Лисенко І.М., Працьовитий О.М., Плакида В.І.

НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕНІ В ТЕРМІНАХ ДВОСИМВОЛЬНОГО G₂-ЗОБРАЖЕННЯ З ДВОМА РІЗНОЗНАКОВИМИ ОСНОВАМИ

У роботі розглядаються неперервні функції, визначені на відрізку, аргумент і значення яких подається зображенням (G_2-зображення) у системі кодування з двома різнознаковими основами $g_0 \in [0,5;1)$ і $g_1 = g_0 - 1$ та двосимвольним алфавітом $A = \{0;1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Серед них функції трьох класів. Перший клас представляють функції, означені рівністю:

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots},$$

де (r_n) – задана послідовність функцій $r_n : A \to A$. Доведено, що в цьому класі крім констант, тотожного перетворення відрізка, і функції:

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

інших неперервних функцій немає. Другий клас представляють функції:

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}, \text{ де } d : A \times A \to A.$$

Доведено, що в цьому класі існує лише чотири неперервні функції: дві сталі, тотожне перетворення відрізка і оператор лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення чисел. Третій клас представляють неперервні строго зростаючі сингулярні функції (їх похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), означенні системою функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} f(g_0 x) = q_0 f(x), \\ f(g_0 + (g_0-1)x) = q_0 + (q_0-1)f(x), \end{cases} \quad q_0 \in [0,5;1), q_1 = q_0 - 1.$$

Графіки функцій останнього класу є самоафінними, тобто структурно фрактальними. Знайдено вираз визначенного інтеграла по області визначення для функцій цього класу.

Ключові слова і фрази: G_2-зображення чисел, оператор лівостороннього зсуву цифр, проєктор одного зображення в інше, сингулярна функція, циліндр, неперервна ніде не монотонна функція, множина рівня функції, функція необмеженої варіації.

Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *i.m.lysenko@udu.edu.ua, alexandr.pratsiovytyi@gmail.com, plakyda1@gmail.com*

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80,26A27, 26A30.
Information on some grant ...

Вступ

Для аналітичного дослідження функцій зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями все частіше використовуються різні системи кодування дійсних чисел [3, 8, 12, 13, 14, 15]. В першу чергу, сказане стосується неперервних локально складних функцій: сингулярних [13], ніде не монотонних та ніде не диференційовних [3, 6], а також функцій, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості, функцій з структурно та метрично фрактальними властивостями [3, 5, 7]. Теорія таких функцій перебуває на конструктивному етапі розвитку і збагачується в основному за рахунок індивідуальних теорій яскравих представників вказаних класів [3, 5, 10].

Нагадаємо, що кодуванням дійсних чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення g простору L послідовностей елементів алфавіту на множину D. При цьому послідовність (α_n) така, що $g[(\alpha_n)] = x \in D$ називається g-зображенням числа x. Це записується $x = \Delta^g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$.

Нагадаємо [4], що двосимвольне G_2-зображення дійсних чисел відрізка $[0; g_0]$ визначається алфавітом $A = \{0, 1\}$ і двома різнознаковими основами $g_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$ та $g_1 \equiv g_0 - 1$:

$$[0; g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $(\alpha_n) \in L \equiv A \times A \times \ldots$. Після введення скорочення $\delta_{\alpha_k} \equiv \alpha_k g_{1-\alpha_k}$, G_2-зображення $\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x$ числа x має таке змістовне його подання рядом:

$$x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}. \tag{2}$$

Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то воно набуває вигляду знакопочережного двійкового представллння:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k-1}}}{2^k} \equiv \Delta^{G_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

G_2-зображення на відміну від інших двосимвольних кодувань дійсних чисел має ряд унікальних властивостей [4, 8, 9, 10, 14]:

1) оператор лівостороннього зсуву $\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{x}{g_{\alpha_1(x)}} - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$ є неперервною функцією;

2) інверсор G_2-зображення $I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ має зліченну всюди щільну в $[0; g_0]$ множину точок розриву;

3) всі G_2-бінарні числа (числа, що мають два зображення) належать одній хвостовій множині (їх зображення мають період (0)): $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}11(0)}$.

Основна мета даної роботи полягає в тому, щоб оцінити потенціал G_2-зображення дійсних чисел для ефективного задання та дослідження неперервних функцій, зокрема локально складних (сингулярних).

Теорема 1. *Функція f, означена рівністю*

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{3}$$

1) є коректно означеною;

2) неперервною кусково-лінійною функцією, яка має аналітичне задання:

$$f(x) = \frac{g_{1-\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}x + \frac{g_{\alpha_1(x)}\delta_{1-\alpha_1(x)} - g_{1-\alpha_1(x)}\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}};$$

3) строго спадною функцією, яка зберігає хвости G_2-зображення чисел.

Доведення. 1. Втрата коректності означення функції потенційно могла б трапитись у G_2-бінарних точках. Але користуючись формулою (3), маємо

$$f(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m01(0)}) = \Delta^{G_2}_{[1-c_1]c_2\ldots c_m01(0)} = \Delta^{G_2}_{[1-c_2]c_2\ldots c_m11(0)} = f(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m11(0)}),$$

зокрема

$$f(\Delta^{G_2}_{01(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = f(\Delta^{G_2}_{11(0)}).$$

Отже, означення функції f рівністю (3) є коректним.

2. Неперервність функції f власне рівносильна коректності означення функції у G_2-бінарних точках. Незважаючи на це, дамо незалежне доведення неперервності функції, знайшовши її аналітичний вираз. Оскільки

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \delta_{1-\alpha_1} + g_{1-\alpha_1}(\delta_{\alpha_2} + \delta_{\alpha_3}g_{\alpha_2} + \ldots) = \delta_{1-\alpha_1} + g_{1-\alpha_1}\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}),$$

де $\omega(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \frac{x}{g_{\alpha_1(x)}} - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$, то

$$f(x) = \frac{g_{1-\alpha_1}}{g_{\alpha_1}}x + \delta_{1-\alpha_1} - \frac{g_{1-\alpha_1}\delta_{\alpha_1}}{g_{\alpha_1}} = \begin{cases} \frac{g_1}{g_0}x + g_0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0 \\ \frac{g_0}{g_1}x - \frac{g_0^2}{g_1}, & \text{якщо } \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Тому функція f є кусково-лінійною, куски графіка якої сходяться в точці $x = g_0^2 = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)}$.

Отже, функція f неперервна на всій області визначення.

3. Враховуючи аналітичний вираз функція f і те, що числа $\frac{g_1}{g_0}$ і $\frac{g_0}{g_1}$ є від'ємними, бачимо, що f є строго спадною функцією. Те, що хвости у аргумента і значення функції збігаються очевидно з означення функції: $\alpha_n(x) = \alpha_{n-1}(f(x))$. Отже, функція зберігає хвости зображення чисел. □

Теорема 2. *У класі функцій, означених рівністю*

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots}, \tag{4}$$

де (r_n) – послідовність функцій, визначених на множині $A = \{0,1\}$, $r_n(\alpha_n) \in A$, лише чотири функції $\varphi(x) = const$, $\tau(x) = x$ і функція f, означена рівністю (3), є неперервними.

Доведення. Існує лише чотири функції $r : A \to A$. Це $r_n(\alpha) = 0$, $r_n(\alpha) = 1$, $r_n(\alpha) = \alpha$, $r_n(\alpha) = 1-\alpha$. Якщо $r_n(\alpha) = i$ для всіх $n \in N$, то $\varphi(x) = \Delta^{G_2}_{(i)} = const$. Якщо $r_n(\alpha) = 1-\alpha$ для всіх $n \in N$, то $\varphi(x)$ є інверсором – функцією, що має зліченну множину точок розриву. Нехай $r_m(\alpha_m) = 1 - \alpha_m$ для деякого $m > 1$. Розглянемо G_2-бінарну точку $x_1 = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}01(0)} = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}11(0)} = x_2$. Обчислимо її значення за формулою (3) від двох різних G_2-зображень. Маємо

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (\prod_{i=1}^{m-1} g_{\alpha_i})[\delta_1 g_0 - (\delta_1 - \delta_1 g_1)] = (\prod_{i=1}^{m-1} g_{\alpha_i}) 2 g_0 g_1 \neq 0. \qquad \square$$

1 Функції, визначені ланцюговою скріпленістю пар цифр

Теорема 3. *Серед функцій, означених рівністю*

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots} \tag{5}$$

неперервними є лише функції, для яких $d(a,b) = const$, $d(a,b) = a$ і $d(a,b) = b$, тобто коли $g(x)$ є оператором лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення.

Доведення. Існує всього 16 функцій $d : A \times A \to A$, ефективне матричне задання яких запропоноване у роботі Ратушняк С.П. [11]. Функцію g зручно асоціювати з матрицею $||a_{ij}||$, де $a_{ij} = d(i,j)$. Коли $d(i,j) = 0$ маємо $g(x) = 0$, а коли $d(i,j) = 1$ маємо $g(x) = g_0$. Тому те, що чотири вказані функції є неперервними очевидно, оскільки функція $d(a,b) = a$ породжує функцію $f(x) = x$, а функція $d(a,b) = b$ породжує оператор лівостороннього зсуву цифр G_2-зображення чисел, неперервність якого зазначалась вище.

Для того, щоб функція була неперервною, необхідно і достатньо, щоб значення, обчислені за формулою (4) від різних зображень G_2-бінарної точки, були рівними. Очевидно (або легко бачити), що контрольними точками є лише $\Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)}$ і $\Delta^{G_2}_{c11(0)} = \Delta^{G_2}_{c01(0)}$.

Нехай $d(a,b)$ – функція, відмінна від чотирьох вказаних. Якщо функція $d(a,b) = 1-a$, то f є інверсором $I(x)$ цифр G_2-зображення чисел, яка як зазначалось вище, має зліченну множину точок розриву. Якщо $d(a,b) = 1-b$, то $f(x) = I(\omega(x))$ і точка $x_0 = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)}$ є її точкою розриву, оскільки матриця $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

1. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{0(1)} \neq \Delta^{G_2}_{(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

2. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{110(1)} \neq \Delta^{G_2}_{010(1)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{110(1)} = \Delta^{G_2}_{110(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{10(1)} = \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

3. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{111(0)} \neq \Delta^{G_2}_{011(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{111(0)} = \Delta^{G_2}_{111(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

4. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{(1)} \neq \Delta^{G_2}_{0(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

5. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{101(0)} \neq \Delta^{G_2}_{011(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(0)} \neq \Delta^{G_2}_{111(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{01(0)} = \Delta^{G_2}_{11(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

6. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{10(1)} \neq \Delta^{G_2}_{00(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

7. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то маємо оператор лівостороннього зсуву, зокрема $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{1(0)} = \Delta^{G_2}_{1(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

8. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

9. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} \neq \Delta^{G_2}_{10(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

10. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{000(1)} \neq \Delta^{G_2}_{100(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{00(1)} = \Delta^{G_2}_{00(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{000(1)} = \Delta^{G_2}_{000(1)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$.

11. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{(0)} \neq \Delta^{G_2}_{1(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$.

12. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{111(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(1)} \neq \Delta^{G_2}_{101(0)} = g(\Delta^{G_2}_{101(0)})$, хоча $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{01(1)} = \Delta^{G_2}_{01(1)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$, $g(\Delta^{G_2}_{011(0)}) = \Delta^{G_2}_{001(1)} = \Delta^{G_2}_{001(1)} = g(\Delta^{G_2}_{001(0)})$.

13. Якщо $||a_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $g(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \Delta^{G_2}_{1(0)} \neq \Delta^{G_2}_{(0)} = g(\Delta^{G_2}_{01(0)})$. □

2 Сингулярні монотонні функції

Нехай g_0 і q_0 — фіксовані числа, $\frac{1}{2} \leq g_0 < 1$, $\frac{1}{2} \leq q_0 < 1$.

Теорема 4. *Система функціональних рівнянь*

$$\begin{cases} f(g_0x) = q_0 f(x), \\ f(g_0 + (g_0 - 1)x) = q_0 + (q_0 - 1)f(x), \end{cases} \tag{6}$$

визначених в кожній точці відрізка $[0; g_0]$ *має єдиний розв'язок, який аналітично виражається*

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \equiv \Delta^{G_2'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{7}$$

де $q_1 \equiv 1 - q_0$, *і є неперервною строго зростаючою функцією, сингулярною функцією при* $q_0 \neq g_0$ *і* $f(x) = x$ *при* $q_0 = g_0$.

Доведення. Скористаємось скороченням $\delta'_i \equiv iq_{1-i}$, тобто $\delta'_0 = 0$, $\delta'_1 = q_0$.

Зауважимо, що коли $v = \Delta^{G_2}_{v_1v_2...v_n...}$, то

$$g_0v = \Delta^{G_2}_{0v_1v_2...v_n...},\ g_0 + g_1v = \Delta^{G_2}_{1v_1v_2...v_n...}.$$

Тому в обох випадках (коли $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = 1$), враховуючи співвідношення (7), маємо:

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \delta'_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}f(\Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...}).$$

З тієї ж причини

$$f(x) = \delta'_1 + q_{\alpha_1}(\delta'_{\alpha_2} + q_{\alpha_2}f(\Delta^{G'_2}_{\alpha_3\alpha_4...\alpha_n...})).$$

Продовжуючи ті ж міркування, за m кроків отримаємо

$$f(x) = \delta'_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\delta'_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}q_{\alpha_i} + (\prod_{i=1}^{m}q_{\alpha_i})f(\Delta^{G'_2}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+n}...}).$$

Оскільки $f(x)$ визначена в кожній точці відрізка $[0; g_0]$, а

$$\prod_{i=1}^{m}q_{\alpha_i} \to 0 (m \to \infty),$$

то процес розкладу числа $f(x)$ є збіжним і кінцевий результат має форму (7). Оскільки $\Delta^{G'_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ є G_2-зображенням з параметром q_0, то функція (7) є коректно означена у кожній G'_2-бінарній точці, а отже, є неперервною.

Тепер доведемо сингулярність функції. Оскільки G_2-бінарних точок є зліченна множина, то диференеціальні властивості функції в цих точках не впливають на сингулярність. Якщо в G_2-унарній точці $x_0 = \Delta^{G_2}_{c_1...c_n...}$ існує скінченна похідна $f'(x_0)$, то вона може бути обчислена за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_f(\Delta^{G_2}_{c_1...c_m})}{|\Delta^{G_2}_{c_1...c_m}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta^{G'_2}_{c_1...c_m}|}{|\Delta^{G_2}_{c_1...c_m}|},$$

де $\mu_f(\Delta^{G_2}_{c_1...c_m})$ — приріст функції f на циліндрі $\Delta^{G_2}_{c_1...c_m} = \{x : x = \Delta^{G_2}_{c_1...c_m a_1 a_2...}, (a_n) \in L\}$.

Враховуючи, що

$$|\Delta^{G_2}_{c_1...c_m}| = \prod_{i=1}^{m}|g_{c_i}| = |g_1|^{c_1+...+c_m}g_0^{m-(c_1+...+c_m)},$$

$$|\Delta^{G'_2}_{c_1...c_m}| = \prod_{i=1}^{m}|q_{c_i}| = |q_1|^{c_1+...+c_m}q_0^{m-(c_1+...+c_m)},$$

маємо

$$\frac{|\Delta^{G'_2}_{c_1...c_m}|}{|\Delta^{G_2}_{c_1...c_m}|} = \prod_{i=1}^{m}\frac{q_{c_i}}{g_{c_i}} \text{ і } f'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{q_{c_k}}{g_{c_k}}.$$

Оскільки f є строго зростаючою неперервною функцією, то згідно з відомою теоремою Лебега множина W точок, в яких функція має скінченну похідну, є множиною повної міри. Нехай x_0 – довільна точка множини W, тобто $f'(x_0)$ – скінченна. Тоді при $g_0 \neq q_0$ нескінченний добуток є розбіжним до нуля, оскільки не виконується необхідна умова його збіжності. Отже, $f'(x_0) = 0$ і функція f є сингулярною. Теорему доведено. □

Теорема 5. *Графік* Γ_f *функції* f *є самоафінною множиною*

$$\Gamma_f = \varphi_0(\Gamma_f) \cup \varphi_1(\Gamma_f), \tag{8}$$

$$\varphi_0 : \begin{cases} x' = g_0 x, \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad \varphi_1 : \begin{cases} x' = g_0 + g_0 x, \\ y' = q_0 + q_1 y, \end{cases}$$

і виконується

$$\int\limits_0^{g_0} f(x)dx = \frac{-q_0 g_0 g_1}{1 - q_0 g_0 + q_1 g_1}.$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \text{ де } \Gamma_i = \{M(x;y) : x = \Delta_i^{G_2}, y = f(x)\}.$$

Покажемо, що $\Gamma_i = \varphi_i(\Gamma_f)$. Справді, включення $M'(x';y') \in \varphi_i(\Gamma_f)$ рівносильне виконанню умов

$$\begin{cases} x' = \Delta^{G_2}_{i\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots} = \delta_i + g_i x, \ x \in [0; g_0], \\ y' = \Delta^{G_2'}_{i\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} = \delta_i' + q_i y = f(x'), \end{cases}$$

при цьому $x' \in \Delta_i^{G_2}$. Тому умова $M'(x';y') \in \varphi_i(\Gamma_f)$ рівносильна включенню $M(x';y') \in \Gamma_i$ $(i = 0, 1)$. Отже, має місце структурна рівність (8).

Тепер виразимо інтеграл

$$\int\limits_0^{g_0} f(x)dx = \int\limits_0^{g_0^2} f(x)dx + \int\limits_{g_0^2}^{g_0} f(x)dx = \int\limits_{x \in \Delta_0^{G_2}} f(x)dx + \int\limits_{x \in \Delta_1^{G_2}} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{g_0} y d g_0 x - \int\limits_0^{g_0} (q_0 + q_1 y) d(g_0 + g_1 x) =$$

$$= q_0 g_0 \int\limits_0^{g_0} y dx - g_1 \int\limits_0^{g_0} (q_0 + q_1 y) dx =$$

$$= q_0 g_0 \int\limits_0^{g_0} f(x)dx - q_0 g_1 x|_0^{g_0} - q_1 g_1 \int\limits_0^{g_0} f(x)dx.$$

Тоді

$$[1 - q_0 g_0 + q_1 g_1] \int\limits_0^{g_0} f(x)dx = -q_0 g_0 g_1,$$

$$\int\limits_0^{g_0} q_0 f(x)dx = \frac{-q_0 g_0 g_1}{1 - q_0 g_0 + q_1 g_1}.$$

□

Наслідок 1. *Якщо* $q_0 = g_0$ *та* $q_0 = g_0 = \frac{1}{2}$, *то відповідно маємо*

$$\int_0^{g_0} f(x)dx = \frac{g_0^2}{2} \ i \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{8}.$$

Список літератури

[1] Chen Y. *Fractal texture and structure of central place systems*, Fractals, 2020, 28(01).

[2] Galambos J. Representations of real numbers by infinite series. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] Jarnicki M., Pflug P. Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis. Springer Monographs in Mathem., 2015.

[4] Lysenko I.M., Maslova Yu.P., Pratsiovytyi M.V. *Two-symbol systen of encoding with two bases having different signs and special functions related with it*, Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2019, 16(2), 50-62. (in Ukrainian)

[5] Massopust P.R. *Fractal function and their applications.* Chaos, Solutions and Fractals, 1997, 8(2), 171-190.

[6] Pratsiovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Maslova Yu. P. *Generalization of the Tribin function*, J. Math. Sci., 2021., 253(2), 276–288.

[7] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M.,Ratushniak S.P. *About one class of function with fractal properties.* Bukovynian Mathematical Journal. 2021, 6(1), 273–283. (in Ukrainian)

[8] Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Inversor of digits of digits of two-base G-representation of real numbers and its structural fractality.* Bukovinian Math. Journal. 2022, 10(1), 100-109.

[9] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I., Maslova Yu. *Group of continuous transformations of real inerval preserving tails of G_2-representation of numbers.* Algebra and Discrete Mathematics., 2020, 29(1), 99-108.

[10] Pratsiovytyi, M.V., Lysenko, I.M., Maslova, Yu. Trebenko O. *G-representation of real numbers and some of its applications.* J Math Sci, 2023, 277, 298–310.

[11] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers*, Theory of Probability and Mathem. Stat., 2019, 99, 211-228.

[12] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol encoding systems of real numbers and their application., Kyiv: Nauk. Dumka, 2022. (in Ukrainian)

[13] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to the study of singular distributions - Kyiv: Nats. Pedagog. Mykhailo Dragomanov Univ., 1998. (in Ukrainian)

[14] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Geometry of numerical series: series as a model of a real number in a new two-symbol system of encoding of numbers.* Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sc. Ukraine, 2018, 15(1), pp. 132–146 (in Ukrainian).

[15] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York: Oxford University Press., 1995. 320 p.

Надійшло 08.12.2024

Lysenko I.M., Pratsiovytyi O.M., Plakyda V.I. *Continuous functions defined in terms of a two-symbol* $\mathbf{G_2}$*-representation with two bases having different signs*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 89–97.

In the paper we study defined on an interval continuous functions where the argument and the values are represented (G_2-representation) in a coding system with two oppositely signed bases $g_0 \in [0,5;1)$ and $g_1 = g_0 - 1$ and a two-symbol alphabet $A = \{0;1\}$:

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

These functions are divided into three distinct classes. The first class includes functions defined by an equation:

$$\varphi(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{r_1(\alpha_1)r_2(\alpha_2)\ldots r_n(\alpha_n)\ldots},$$

where (r_n) is a given sequence of functions $r_n : A \to A$. We prove that in this class there exist no any continuous functions except constants, the identity transformation of the interval, and the function

$$f(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

The second class is represented by the following functions:

$$g(x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{d(\alpha_1,\alpha_2)d(\alpha_2,\alpha_3)\ldots d(\alpha_n,\alpha_{n+1})d(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})\ldots}, \text{ де } d : A \times A \to A.$$

We prove that this class contains only four continuous functions: two constant functions, the identity transformation of the interval, and the left-shift operator for the digits of the G_2-representation of numbers. The third class consists of continuous strictly increasing singular functions (whose derivative is zero almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure), defined by a system of functional equations:

$$\begin{cases} f(g_0 x) = q_0 f(x), \\ f(g_0 + (g_0 - 1)x) = q_0 + (q_0 - 1)f(x), \end{cases} \quad q_0 \in [0,5;1), q_1 = q_0 - 1.$$

The graphs of functions in this class are self-affine, i.e. have fractal structure. We derive an expression for the definite integral over the area of definition for the functions in this class.