Працьовитий М.В., Черчук Н.В.

НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ ТИПУ СЕРПІНСЬКОГО, ПОВ'ЯЗАНА ІЗ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ РЯДАМИ КАНТОРА

У роботі означено ніде не монотонну функцію, аргумент якої представлений у канторівській системі числення з послідовністю натуральних основ (s_k), де $s_k = 2k+1$:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...},$$

де $\alpha_k(x) \in A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$, $s_k = 2k+1$. Значення функції визначається ланцюговою залежністю цифр Q_s-зображення числа від цифр зображення аргументу і мають наступний вигляд:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \ \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

де $\beta_1 = \gamma(\alpha_1)$ і $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$, якщо $c_k = 0$ або $\beta_k = 2 - \gamma(\alpha_k)$, якщо $c_k \neq 0$. Також $c_1 = c_2 = 0$, $c_k = c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} \neq \frac{s_{k-1}-1}{2}$ або $c_k = 1 - c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} = \frac{s_{k-1}-1}{2}$ і $\gamma(\alpha) \in A_3$.

Описано властивості її рівнів, диференціальні та фрактальні властивості.

Ключові слова і фрази: Q_s-зображення числа, неперервна ніде не монотонна функція, канторівська система числення.

Institute of mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats444@gmail.com, nadiacercuk@gmail.com*

Вступ

Більшість функцій з метричного простору $C_{[0;1]}$, у топологічному сенсі, є ніде не монотонними та ніде не диференційовними. Яскравим прикладом являється функція Серпінського [4], для задання якої використовується трійкове та п'ятіркове зображення дійсних чисел. Різні системи зображення чисел та перетворювачі символів одного зображення у інше [9],[7], [6] дозволяють розширити класи таких функцій та вивчати їх властивості [3], [8], [14],[13],[15].

У даній роботі розглядається неперервна ніде не монотонна функція — аналог функції Серпінського, яка досліджувалася у роботах [1], [3], [5], [10],[11], [12], [14]. Для задання її аргументу використовується канторівське зображення чисел з послідовністю

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60Exx.

основ (s_k), де $s_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, а значення функції визначається залежністю цифр Q_3 – зображенням числа.

(s_k) — задана послідовність натуральних чисел; $A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів, $L \equiv A_1 \times ... \times A_k \times ...$ — простір послідовностей алфавітів, $L = \{(\alpha_k) : \alpha_k \in A_k, k \in \mathbb{N}\}$. Як відомо [2], подання числа $x \in [0; 1]$ рядом

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...} \tag{1}$$

називається (s_k) - представленням, а формальний запис $\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...}$ — (s_k)-зображення числа x (зображення числа x у канторівській системі числення з послідовністю основ (s_k)).

Числа, для яких

$$\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 ... \alpha_m (0)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 ... \alpha_{m-1} [\alpha_m - 1][s_{m+1} - 1][s_{m+2} - 1] ...} \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 ... [\alpha_m - 1](s_{m+k} - 1)},$$

мають два (s_k) – зображення називаються (s_k) – бінарними. Решта — мають єдине (s_k) – зображення і називаються (s_k) – унарними.

Розглянемо число x , що належить відрізку $[0; 1]$. Його розклад

$$x = \beta_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j(x)} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{a_1(x) a_2(x) ... a_k(x) ...},$$

де $a_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$ називається Q_s – розкладом [9], а $\Delta^{Q_s}_{a_1(x) a_2(x) ... a_k(x) ...}$ — Q_s – зображенням числа x.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – упорядкований набір елементів алфавіту A_s. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називають множину чисел $x \in [0; 1]$, що мають Q_s-зображення $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m a_{m+1} ... a_{m+k} ...}$, $a_{m+k} \in A_s$.

Властивості циліндрів:

1. Циліндр $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m}$ є відрізком $[\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m (0)}; \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m (s-1)}]$.

2. $\Delta^{Q_s}_{c_1 ... c_m} = \Delta^{Q_s}_{c_1 ... c_m 0} \cup \ldots \cup \Delta^{Q_s}_{c_1 ... c_m [s-1]}$.

3. Довжина циліндра $|\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}$.

4. $|\Delta^{Q_s}_{c_1 ... c_m i}| = q_i |\Delta^{Q_s}_{c_1 ... c_m}|$.

   Відрізкок $[\Delta^{(s_k)}_{a_1 ... a_m (0)}; \Delta^{(s_k)}_{a_1 ... a_m ([s_{m+k} - 1])}]$ є циліндром $\Delta^{(s_k)}_{a_1 ... a_m}$ з основою $(a_1, \ldots, a_m)$, $a_k \in A_{s_k}$, який відповідає (s_k) – зображенню, має довжину $\frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m}$.

1 Об'єкт дослідження

Нехай $A_{s_k} \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$ — послідовність алфавітів. Визначимо на A_{s_k} дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha \in A_k \setminus \{0, s_k - 1\}, \\ 2, & \text{якщо } \alpha = s_k - 1. \end{cases} \tag{2}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_1 \times ... \times A_k \times ...$ визначимо послідовність (c_k): $c_1 = c_2 = 0, c_k = 1 - c_{k-1}$, якщо $\alpha_{k-1} = k - 1$ та $c_k = c_{k-1}$ в усіх інших випадках.

На відрізку $[0; 1]$ розглядається функція g, значення якої має Q_3-зображення:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}, \tag{3}$$

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

2 Коректність означення функції та її неперервність

Покажемо, що функція g коректно визначена в (s_k) – бінарній точці, тобто для одного й того ж аргумента, який має два різні зображення

$$x_1 \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s_{k+i}-1)} \equiv x_2,$$

значення $g(x_1)$ і $g(x_2)$ співпадають.

Очевидно, що $g(x_1) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1...\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}...\beta_{k+n}...}$, $g(x_2) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1...\beta_{k-1}\beta^*_k\beta^*_{k+1}...\beta^*_{k+n}...}$.

Тому

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \prod_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} |\Delta^{Q_3}_{\beta_k...\beta_{k+n}...} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k...\beta^*_{k+n}...}|$$

Для $i \leq k$, $c_i(x_1) = c_i(x_2)$. Якщо $i > k$, то можливі випадки

$$\begin{cases} c_k = c_{k+1}(x_1), \\ c_k = c_{k+1}(x_2); \end{cases} \begin{cases} c_k \neq c_{k+1}(x), \\ c_k = c_{k+1}(x^*); \end{cases} \begin{cases} c_k = c_{k+1}(x), \\ c_k \neq c_{k+1}(x^*). \end{cases}$$

Розглянемо кожен із випадків.

1) Якщо $c_{k+1}(x_1) = c_k = c_{k+1}(x_2)$, тоді $\alpha_k(x) \in A_k \setminus \{\frac{s_k-1}{2}\}$.

Якщо $c_k = 0$, то $\beta^*_k = \beta_k - 1$, а якщо $c_k = 1$, то $\beta_k = \beta^*_k - 1$,

$$\beta_{k+n} = \begin{cases} 0 \text{ при } c_k = 0, \\ 2 \text{ при } c_k = 1; \end{cases} \beta^*_{k+n} = \begin{cases} 0 \text{ при } c_k = 1, \\ 2 \text{ при } c_k = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\delta_{\beta_k} = \delta_{\beta_{k-1}} + q_{\beta_k - 1}$, то отримаємо

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_k(0)} - \Delta^{Q_3}_{[\beta_k-1](2)}\right| = 0, \\ \prod_{i=1}^{k-1} q_{\beta_i} \left|\Delta^{Q_3}_{[\beta^*_k-1](2)} - \Delta^{Q_3}_{\beta^*_k(0)}\right| = 0. \end{cases}$$

2) Якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) = \frac{s_k-1}{2}$ або $\alpha_k(x) - 1 = \frac{s_k-1}{2}$. Оскільки

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \ \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \ \text{якщо } c_k \neq 0, \end{cases}$$

отримаємо $\beta_n = \beta_n^*$ для всіх $n = k, k+1, k+2 \ldots$. Тоді, $g(x) - g(x^*) = 0$.

Випадок коли $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$ розглядається аналогічно.

Звідки, очевидно, що $g(x_1) = g(x_2)$. Тобто, у (s_k) – бінарній точці функція визначена коректно.

У (s_k) – унарній точці коректнійсть функції очевидна.

Теорема 1. *Функція g є неперервною на відрізку* $[0; 1]$.

Доведення. Для доведення неперервновсті функції g в довільній точці $x_0 \in [0; 1]$ покажемо, що

$$\lim_{x \to x_0} |g(x) - g(x_0)| = 0.$$

Спершу розглянемо випадок, коли x_0 — (s_k) – унарна точка. Для довільного $x_0 \in [0; 1]$ існує $m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_j(x) = \alpha_j(x_0), \ \ j = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0), \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді,

$$|g(x) - g(x_0)| = \left|\Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}\right| =$$
$$= \left|\prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i}(\Delta^{Q_3}_{\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots})\right| \leq \prod_{i=1}^{m-1} q_{\beta_i} \to 0 \ \text{при } m \to \infty,$$

де $g(x) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots}$, $\ g(x_0) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}$.

Отже, функція g є неперервною в (s_k) – унарній точці.

Для (s_k) – бінарної точки неперервність функції g випливає із доведення її коректності.

□

3 Ніде не монотонність функції

Нагадаємо, що неперервна функція g називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного проміжку монотонності.

Теорема 2. *Функція g є ніде не монотонною на відрізку* $[0; 1]$.

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}$, кінці якого відповідно $g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m(s_{m+k}-1)})$ та $g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m(0)})$.

Відомо, що приростом функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}$ називається різниця

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}) = g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m(s_{m+k}-1)}) - g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m(0)}).$$

Для доведення ніде не монотонності функції g достатньо показати, що для довільного циліндра $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}$ рангу m знайдеться циліндр $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_mj}$ рангу $(m+1)$ такий, що прирости $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m})$ і $\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_mj})$ набувають різних знаків.

Використавши означення функції, розглянемо всі можливі випадки для значення μ_g.

1) Якщо $c_m = 0$, то

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}) = \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\dots b_m(2)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\dots b_m(0)} = \prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

2) Якщо $c_m = 1$, то

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}) = \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\dots b_m(0)} - \Delta^{Q_3}_{b_1b_2\dots b_m(2)} = -\prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

Очевидно, що для кожного із випадків, завжди можна вказати циліндр рангу $(m+1)$ прирости на якому в кожному з випадків набуватимуть різного знаку. Отже, функція g є ніде не монотонною. □

Наслідок 1. *Приріст функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}$ рангу m визначається за формулою*

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{a_1a_2\dots a_m}) = (-1)^{c_m}\prod_{i=1}^{m} q_{d_i}$$

.

4 Диференціальні властивості функції

Теорема 3. *Функція g є ніде не диференційовною.*

Доведення. 1) Розглянемо $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$— (s_k) – унарну точку.
Приріст функції g на циліндрі $\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$ визначається рівністю

$$\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}) = (-1)^{c_m}\prod_{i=1}^{m} q_{b_i}.$$

Тоді

$$g'(x_0) = \lim_{m\to\infty}\frac{\mu_g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m})}{|\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\dots\alpha_m}|} = (-1)^{c_m}\prod_{i=1}^{m} s_i q_{b_i}.$$

Оскільки $s_i q_{b_i} > 1, i \in \overline{1,m}$, за вийнятком, можливо, скінченної кількості для якої $s_i q_{b_i} = 1$ або $s_i q_{b_i} < 1$, то

$$g'(x_0) = \pm\infty.$$

2) Нехай $x_0 = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$— (s_k) – бінарна точка, тобто

$$x_0 = x_0^{(2)} \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots[\alpha_n-1](s_{n+k}-1)} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)} \equiv x_0^{(1)}, k \in \mathbb{N}$$

Розглянемо послідовністі $(x_j^{'})$, $(x_j^{''})$:

$$x_j^{'} = x_0^{(1)} + \frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n+j}} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)},$$

$$x_j^{''} = x_0^{(1)} - \frac{1}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n+j}} = \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\ldots[\alpha_n-1]\underbrace{[s_{n+1}-1]\ldots[s_{n+j-1}-1]}_{j-1}[s_{n+j}-2](s_{n+j+k}-1)},$$

$$x_j^{'} \to x_0 + 0, x_j^{''} \to x_0 - 0, \text{при } j \to \infty.$$

Згідно формул (3)-(4), маємо

$$g(x_0^{(1)}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_0^{(2)}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n'(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n'(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_j^{'}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\underbrace{2\ldots2}_{j-1}1(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_j^{''}) = \begin{cases} \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n'\underbrace{2\ldots2}_{j-1}1(2)} \text{ при } c_n(x_0^{(2)}) = 0, \\ \Delta^{(s_k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n'\underbrace{0\ldots0}_{j-1}1(0)} \text{ при } c_n(x_0^{(2)}) = 1. \end{cases}$$

Таким чином

$$g(x_j^{'}) - g(x_0^{(1)}) = \begin{cases} q_0^j \prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)}) = 0, \\ -q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)}) = 1; \end{cases}$$

$$g(x_0^{(2)}) - g(x_j^{''}) = \begin{cases} q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)}) = 0, \\ -q_0^j \prod_{i=1}^{n} q_{b_i}, \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)}) = 1. \end{cases}$$

Розглянемо

$$B_j^{'}=\frac{g(x_j^{'})-g(x_0^{(1)})}{x_j^{'}-x_0^{(1)}}=\begin{cases} q_0^j\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)})=0\\ -q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(1)})=1;\end{cases}$$

та

$$B_j^{''}=\frac{g(x_0)-g(x_j^{''})}{x_0-x_j^{''}}=\begin{cases} q_2^{j-1}\dfrac{q_1}{1-q_2}\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)})=0\\ -q_0^j\prod\limits_{m=n}^{n+j}s_m\left(\prod\limits_{i=1}^{n}s_iq_{b_i}\right), \text{ якщо } c_n(x_0^{(2)})=1.\end{cases}$$

Легко бачити, якщо $c_n(x_0^{(1)})\neq c_n(x_0^{(2)})$, то

$$\lim_{j\to\infty}B_j^{'}\neq\lim_{j\to\infty}B_j^{''}.$$

Якщо ж $c_n(x_0^{(1)})=c_n(x_0^{(2)})$, то, оскільки $s_mq_0>1$ та $s_mq_2>1$, $m\in\overline{n,n+j}, j\in\mathbb{N}$, отримаємо, що

$$\lim_{j\to\infty}B_j^{'} \text{ та } \lim_{j\to\infty}B_j^{''} \text{є нескінченними.}$$

Тому $g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})$ у (s_k)— бінарній точці є недиференційовною. Отже, функція g є всюди не диференційовною. □

5 Множини рівнів функції

Означення 1. *Множиною рівня y_0 функції g називається множина:*

$$g^{-1}(y_0)=\{x:g(x)=y_0\}$$

Лема 1. *1) Якщо $y_0=\Delta^{Q_3}_{d_1d_2\ldots d_k\ldots}$, де $d_k\in A_3\backslash\{1\}, k\in\mathbb{N}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ містить єдину точку $x=\Delta^{(s_k)}_{m_1m_2\ldots m_k\ldots}$, (s_k) — цифри зображення якої визначаються за формулою:*

$$m_k=\begin{cases}0, \text{ якщо } d_k=0,\\ s_k-1, \text{ якщо } d_k=s_k-1.\end{cases}\tag{5}$$

2) Якщо Q_3—зображення точки y_0 містить скінченну кількість цифр "1", які розташовані на місцях $k_{n_1},k_{n_2},\ldots,k_{n_m}$, то множина $g^{-1}(y_0)$ є скінченною і містить $N=(2k_{n_1}-1)\cdot\ldots\cdot(2k_{n_m}-1)$ точок.

3) Якщо $y_0=\Delta^{Q_3}_{d_1d_2\ldots d_k\ldots}$, де

$$\begin{cases}d_{k_n}(y_0)=1, \ n\in\mathbb{N}\\ d_j(y_0)\neq 1, \ j\notin\{k_n\},\end{cases}$$

то множина $g^{-1}(y_0)$ є континуальною.

Доведення. Нехай $y_0 = \Delta^{Q_3}_{d_1 d_2 \ldots d_k \ldots}$, де $d_k \in A_3 \setminus \{1\}, k \in \mathbb{N}$, тоді згідно формул (2)-(4) слідує, що $c_k = 0$, а тому множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку x, цифри якої визначаються за формулами (5).

Нехай в зображенні точки y_0 міститься скінченна кількість цифр "1", які розташовані на місцях $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_m}$. З означення функції g слідує, що для кожної цифри $d_{k_{n_j}}(y_0) = 1$ існує $(2k_{n_j} - 1)$ цифр $\alpha_{k_{n_j}}(x)$. Тому загальну кількість елементів, що входить до множини $g^{-1}(y_0)$, можна визначити за формулою $N = (2k_{n_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (2k_{n_m} - 1)$.

Аналогічними міркуваннями, можна прийти до висновку, що кількість елементів множини $g^{-1}(y_0)$, при виконанні умов пункту (3) теореми, визначається за формулою $N = \prod\limits_{j=1}^{\infty} (2k_{n_j} - 1)$, а множина $g^{-1}(y_0)$ є континуальною.

$\square$

Наслідок 2. *Якщо* $y_0 = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1 \ldots 1}_{m} d_{m+1} d_{m+2} \ldots}$, *де* $d_{m+j} \in A_3 \setminus \{1\}, j \in \mathbb{N}$, *то множина* $g^{-1}(y_0)$ *є скінченною і містить* $N = (2m-1)!!$ *точок.*

Список літератури

[1] Bush K.A. *Continuous functions without derivatives* // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] Cantor G. *Uber die einfachen Zahlesysteme* // Z. Math.Phys.— 1869. — 10, Bd. 14. — P. 121-128.

[3] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation* // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[4] Sierpinski W. *Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej* // Wektor. – 1914. – № 8. – P. 337-343.

[5] Wunderlich W. *Eine uberall stetige und nirgends difftrenziebare funktion* // Elem. Math. – 1952. – no.7. – Pp. 73–79.

[6] Працьовитий М. В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел* — Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[7] Працьовитий М. В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування* — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

[8] Працьовитий М. В. *Ніде не монотонніі сингулярні функції*// Наук. часопис Нац. пед.ун-ту ім. М.П.Драгоманова. Сер. 1. Фіз. - мат. науки. — 2011. – №12 — С.24-35.

[9] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[10] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. *Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1, Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 11. – С. 170–181.

[11] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. *Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей* // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Серія 1, Фіз.-мат. науки. — 2011. – № 12. – С. 152–167.

[12] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. *Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу* // Нелінійні коливання, 2018, Том 21, №1. – С. 116–130.

[13] Працьовитий М., Панасенко О. *Диференціальні та фрактальні властивості класу самоафінних функцій* ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ, Серія мех.-мат. 2009, вип. 70, С. 128–142.

[14] Працьовитий М. В., Черчук Н. В., Вовк Ю. Ю., Шевченко А. В. *Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора* Збірник праць Ін–ту математики НАН України, 2019, Том 16, № 3. — С. 232–243.

[15] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. *Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, повязані з Q-зображенням дійсних чисел*// Укр. мат.журнал — 2013. – 65, №3 — С.405-417.

Список літератури

[1] Bush K.A. *Continuous functions without derivatives* // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[2] Cantor G. *Uber die einfachen Zahlesysteme* // Z. Math.Phys.— 1869. — 10, Bd. 14. — P. 121-128.

[3] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation* // Int. J. of Math. Anal. – 2013. – **7**(64). – P. 3155–3169. doi:10.12988/ijma.2013.311278

[4] Sierpinski W. *Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej* // Wektor. – 1914. – № 8. – P. 337-343.

[5] Wunderlich W. *Eine uberall stetige und nirgends difftrenziebare funktion* // Elem. Math. – 1952. – no.7. – Pp. 73–79.

[6] Pratsiovytyi M.V. *Geometry of Classical Binary Representation of Real Numbers* — Kyiv: Publishing House of the M. P. Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — 68 pages. (in Ukrainian)

[7] Pratsiovytyi M.V. *Arbitrary Systems of Real Number Coding and Their Applications* — Kyiv: Naukova Dumka, 2022. — 316 pages. (in Ukrainian)

[8] Pratsiovytyi M.V. *Nowhere Monotonic Singular Functions*// Scientific Journal of the M. P. Dragomanov National Pedagogical University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences. — 2011. – No.12 — P.24-35. (in Ukrainian)

[9] Pratsiovytyi M.V. *Fractal Approach in the Study of Singular Distributions* – Kyiv: Publishing House of the M.P. Dragomanov National Pedagogical University. – 1998. – 296 pages. (in Ukrainian)

[10] Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.A. *A Non-Differentiable Function as a Generalization of the Well-Known Sierpinski Function* // Scientific Journal of the M.P. Dragomanov National Pedagogical University. Series 1, Physical and Mathematical Sciences. – Kyiv: M.P. Dragomanov National Pedagogical University, 2010. – No. 11. – P. 170–181. (in Ukrainian)

[11] Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.A. *A Family of Continuous Functions with a Dense Set of Singularities* // Scientific Journal of the National Pedagogical Dragomanov University. Series 1, Physical and Mathematical Sciences.. — 2011. – No. 12. – P. 152–167. (in Ukrainian)

[12] Pratsovytyi M. V., Svynchuk O. V. *Scattering of Values of a Fractal Continuous Non-Monotonic Cantor-Type Function* // Nonlinear Oscillations, 2018, Vol. 21, No. 1. – P. 116–130. (in Ukrainian)

[13] Pratsovytyi M., Panasenko O. *Differential and Fractal Properties of a Class of Self-Affine Functions* Bulletin of Lviv University, Series Mechanics and Mathematics, 2009, Issue 70., P. 128–142. (in Ukrainian)

[14] Pratsovytyi M. V., Cherchuk N. V., Vovk Yu. Yu., Shevchenko A. V. *Nowhere Monotonic Functions Related to Representations of Numbers by Cantor Series* Collection of Works of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2019, Vol. 16, No. 3. — P. 232–243. (in Ukrainian)

[15] Pratsovytyi M. V., Kalashnikov A. V. *Self-Affine Singular and Nowhere Monotonic Functions Related to Q-Representations of Real Numbers*// krainian Mathematical Journal, 2013, Vol. 65, No. 3. — P.405-417. (in Ukrainian)

Надійшло 01.12.2024

Pratsiovytyi M.V., Cherchuk N.V. *Nowhere Monotonic Function of the Sierpinski Type Associated with the Representation of Numbers by Cantor Series*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 190–199.

In the paper, is defined a continuous nowhere monotonic function such that its argument is represented in Cantor numeral system with a sequence of natural bases (s_k), where $s_k = 2k+1$:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 \cdot s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_k} + ... \equiv \Delta^{(s_k)}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...},$$

where $\alpha_k(x) \in A_k \equiv \{0, 1, ..., s_k - 1\}$, $s_k = 2k + 1$. Value of the function is determined by a chain dependence of digits of Q_s-representation of a number on digits of representation of the argument and given in the following form:

$$g(x) = g(\Delta^{(s_k)}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}, \ \beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},$$

where $\beta_1 = \gamma(\alpha_1)$ and $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$, if $c_k = 0$ or $\beta_k = 2 - \gamma(\alpha_k)$, if $c_k \neq 0$. Also $c_1 = c_2 = 0$, $c_k = c_{k-1}$, if $\alpha_{k-1} \neq \frac{s_{k-1}-1}{2}$ or $c_k = 1 - c_{k-1}$, if $\alpha_{k-1} = \frac{s_{k-1}-1}{2}$ and $\gamma(\alpha) \in A_3$.

We describe properties of level sets of these functions, differential and fractal properties.