Нестеренко В.В., Фотій О.Г.

ПРО СЛАБКУ ГОРИЗОНТАЛЬНУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА СУКУПНУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Досліджується сукупна квазінеперервність зверху (знизу) многозначних відображень від двох змінних. Перенесено на випадок многозначних відображень деякі результати про сукупну квазінеперервність функцій від двох змінних. Для цього спочатку вводиться поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності зверху (знизу). З допомогою цього поняття встановлються достатні увоми за яких многозначне відображення від двох змінних є сукпно квазінеперервним. Зокрема встановлено, що якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір і многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ слабко горизонтально квазінеперервне зверху та знизу та квазінеперервне знизу відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в X, то F – сукупно квазінеперервне знизу відображення. Подібний результат встановлено і для сукупної квазінеперервності зверху: якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу та квазінеперервне зверху відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в X, то F – сукупно квазінеперервне зверху відображення.

Також отримано необхідні та достатні умови того, що многозначне відображення від двох змінних є сукупно квазінеперервним зверху (знизу). Зокрема встановлено, що якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, то компактнозначне многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ є сукупно квазінеперервне зверху і знизу тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне зверху і знизу для всіх x з деякої залишкової множини в X.

Ключові слова і фрази: Многозначне відображення, квазінеперервність зверху і знизу, сукупна квазінеперервність зверху і знизу, слабка горизонтальна квазінеперервність зверху і знизу.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *v.nesterenko@chnu.edu.ua (Нестеренко В.В.), o.fotij@chnu.edu.ua (Фотій О.Г.)*

Вступ

Поняття горизонтальної квазінеперервності, яке є узагальненням на топологічні простори властивості (A) з [1], застосовувалося в багатьох результатах для отримання су-

---

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 54C60.

купних властивостей відображень. Це стосувалося як однозначних відображень, так і многозначних.

Тут ми будемо відштовхуватися від основоположного огляду Т.Нойбруна [2] про властивості квазінеперервності многозначних відображень. Зокрема там дано достатні умови того, щоб многозначне відображення від двох змінних було сукупно квазінеперервним зверху чи знизу. Цей результат узагальнювався в працях багатьох математиків (див. [4, 5, 6]). Серед цих праць слід відзначити роботу [4], де встановлено необхідні та достатні умови того, що многозначне відображення від двох змінних є сукупно квазінеперервне зверху чи знизу.

В [3] було введено слабку горизонтальну квазінеперервність, що є більш ширшим поняттям ніж горизонтальна квазінеперервність. Для топологічних просторів X, Y та Z відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та множини A в X, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Тут ми узагальнюємо деякі результати з [4], де однією з достатніх умов було те, що многозначне відображення горизонтально квазінеперервне зверху чи знизу.

Основні поняття та означення

Нам будуть потрібні наступні означення. Нехай X та Z – топологічні простори і $F : X \to Z$ – многозначне відображення від однієї змінної. Многозначне відображення F називається *квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0) \neq \varnothing)$, довільного околу U точки x в просторі X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(x) \subseteq W$ $(W \cap F(x) \neq \varnothing)$ для всіх $x \in G$. Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається *квазінеперервним зверху (знизу)*, якщо воно є таким в кожні й точці з X.

Нехай X, Y та Z – топологічні простори і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення. Переносячи поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності на многозначні відображення ми отримуємо поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається:

- *слабко горизонтально квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0, y_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0, y_0) \neq \varnothing)$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існує відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $F(x, g(x)) \subseteq W$ $(W \cap F(x, g(x)) \neq \varnothing)$ для всіх $x \in G$;

- *сукупно квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої множини W в Z, такої, що $F(x_0, y_0) \subseteq W$ $(W \cap F(x_0, y_0) \neq \varnothing)$, довільних околів U та V точок x та y відповідно в просторах X та Y існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $F(x, y) \subseteq W$ $(W \cap F(x, y) \neq \varnothing)$ для всіх $(x, y) \in G \times H$.

Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *слабко квазінеперервним зверху (знизу) чи сукупно квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожні й точці з $X \times Y$. Зрозуміло, що сукупно квазінеперервне зверху (знизу) многозначне відображення є слабко горизонтально квазінеперервне зверху (знизу).

Для відображення $F : X \times Y \to Z$ розглянемо відображення $F^x : Y \to Z$ та $F_y : X \to Z$ для кожного $x \in X$ та $y \in Y$ відповідно. Нагадаємо, що система відкритих непорожніх множин $\mathcal{V}$ простору Y утворює *зліченну псевдобазу*, якщо кожна відкрита непорожня множина в Y містить деяку множину з $\mathcal{V}$.

1 Сукупна квазінеперервність знизу

Ми почнемо з результатів для сукупної квазінеперервності знизу.

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – слабко горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне знизу$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – сукупно квазінеперервне знизу відображення.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \cap W \neq \varnothing$, і U та V – околи відповідно точок x_0 в X та y_0 в Y. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнена множина W_1, така, що $W_1 \subseteq W$ і $F(p_0) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$. Відображення F слабко горизонтально квазінеперервне знизу в точці p_0, тому існують відкрита множина $U_1 \subseteq U$ і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $F(x, g(x)) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x, y) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_1 \cap M$ є очевидним, оскільки кожна множина A_n міститься в $U_1 \cap M$. Якщо ж $x \in U_1 \cap M$, то відображення F^x є квазінеперервним знизу в точці $g(x)$. Зауважимо, що $F^x(g(x)) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$. З квазінеперервності знизу відображення F^x в точці $g(x)$ випливає, що існує відкрита непорожня множина V^x, така, що $V^x \subseteq V$ і $F^x(y) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$ для кожного $y \in V^x$. Оскільки $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то існує номер n, такий, що $V_n \subseteq V^x$. Тоді $F^x(y) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$ для кожного $y \in V_n$. Це означає, що $x \in A_n$, а тому $U_1 \cap M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Отже,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M.$$

Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що $A = A_{n_0}$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину A і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x,y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$ для всіх $(x,y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, і існує точка $p_1 \in U_2 \times H$, така, що $F(p_1) \cap W_1 = \varnothing$. Оскільки множина W_1 – замкнена, то множина $W_2 = Z \backslash W_1$ – відкрита і $F(p_1) \subseteq W_2$. З слабкої горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існують відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$ і відображення $g_1 : U_3 \to H$, такі, що $F(x, g_1(x)) \subseteq W_2$ для кожного $x \in U_3$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $a \in U_3 \cap A$). Тоді $F(a, g_1(a)) \subseteq W_2$ і $F(a, g_1(a)) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \varnothing$. Отримали суперечність. Отже, $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а значить і $F(p) \cap W \neq \varnothing$. Це означає, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0. □

2 Сукупна квазінеперервність зверху

Тепер перейдемо до встановлення відповідного результату для сукупної квазінеперервності зверху.

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне зверху$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – сукупно квазінеперервне зверху відображення.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F сукупно квазінеперервне зверху в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \subseteq W$ і $U \times V$ – окіл точки p_0. Оскільки простір Z нормальний, то існує замкнена множина W_1 і відкрита множина W_2, такі, що $F(p_0) \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Відображення F слабко горизонтально квазінеперервне зверху в точці p_0, тому існують відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $F(x, g(x)) \subseteq W_2$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x,y) \subseteq W_2\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U_1 \cap M$ є очевидним, оскільки кожна множина A_n міститься в $U_1 \cap M$. Якщо ж $x \in U_1 \cap M$, то відображення F^x є квазінеперервним зверху в точці $g(x)$. Зауважимо, що $F^x(g(x)) \subseteq W_2$. З квазінеперервності зверху відображення F^x в точці $g(x)$ випливає, що існує відкрита непорожня множина V^x, така, що $V^x \subseteq V$ і $F^x(y) \subseteq W_2$ для кожного $y \in V^x$. Оскільки $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то існує номер n, такий, що $V_n \subseteq V^x$. Тоді $F^x(y) \subseteq W_2$ для кожного $y \in V_n$. Це означає, що $x \in A_n$, а тому $U_1 \cap M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Отже,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M.$$

Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину $A = A_{n_0}$ і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x, y) \subseteq W_2$ для всіх $(x, y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, тобто існує точка $p_1 \in U_2 \times H$ така, що $F(p_1) \not\subseteq W_1$. Тоді множина $W_3 = Z \setminus W_1$ відкрита і $F(p_1) \cap W_3 \neq \varnothing$. З слабкої горизонтальної квазінеперервності знизу маємо, що існують відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$ і відображення $g_1 : U_3 \to H$, такі, що $F(x, g(x)) \cap W_3 \neq \varnothing$ для кожного $x \in U_3$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $a \in U_3 \cap A$. Тоді $F(a, g(a)) \cap W_3 \neq \varnothing$ і $F(a, g(a)) \subseteq W_2$. Отримали суперечність. Тоді $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а отже, і $F(p) \subseteq W$. Це і означає сукупну квазінеперервність зверху функції F. $\square$

3 Характеризація сукупної квазінеперервності

Для встановлення характеризації сукупної квазінеперервності нам будуть потрібні наступні теореми, які встановлені в [4].

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне многозначне відображення, яке сукупно квазінеперервне знизу. Тоді множина*

$$M = \{x \in X : F^x - \textit{квазінеперервне знизу}\}$$

залишкова в X.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке сукупно квазінеперервне зверху. Тоді множина*

$$\{x \in X : F^x - \textit{квазінеперервне знизу}\}$$

залишкова в X.

Тепер ми можемо встановити основний результат цієї статті.

Теорема 5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне многозначне відображення. Відображення F сукупно квазінеперервне зверху і знизу тоді і тільки тоді, коли F слабко горизонтально квазінеперервне зверху і знизу та F^x квазінеперервне зверху і знизу для всіх x з деякої залишкової множини в X.*

Доведення. Зауважимо, що метризовний простір Z є нормальним, а отже, і регулярним. Додаткова умова сепарабельності простору Z гарантує те, що цей простір буде задовольняти другу аксіому зліченності.

Необхідність випливає з теорем 3 і 4, оскільки перетин двох залишкових множин є залишковою множиною, і зауваження про те, що сукупно квазінеперервне зверху (знизу) многозначне відображення є слабко горизонтально квазінеперервне зверху (знизу).

Достатність випливає з теорем 1 і 2. □

Список літератури

[1] Bögel K. Über partiell differenzierbare Funktionen// Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490–498.

[2] Neubrunn T. Quasi-continuity// Real Anal. Exch. – 1989. – **14**, 3. – P. 259–306.

[3] Nesterenko V. Weak horizontal quasi-continuity// Math. Bull. of Shevchenko Scientific Society. – 2008. – **5**, – P. 177–182. (in Ukrainian)

[4] Fotij O., Maslyuchenko O., Nesterenko V. Characterization of quasi-continuity of multifunctions of two variables// Math. Slovaca. – 2016. – **66**, 1. – P. 281–286.

[5] Holá L., Mirmostafaee A. Some results on joint continuity of two variable set-valued mappings// Topology Appl. – 2024. – **341**. – P. 254–269.

[6] Piotrowski Z. Quasi-continuity and product spaces// Geometric topology, Proc. int. Conf., Warszawa: – 1980. – P. 349–352.

Надійшло 05.12.2024

Nesterenko V.V., Fotij O.G. *On weak horizontal quasi-continuity and joint quasi-continuity of multivalued mappings*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 162–167.

The joint upper (lower) quasi-continuity of multivalued mappings from two variables is investigated. Some results on joint quasi-continuity of functions of two variables are transferred to the case of multivalued mappings. For this purpose, the concept of upper (lower) weak horizontal quasi-continuity is first introduced. With the help of this concept, sufficient conditions are established under which the multivalued mapping from two variables is joint quasi-continuous. In particular, it is established that if X is a Baire space, a space Y has a countable pseudobase, Z a regular space, and the multivalued mapping $F : X \times Y \to Z$ is upper and lower weakly horizontally quasi-continuous and lower quasi-continuouswith respect to the second variable for the values of the first variable from some residual set in X, then F is a joint lower quasi-continuous mapping. A similar result was established for the joint upper quasi-continuity: if X is a Baire space, a space Y has a countable pseudobase, Z a normal space, and $F : X \times Y \to Z$ is a closed-valued mapping that is upper and lower weakly horizontally quasi-continuous and upper quasi-continuous with respect to of the second variable at the values of the first variable from some residual set in X, then F is an upper quasi-continuous mapping . Necessary and sufficient conditions are also obtained that the multivalued mapping from two variables is joint upper (lower) quasi-continuous. In particular, it is established that if X is a Baire space, Y a second countable space, Z a metric separable space, then the compact-valued multivalued mapping $F : X \times Y \to Z$ is joint upper and lower quasi-continuous if and only if F is upper and lower weakly horizontally quasicontinuous and F^x is upper and lower quasicontinuous for of all x from some residual set in X.