всіх чисел $x \in [0; 1]$, які мають наступне марковське зображення $x = \Delta_{c_1c_2...c_n\alpha_{n+1}...\alpha_{n+m}...}, \alpha_{n+i} \in A$.*

Циліндр $\Delta_{c_1...c_n}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1...c_n(0)}$ і $b = \Delta_{c_1...c_n(2)}$, тобто $\Delta_{c_1...c_n} = [a;b]$. Його внутрішність будемо позначати через $\nabla_{c_1...c_n}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\nabla_{\alpha_1...\alpha_n} = int\Delta_{c_1...c_n} = (a,b)$.

Вивчимо властивості циліндрів.

Властивість 1. *Для довільного* $(c_1,...,c_n) \in A^n$ *має місце рівність*

$$\Delta_{c_1...c_n} = \Delta_{c_1...c_n0} \cup \Delta_{c_1...c_n1} \cup \Delta_{c_1...c_n2}.$$

Випливає безпосередньо з означення циліндра.

Властивість 2. $\forall i = \overline{0,1}$ *виконуються рівності:*

$$\max \Delta_{c_1...c_ni} = \min \Delta_{c_1...c_n(i+1)},\ \max \Delta_{c_1...c_n2} = \max \Delta_{c_1...c_n},\ \min \Delta_{c_1...c_n0} = \max \Delta_{c_1...c_n}.$$

Властивість 3. *Основне метричне відношення обчислюється за формулою:*

$$\frac{|\Delta_{c_1...c_nij}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = q_{ij},\ \text{де } i,j \in A.$$

З властивості 1 для циліндрів (n+1)-го рангу маємо:

$$\Delta_{c_1...c_ni} = \Delta_{c_1...c_ni0} \cup \Delta_{c_1...c_ni1} \cup \Delta_{c_1...c_ni2}, i \in A.$$

З врахуванням властивості 2, перепишемо останню рівність у вигляді:

$$|\Delta_{c_1...c_ni}| = |\Delta_{c_1...c_ni0}| + |\Delta_{c_1...c_ni1}| + |\Delta_{c_1...c_ni2}|,$$

$$1 = \frac{|\Delta_{c_1...c_ni}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = \frac{|\Delta_{c_1...c_ni0}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} + \frac{|\Delta_{c_1...c_ni1}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} + \frac{|\Delta_{c_1...c_ni2}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|}.$$

Тоді

$$\frac{|\Delta_{c_1...c_ni2}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i0} - q_{i1} = q_{i2},\ \frac{|\Delta_{c_1...c_ni1}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i0} - q_{i2} = q_{i1},\ \frac{|\Delta_{c_1...c_ni0}|}{|\Delta_{c_1...c_ni}|} = 1 - q_{i1} - q_{i2} = q_{i0}.$$

Властивість 4. *Довжина циліндра* $\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}$ *обчислюється за формулою*

$$|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| = q_{\alpha_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}.$$

З властивості 3 циліндрів n-го рангу маємо:

$$|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| = q_{\alpha_{[n-1]}\alpha_n} |\Delta_{\alpha_1...\alpha_{[n-2]}\alpha_{[n-1]}}| = ... = q_{\alpha_{[n-1]}\alpha_n} q_{\alpha_{[n-2}\alpha_{[n-1]}} ... q_{\alpha_2\alpha_3} q_{\alpha_1\alpha_2} |\Delta_{\alpha_1}| =$$
$$= q_{\alpha_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}.$$

Властивість 4. *Для довільної послідовності* $(\alpha_n) \in L$: $|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$. Випливає з того, що $|\Delta_{\alpha_1...\alpha_n}| \leq (\max_{i\in A} q_i)(\max_{i,j\in A}\{q_{ij}\})^{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Властивість 5. *Циліндри одного рангу не перетинаються або збігаються (рівні), причому* $\Delta_{c_1c_2...c_n} = \Delta_{c'_1c'_2...c'_n} \Leftrightarrow c_i = c'_i, i = \overline{1,m}$.

Властивість 6. *Для довільної послідовності* $(c_n) \in L$, *існує єдина точка* $x \in [0;1]$, *така, що належить всім циліндрам послідовності, тобто* $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2...c_n} = \Delta_{c_1c_2...c_n...}$.

3 Марковсько-нормальні властивості числа

Нехай $N_i(x,k)$ – кількість цифр i в марковському зображенні числа x до k-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує) $\nu_i(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ називається частотою (асимптотичною частотою) цифри i в марковському зображенні числа x.

Лема 1. *Якщо в марковському зображенні числа x існують $\nu_{i_1}(x)$ і $\nu_{i_2}(x)$, де $i_1 \neq i_2$ та $i_1, i_2 \in \{0,1,2\}$ то існує $\nu_{3-i_1-i_2}(x)$.*

Доведення. Згідно означення з введених позначень можемо записати:

$$N_0(x,k) + N_1(x,k) + N_2(x,k) = k,$$

тоді

$$\frac{N_0(x,k)}{k} + \frac{N_2(x,k)}{k} + \frac{N_2(x,k)}{k} = 1.$$

Тоді, якщо існують границі $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_{i_1}(x,k)}{k}$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_{i_2}(x,k)}{k}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{i_1}(x,k)}{k} + \lim_{k\to\infty} \frac{N_{i_1}(x,k)}{k} = \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{N_{3-i_1-i_2}(x,k)}{k}),$$

тобто

$$\nu_{i_1}(x) + \nu_{i_2}(x) = 1 - \nu_{3-i_1-i_2}(x).$$ □

Означення 2. *Число $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називається марковсько-нормальним, якщо для його частот справджуються рівності*

$$\nu_j = \sum_{i\in A} q_i q_{ij}, \ \forall i,j \in A. \tag{2}$$

Теорема 2. *Міра Лебега множини всіх марковсько-нормальних чисел відрізка $[0;1]$ дорівнює 1.*

Доведення. Доведемо, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел x одиничного відрізка виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_j(x,k)}{k} = \sum_{i\in A} q_i q_{ij}, \quad \forall j \in A.$$

Розглянемо функцію $f(x)$, таку що

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \alpha_1 q'_{1-\alpha_1} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha_n q'_{1-\alpha_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} q'_{\alpha_k}$ — Q_3-зображення чисел з параметрами $q'_0 = q_0q_{00} + q_1q_{10} + q_2q_{20}$, $q'_1 = q_0q_{01} + q_1q_{11} + q_2q_{21}$, $q'_2 = q_0q_{02} + q_1q_{12} + q_2q_{22}$.

Відомо [7], що міра Лебега тих чисел $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$, для частот яких мають місце рівності $\nu_0(x) = q_0$, $\nu_1(x) = q_1$, $\nu_2(x) = q_2$, є повною, а тому властивість числа мати частоти цифр 0, 1, 2 відповідно рівними q_0, q_1, q_2 є нормальною.

Оскільки функція f є проєктором цифр двох топологічно еквівалентних зображень (трисимвольного марковського зображення в Q_3-зображення чисел), а тому є бієкцією $[0;1]$ в $[0;1]$, то

$$\nu_i(y) = \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(y,n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,n)}{n} = q'_i, i = \{0,1,2\}.$$

Отже, множина тих чисел, які в марковському трисимвольному зображенні мають частоти цифр відповідно рівні q'_0, q'_1, q'_2, є множиною повної міри. □

Введемо такі фіксовані частоти для пари цифр (ij), $\forall i,j \in A$. Нехай $N_{ij}(x,n)$ – кількість тих $k \le n$ для яких $\alpha_k(x) = i$ і $\alpha_{k+1}(x) = j$ в марковському зображенні числа x до n-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує) $\nu_{ij}(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_{ij}(x,n)}{n}$ називається *частотою пари* (i,j) в марковському зображенні числа x.

Означення 3. *Число $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, для частот пар цифр якого справджуються рівності*

$$\nu_j(x) = \nu_{0j} + \nu_{1j} + \nu_{2j} = q_0q_{0j} + q_1q_{1j} + q_2q_{2j}, \text{ де } \nu_{ij} = q_iq_{ij}, (i,j) \in A,$$

називається марковсько-нормальним.

4 Інверсор цифр марковського зображення

Розглядається функція (інверсор цифр), означена рівністю:

$$I(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Очевидно, що означення функції I є коректним на множині чисел, що мають два формально різних зображення: $I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}) = I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)})$.

Теорема 3. *Функція I є неперервною строго спадною функцією на відрізку* $[0;1]$.

Доведення. Неперервність функції I у множині марковсько-бінарних точках є наслідком коректності її означення. Покажемо неперервність функції у множині марковсько-унарних точках, тобто що виконується рівність $\lim\limits_{x'\to x}|I(x') - I(x)| = 0$, де x – марковсько-унарне число. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots}$, $x' = \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots}$. Умова $x' \to x$ рівносильна тому, що $m \to \infty$, де $\alpha_m(x) \neq c_m(x')$, але $a_j(x) = c_j(x')$ при $j < m$. Нехай $a_m = 1$ та $c'_m \neq 1$ – m-ті цифри марковського числа відповідно для $I(x)$ та $I(x')$. Тоді

$$\lim_{x'\to x}|I(x') - I(x)| = \lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{m-1} q_{[2-\alpha_{j-1}][2-\alpha_j]} \cdot |A| = 0,$$

$A \equiv \beta_{[2-c_m][2-c_{m+1}]} - \beta_{1[2-\alpha_{m+1}]} + \beta_{[2-c_{m+1}][2-c_{m+2}]}q_{[2-c_m][2-c_{m+1}]} - \beta_{[2-\alpha_{m+1}][2-\alpha_{m+2}]}q_{1[2-\alpha_{m+1}]} + \ldots$.

Отже, $I(x)$ неперервна в усіх точках відрізка $[0;1]$. Тепер доведемо, що інверсор є спадною функцією на відрізку $[0;1]$. Розглянемо x_1 і x_2 такі, що $x_1 = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\ldots} <$

$x_2 = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha'_n \ldots}$, причому $\alpha_n < \alpha'_n$, тоді $2-\alpha_n > 2-\alpha'_n$ і

$$\begin{aligned} I(x_1) - I(x_2) &= \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha_n]\ldots} - \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha'_n]\ldots} = \\ &= \left(\beta_{[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha_n]} - \beta_{[2-\alpha_{n-1}][2-\alpha'_n]}\right) \prod_{j=1}^{n-2} q_{[2-\alpha_j][2-\alpha_{j+1}]} + \\ &+ \left(\beta_{[2-\alpha_n][2-\alpha_{n+1}]} - \beta_{[2-\alpha'_n][2-\alpha'_{n+1}]}\right) \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-\alpha_j][2-\alpha_{j+1}]} + \ldots > 0. \end{aligned}$$

Тому $I(x_1) > I(x_2)$ при $x_1 < x_2$, тобто функція I є монотонно спадною на $[0;1]$. □

Теорема 4. *Якщо $I'(x)$ існує, то*

$$I'(x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\left|I(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = -\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i,j\in A} \left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n) - N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}.$$

Доведення. Оскільки функція I є монотонною на $[0;1]$, то згідно з теоремою Лебега вона має скінченну похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега. Скористаємось циліндричною похідною. Тоді

$$\begin{aligned} &-I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|I(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)})\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\Delta_{[2-\alpha_1(x)][2-\alpha_2(x)]\ldots[2-\alpha_n(x)]}\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]} \prod_{i=1}^{n-1} q_{[2-\alpha_i][2-\alpha_{i+1}]}}{q_{\alpha_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i\alpha_{i+1}}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \cdot \frac{q_{00}^{N_{22}(x,n)} q_{01}^{N_{21}(x,n)} q_{02}^{N_{20}(x,n)} q_{10}^{N_{12}(x,n)} q_{11}^{N_{11}(x,n)} q_{12}^{N_{10}(x,n)} q_{20}^{N_{02}(x,n)} q_{21}^{N_{01}(x,n)} q_{22}^{N_{00}(x,n)}}{q_{00}^{N_{00}(x,n)} q_{01}^{N_{01}(x,n)} q_{02}^{N_{02}(x,n)} q_{10}^{N_{10}(x,n)} q_{11}^{N_{11}(x,n)} q_{12}^{N_{12}(x,n)} q_{20}^{N_{20}(x,n)} q_{21}^{N_{21}(x,n)} q_{22}^{N_{22}(x,n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \cdot \frac{q_{00}^{N_{22}(x,n)-N_{00}(x,n)} q_{01}^{N_{21}(x,n)-N_{01}(x,n)} q_{02}^{N_{20}(x,n)-N_{02}(x,n)} q_{10}^{N_{12}(x,n)-N_{10}(x,n)}}{q_{12}^{N_{12}(x,n)-N_{10}(x,n)} q_{20}^{N_{20}(x,n)-N_{02}(x,n)} q_{21}^{N_{21}(x,n)-N_{01}(x,n)} q_{22}^{N_{22}(x,n)-N_{00}(x,n)}} = \\ &= \frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i,j\in A} \left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n) - N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}. \end{aligned}$$ □

Теорема 5. *Якщо принаймні для однієї з пар $q_{00} \neq q_{22}$, $q_{01} \neq q_{21}$, $q_{02} \neq q_{20}$ або $q_{10} \neq q_{12}$, то інверсор I є сингулярною функцією (тобто неперервною функцією похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Доведення. Нехай W – множина точок, для яких існує похідна скінченна $I'(x)$, а B – множина марковсько-нормальних чисел. Оскільки міри Лебега $\lambda(W) = \lambda(B) = 1$, то $\lambda(W \cap B) = 1$. Покажемо, що $I'(x) = 0$ для будь-якого $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in W \cap B$. Оскільки $x \in B$, то

$$\nu_{ij}(x) = q_i q_{ij}, \quad i,j \in A.$$

Взявши до уваги теорему 4, обчислимо похідну

$$-I'(x)=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\lim_{n\to\infty}\prod_{i,j\in A}\left(\frac{q_{[2-i][2-j]}}{q_{ij}}\right)^{\frac{N_{ij}(x,n)-N_{[2-i][2-j]}(x,n)}{n}}=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{\frac{N_{22}(x,n)}{n}-\frac{N_{00}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{\frac{N_{21}(x,n)}{n}-\frac{N_{01}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{\frac{N_{20}(x,n)}{n}-\frac{N_{02}(x,n)}{n}}\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{\frac{N_{12}(x,n)}{n}-\frac{N_{10}(x,n)}{n}}\right)^n$$

$$=\frac{q_{[2-\alpha_1]}}{q_{\alpha_1}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}\right)^n.$$

Оцінимо значення виразу $\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}$:

- якщо $q_{00}<q_{22}$, $q_{01}<q_{21}$, $q_{02}<q_{20}$, $q_{10}<q_{12}$, то

$$\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо хоча б одна з умов $q_{00}<q_{22}$, $q_{01}<q_{21}$, $q_{02}<q_{20}$ порушується (не порушуючи загальності, припустимо, що $q_{00}>q_{22}$), але $q_{10}<q_{12}$ та $q_2<q_0$, то

$$\frac{q_{00}}{q_{22}}>1,\frac{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_2q_{22}}}{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_0q_{00}}}<1,\frac{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо ж усі умови попереднього випадку зберігаються, але $q_2>q_0$, то

$$\frac{q_{00}}{q_{22}}>1,\frac{q_2}{q_0}<1,\frac{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1.$$

  Цей випадок аналогічним чином працює і для інших пар з умов

$$q_{00}<q_{22},q_{01}<q_{21},q_{02}<q_{20};$$

- якщо ж порушуються кілька або всі зразу умови $q_{00}<q_{22},q_{01}<q_{21},q_{02}<q_{20}$, але $q_{10}<q_{12}$, то аналогічним до попередніх двох випадків чином можна показати, що

$$\frac{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_2q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_2q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_2q_{20}}}{\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_0q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_0q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_0q_{02}}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1;$$

- якщо ж $q_{10}>q_{12}$, то $q_1(q_{12}-q_{10})<0$, то $\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}<1$.

Тоді маємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{22}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{21}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{20}}\right)^{q_2}}{\left(\left(\frac{q_{00}}{q_{22}}\right)^{q_{00}}\left(\frac{q_{01}}{q_{21}}\right)^{q_{01}}\left(\frac{q_{02}}{q_{20}}\right)^{q_{02}}\right)^{q_0}}\cdot\left(\frac{q_{10}}{q_{12}}\right)^{q_1(q_{12}-q_{10})}\right)^n=0.$$

А тому $I'(x)=0$ для точок множини $W\cap B$. Отже, похідна функції I на відрізку $[0;1]$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тобто функція є сингулярною. Теорему доведено. $\square$

Список літератури

[1] Markitan V.P. *Fractal properties of sets and functions related to the Markov representation of real numbers defined by a double stochastic matrix* // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, 14(4), 34-48.

[2] Pratsiovytyi O.M. *On a specific method of encoding real numbers and its applications* // Students' physical and mathematical sketches, 2008, 3, 57-67.

[3] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^*-representative*, Mat. Stud. 2021, 55, .37–43.

[4] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to investigation of singular probability distributions, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 1998 (in Ukrainian).

[5] Pratsiovytyi M.V. *Singular and fractal properties of distributions of random variables digits of polybasic representations of which a form homogeneous Markov chain*, Ukr.Math.J., 2000, 52(3), (2000), 368-374.

[6] Pratsiovytyi M.V., Skrypnyk S.V. *Q_2-representation of fraction part of real number and inversor of its digits* Nauk. Chas. Nats. Ped. Univ. im. Drahomanova, Ser. Fiz.-Mat. Nauk 2013, **15**, 134–143. (in Ukrainian)

[7] Zamrii I.V., Prats'ovytyi M.V., Singularity of the digit inversor for the Q_3-representation of the fractional part of a real number, its fractal and integral properties, Journal of Mathematical Sciences, 2016, 215(3), 323–340.

Надійшло 08.12.2024

Serhiiko D.M., Ratushniak S.P. *Singular function related with Markov representation of numbers*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 211–219.

In this article, we introduce the three-symbol Markov representation of numbers, based on the decomposition of a number into the series

$$x = \sum_{i=0}^{\alpha_1 - 1} q_i + \sum_{k=1}^{\infty}\left(q_{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} q_{\alpha_k i} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\right) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in A = \{0, 1, 2\},$$

where $\|q_{ij}\|$ is a positive stochastic matrix (transition probability matrix), and $(q_0; q_1; q_2)$ is a positive stochastic vector. This representation corresponds to thee classical ternary representation of numbers and coincides with it if $q_i = \frac{1}{3} = q_{ij}\ \forall i, j \in A$. The topological and metric properties of the cylinders in this Markov representation are described. In particular, the basic metric ratio between the lengths of cylinders of the successive ranks is derived. Moreover, the concept of a Markov-normal number is introduced, and it is proved that the set of numbers for which the asymptotic frequency of each digit i equals to $\sum\limits_{i \in A} q_j q_{ji}$, $i, j \in A$, has full Lebesgue measure. The function (inversor of numbers) is introduced and defined by the equality

$$I(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

It is proved that the function I is a continuous, strictly decreasing function on the interval $[0; 1]$. An expression for the derivative of the function I at a point is foud based on the concept of a cylindric derivate. Using the normal property of a number in its Markov representation and the obtained expression for the derivative, conditions for the derivative to be zero at almost every point of the unit interval in the sense of the Lebesgue measure are established. Therefore, the conditions for the singularity of the function I are determined.