Назарчук В.В., Васькевич С.О., Ратушняк С.П.

ОДИН КОНТИНУАЛЬНИЙ КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_S^*-ЗОБРАЖЕННЯ

У статті вводиться в розгляд один континуальний клас багатопараметричних функцій, означених в термінах поліосновного s-символьного Q_s^*-зображення чисел. Обгрунтовуються структурні, фрактальні та тополого-метричні властивості множини значень функції і множин рівнів в залежності від параметрів.

Ключові слова і фрази: Q_s^*-зображення чисел, фрактальні функції, проєктори цифр, фрактальні множини, множина канторівського типу, інверсор.

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine (Vaskevych S.O., Nazarchuk V.V.)
Institute of Mathematics of NASU, Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine (Ratushniak S.P.)
e-mail: *nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua, svetaklymchuk@gmail.com, ratush404@gmail.com*

Вступ

Функції, у яких фрактальними є множина значень, графіки [2, 3, 7], рівні [4] або інші важливі для функції множини, ми відносимо до фрактальних [1, 5]. Серед функцій зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями, визначених на відрізку $[0;1]$, окремої уваги заслуговують функції, які мають зліченну множину точок розриву, а на множині решти точок є неперервними. Саме таким функціям присвячена дана робота. Для їх означення та аналітичного вивчення використовується поліосновне зображення чисел (Q_s^*-зображення), визначене нескінченною кількістю параметрів, яке є узагальненням класичного s-кового зображення. У роботі Q_s^*-зображення вважається фіксованим, а клас функцій, що розглядається, є однопараметричним (параметр $a \in [0;1]$). У роботі вивчаються тополого-метричні властивості множини значень та множин рівнів функцій визначеного класу. Зауважимо, що до класу функцій, які вивчаються, входять дві неперервні функції: тотожне перетворення одиничного відрізка та інверсор цифр Q_s^*-зображення числа.

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 26A30.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, V.N.)

1 Поліосновне Q_s^*-зображення дійсних чисел

Нехай $A \equiv \{0, 1, ..., s-1\}$ – s-ковий алфавіт, $L \equiv A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту A; $||q_{in}||$ — стохастична матриця, така що $0 < q_{in} < 1$, $q_{0n} + q_{1n} + ... + q_{s-1n} = 1$, $n \in N$ і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A}\{q_{in}\} = 0. \tag{1}$$

Тоді відомо [6], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{2}$$

де $\beta_{\alpha_n n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}$ (тобто $\beta_{0n} = 0$, $\beta_{1n} = q_{0n}$, $\beta_{2n} = q_{0n} + q_{1n}, ..., \beta_{s-1,n} = 1 - q_{s-1n}$). Розклад числа x в ряд (2) називається Q_s^*-представленням цього числа, а скорочений запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — його Q_s^*-зображенням.

Якщо $q_{in} = q_i$ $\forall n \in N$, $i \in A$, то Q_s^*-зображення є самоподібним Q_s-зображенням, при цьому якщо $q_i = \frac{1}{s}$ для будь-якого $i \in A$, то Q_s^*-зображення збігається з класичним s-ковим зображенням.

Існують числа, що мають два Q_s^*-зображення. Це числа зі зображеннями

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}\alpha_m(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}[\alpha_m-1](s-1)}. \tag{3}$$

Вони називаються *Q_s^*-бінарними.* Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине зображення. Вони називаються *Q_s^*-унарними.*

Означення 1. *Циліндром $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m}$ рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина чисел*

$$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \left\{x : x = \sum_{k=1}^{m} \beta_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j} + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{\alpha_n n} \prod_{j=m+1}^{n-1} q_{\alpha_j j}\right\}.$$

$\forall(c_1, ..., c_m)$ і $\forall m \in N$ циліндри Q_s^*-зображення мають властивості:

1) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m i}$;

2) $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = [a; b]$, $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{c_i i} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}$, $b = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$;

3) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m...} = x$;

4) $|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i} = q_{c_m m}|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_{m-1}}|$, $\Delta^{Q_s^*}_{c_1} = q_{c_1 1}|[0; 1]|$.

Зауваження 1. *Далі ми розглядаємо Q_s^*-зображення, яке задовольняє умови:*

$$0 < \varepsilon < \min_i\{q_{in}\} \text{ і } \max_i\{q_{in}\} < \delta < 1 \ \forall n \in N,$$

які гарантують умови нуль-мірності множин канторівського типу

$$C[Q_s^*, V_n] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A\},$$

коли $V_n \neq A$ нескінченну кількість разів [6].

2 Основний об'єкт дослідження

Нехай a — фіксоване число з одиничного відрізка $[0;1]$, що має s-кове зображення

$$a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^n} + \ldots, \text{ де } (a_n) \in L.$$

Основним об'єктом розгляду у даній роботі є функція f_a, означена на $[0;1]$ рівністю:

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1||a_2 - \alpha_2| \ldots |a_n - \alpha_n| \ldots}. \tag{4}$$

Очевидно, що a є одним з параметрів, що визначають функцію f_a. Клас таких функцій позначимо через F.

Найпростішими представниками класу F є такі функції:

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2][s-1-\alpha_3] \ldots [s-1-\alpha_n] \ldots}, a = \Delta^{Q_s^*}_{(s-1)} \tag{5}$$

Функція, означена рівністю (5), називається інверсором цифр Q_s^*-зображення. Вона є неперервною строго спадною сингулярною функцією, коли $q_{in} \neq q_{[s-1-i]n}$ $\forall n \in N$, $i \in A$.

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{[s-1-\alpha_1]\alpha_2[s-1-\alpha_3] \ldots [s-1-\alpha_{2k-1}]\alpha_{2k} \ldots}, a = \Delta^{Q_s^*}_{([s-1]0)}. \tag{6}$$

Оскільки має місце нерівність
$f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n (0)}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1| \ldots |a_n - \alpha_n| a_{n+1} \ldots} \neq f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots [\alpha_n - 1](s-1)}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1 - \alpha_1| \ldots |a_n - \alpha_n + 1||a_{n+1} - s + 1| \ldots}$, то для більшості функцій класу F коректність їх означень вимагає домовленості використовувати лише одне з двох зображень Q_s^*-бінарних чисел. Нехай те, що містить (0).

Зауважимо, що значення функції f_a від двох різних зображень одного і того ж числа збігаються лише у випадку, коли $a_{n+i} = s - 1 - |a_{n+i} - s + 1|$ для довільного $i \in N \cup \{0\}$, тобто при $a_{n+i} = s - 1$ або $a_{n+i} = 0$ для $\forall n \in N$.

Лема 1. *Для чисел $a = \Delta^s_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ і $b = \Delta^s_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ таких, що $(\frac{a_n + b_n}{2}) \in L$ має місце рівність*

$$f_a(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}) = f_b(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}), \ c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Доведення. Нехай задано число $a = \Delta^{Q_s^*}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$. Виберемо число $b \in [0;1]$ таке, що $b = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ і $\frac{a_n + b_n}{2} \in A$ $\forall n \in N$ (очевидно, що таке число існує). Тоді

$$f_a(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_n \ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|a_1 - b_1|}{2} \ldots \frac{|a_n - b_n|}{2} \ldots} = \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|b_1 - a_1|}{2} \ldots \frac{|b_n - a_n|}{2} \ldots} =$$
$$= \Delta^{Q_s^*}_{\frac{|2b_1 - (a_1 + b_1)|}{2} \ldots \frac{|2b_n - (a_n + b_n)|}{2} \ldots} = \Delta^{Q_s^*}_{|b_1 - \frac{a_1 + b_1}{2}| \ldots |b_n - \frac{a_n + b_n}{2}| \ldots} = f_b(x_0). \qquad \square$$

Наслідок 1. *Якщо* $a = \Delta^s_{[2d_1][2d_2]...[2d_n]...}$, *то* $f_a(x = \Delta^{Q^*_s}_{d_1d_2...d_n...}) = x$.

Справді, для $a = \Delta^s_{[2d_1]...[2d_n]...}$ має місце $f_a(x = \Delta^{Q^*_s}_{d_1...d_n...}) = \Delta^{Q^*_s}_{|2d_1-d_1|...|2d_n-d_n|...} = x$.

Теорема 1. *Функції* f_a *класу* F *є неперервними на множині* Q^*_s*-унарних чисел, а на множині* Q^*_s*-бінарних чисел неперервними функціями є лише* f_a, *коли* $a = 0$ *або* $a = 1$.

Доведення. Для $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$ і відповідної функції f_a доведемо неперервність у Q^*_s-унарній точці. Нехай $x_0 = \Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha'_n...}$ — Q^*_s-унарна точка. Розглянемо точку x таку, що $x \neq x_0$. Для неї існує такий номер n, що $\alpha'_n = \alpha_n(x_0) \neq \alpha_n(x)$, але $\alpha_k(x) = \alpha_k(x_0)$ при $k < n$. Умова $n \to \infty$ рівносильна $x \to x_0$. Використовуючи означення неперервності функції f в точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, маємо $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Покажемо, що

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = 0.$$

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned}|f_a(x) - f_a(x_0)| =&|f_a(\Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}\alpha_n...}) - f_a(\Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}\alpha'_n...})| = \\ =&|\Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_{n-1}-\alpha_{n-1}||a_n-\alpha_n|...} - \Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_{n-1}-\alpha_{n-1}||a_n-\alpha'_n|...}| = \\ =&\prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i i} \cdot W, \text{ де } 0 < W \leq 1.\end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i i} \leq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \max_{\alpha_i \in A}\{q_{\alpha_i i}\} = 0.$$

А отже, $\lim\limits_{x\to x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$ в кожній Q^*_s-унарній точці.

Враховуючи домовленість, що значення функції f_a у Q^*_s-бінарній точці (3) обчислюється за формулою (4) за першим зображенням, у цій точці вона має неусувний розрив. □

3 Структурні властивості функцій класу F

Теорема 2. *Множиною значень* E_{f_a} *функції* f_a, *де* $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$, *є множина виду*

$$C[Q^*_s; V_n] = \{x \in [0;1] : x = \Delta^{Q^*_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \alpha_n \in V_n \equiv \{0, 1, ..., \max\{s-1-a_n, a_n\}\}, n \in N\}.$$

Доведення. Нехай задано функцію f_a, де $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$. Тоді значення функції f_a має зображення $\Delta^{Q^*_s}_{|a_1-\alpha_1|...|a_n-\alpha_n|...}$, де $(\alpha_n) \in L$. Зрозуміло, що n-та цифра Q^*_s-зображення числа y може набувати значень $V_n = \{a_n, |a_n - 1|, ..., |a_n - s + 1|\}$. Оскільки $a_n \in A$, то множині V_n належать послідовні цифри алфавіту A, окрім тих, що в сумі з a_n перевищують $(s-1)$, тобто цифри від 0 до більшого з $(s - 1 - a_n)$ або a_n. Таким чином, множина значень довільної цифри Q^*_s-зображення y визначає множину значень функції f_a. □

Наслідок 2. *Множина значень функції f_a є підмножиною відрізка* $[0;\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_n...}]$, *де* $c_n=\max\{s-1-a_n,a_n\}$, $n\in N$.

Теорема 3. *Нехай $s>2$. Множина значень E_{f_a} функції f_a, де $a=\Delta^s_{a_1...a_n...}$, є об'єднанням відрізків, якщо для скінченної кількості місць $a_n\in\{1,2,...,s-2\}$, або континуальною ніде не щільною нуль-множиною, якщо для нескінченної кількості місць $a_n\in\{1,2,...,s-2\}$.*

Доведення. Для доведення континуальності множини E_{f_a} покажемо, що для довільної цифри Q^*_s-зображення значення функції множина $V_n=\{0,1,...,\max\{s-1-a_n,a_n\}\}$, де $a_n\in A_s$ складається принаймні з двох елементів. Оскільки елементи $(s-1-a_n)$ і a_n є інверсними в s-ковому алфавіті, то найменше значення, якого може набувати $\max\{s-1-a_n,a_n\}$, дорівнює $\frac{s}{2}$, якщо s — парне, або $\frac{s-1}{2}$, якщо s — непарне. Таким чином, для довільного n множина V_n містить 0 та 1 для будь-якого $s>2$, а тому кожна цифра Q^*_s-зображення значення функції має принаймні дві альтернативи. Оскільки цифр у зображенні числа y зліченна множина, то різних послідовностей цифр, що визначають значення функції, континуальна множина, тобто множина E_{f_a} континуальна.

Нехай існує k місць $n_1,n_2,...,n_k$, для яких $a_{n_i}\in\{1,2,...,s-2\}$ $\forall i=\overline{1,k}$. Для простоти міркувань будемо вважати, що $a_{n_i}=1$ $\forall i=\overline{1,k}$. Тоді $V_{n_i}=\{0,1,...,s-2\}$, тобто

$$E_{f_a}=[0;1]\setminus(\bigcup_{r_{n_1}\neq s-1}\bigcup_{r_{n_2}\neq s-1}...\bigcup_{r_{n_k}\neq s-1}\Delta^{Q_s^*}_{r_1...r_m}).$$

Оскільки циліндр Q^*_s-зображення є відрізком, то після вилучення з одиничного відрізка s^k неперетинних відрізків (циліндрів виду $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_{[i-1]}[s-1]}$, $i=\{n_1,n_2,...,n_k\}$), бачимо, що множина E_{f_a} є скінченним об'єднанням циліндрів (n_k+1)-го рангу. А тому є скінченним об'єднанням відрізків.

Нехай існує нескінченна кількість місць, для яких $a_{n_i}\in\{1,2,...,s-2\}$ $\forall i\in N$. Тоді розглянемо довільний циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m}$. Існують циліндри $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j}}\subset\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m}$, які не містять точок множини E_{f_a}. Такими циліндрами, наприклад, є $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j-1}0}$ і $\Delta^{Q_s^*}_{r_1r_2...r_m...r_{m+j-1}[s-1]}$. Оскільки m — довільне натуральне число, то для будь-якого відрізка, кінці якого належать множині E_{f_a}, існує цілий інтервал точок, що не належать E_{f_a}. А тому E_{f_a} є ніде не щільною множиною.

Для евристичного доведення нуль-мірності $C[Q^*_s;V_n]$ покажемо, що її міра рівна нулю за умови $q_{[s-1]n}=\min\limits_i\{q_{in}\}$, яка не порушує загальність міркувань. Розглянемо множину виду

$$C[Q^*_s;V_n]=\{x\in[0;1]:x=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},\alpha_n\in V_n\equiv\{0,1,...,s-2\}\ \forall n\in N\}.$$

Множину $C[Q^*_s;V_n]$ можна подати у вигляді:

$$C[Q^*_s;V_n]=[0;1]\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{c_1\in V_1}...\bigcup_{c_m\in V_m}\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_m[s-1]}).$$

Тоді за адитивною властивістю міри Лебега

$$\lambda(C[Q^*_s;V_n])=1-\sum_{m=1}^{\infty}(\prod_{i=1}^{m-1}q_{c_ii}q_{[s-1]m})=0.$$

Оскільки міра Лебега "наймасивнішої"множини рівна нулю, то зрозуміло, що міра Лебега множини значень для будь-якого a, такого що на нескінченній кількості місць $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$, рівна нулю. □

Зауваження 2. *Якщо $s = 2$, то $E_{f_a} = [0; 1]$.*

Нагадаємо, що множиною рівня y_0 функції називається множина

$$f_a^{-1}(y_0) = \{x \in [0; 1] : f_a(x) = y_0\}.$$

Приклад 1. Нехай $a = \Delta^5_{(314)}$. Тоді множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{4(0)}$ є порожньою; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{(0)}$ містить лише одну точку $f_a^{-1}(\Delta^{Q_5^*}_{(0)}) = \{a = \Delta^{Q_5^*}_{(314)}\}$; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{110...110}_{3n}(0)}$ містить 4^n точок; множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_5^*}_{(110)}$ є континуальною.

Теорема 4. *Нехай $s > 2$. Множина f_a^{-1} рівня $y_0 = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 ... b_n ...}$ функції f_a, породженої параметром $a = \Delta^s_{a_1 a_2 ... a_n ...}$, є*

1) *порожньою множиною, якщо $b_n = s-1$, $a_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$;*

2) *скінченною множиною, якщо лише для скінченної кількості n має місце*

$$\begin{cases} a_n + b_n \in A, \\ a_n - b_n \in A; \end{cases} \quad \text{або } b_n = 0 \ \forall n \in N,$$

3) *континуальною множиною, якщо для нескінченної кількості n має місце*

$$\begin{cases} b_n \neq 0, \\ a_n + b_n \in A, \\ a_n - b_n \in A. \end{cases}$$

Доведення. Нехай задано число $a = \Delta^s_{a_1 a_2 ... a_n ...}$ і функція f_a, ним породжена. Розглядається $y_0 = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 b_2 ... b_n ...}$. Тоді множиною рівня y_0 є корені рівняння $f_a(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x) ... \alpha_n(x) ...}) = \Delta^{Q_s^*}_{b_1 ... b_n ...}$. Згідно з означення функції маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} |a_1 - \alpha_1| = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |a_n - \alpha_n| = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки $b_n \in A$, то рівняння виду $|a_n - \alpha_n| = b_n$ рівносильне сукупності рівнянь $a_n - \alpha_n = b_n$ і $a_n - \alpha_n = -b_n$, тобто $\alpha_n = a_n - b_n$ або $\alpha_n = a_n + b_n$. При цьому, якщо $a_n - b_n$ і $a_n + b_n$ належить до A одночасно, то рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$ має не більше двох розв'язків, якщо ж це виконується для нескінченної кількості рівнянь системи (7) і $b_n \neq 0$ нескінченну кількість раз (в цьому випадку рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$ має два розв'язки), то вона має континуальну множину розв'язків.

Якщо лише одне із значень $\alpha_n = a_n - b_n$ або $\alpha_n = a_n + b_n$ належить до A або $b_n = 0$ $\forall n \in N$, то дане рівняння має лише один розв'язок. При цьому, якщо лише скінченна кількість рівнянь має два розв'язки, а усі решта — один, то система (7) має скінченну кількість розв'язків. Якщо для рівняння $|a_n - \alpha_n| = b_n$, $b_n = s - 1$, а $a_n \neq s - 1$ або $a_n \neq 0$, то дане рівняння не має розв'язків, а тому і система (7) їх також не має.

Кількість розв'язків системи (7) відповідає кількості прообразів рівня y_0, що й доводить теорему. $\square$

4 Деякі часткові випадки

Нехай Q_s^*-зображення є Q_3-зображенням з параметрами (q_0, q_1, q_2).

Приклад 1. Якщо $a_n = 1$ для будь-якого $n \in N$, то:
1) множиною значень функції є самоподібна множина канторівського типу $C[Q_3, \{0, 1\}]$ з фрактальною розмірністю, що є розв'язком рівняння $q_0^x + q_1^x = 1$;
2) множиною рівня $y_0 = \Delta_{(1)}^{Q_3}$ є самоподібна множина канторівського типу $C[Q_3, \{0, 2\}]$, фрактальна розмірність якої є розв'язком рівняння $q_0^x + q_2^x = 1$.

Зауважимо, що для цього випадку легко виписати фрактальні властивості всіх рівнів функції.

Список літератури

[1] Jarnicki M., Pflug P. Continuous nowhere differentiable functions. The Monsters of Analysis. Springer Monographs in Mathem., 2015.

[2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliash N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^*-representative*, Mat. Stud. 55 (2021), 37–43.

[3] Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P. *Inversor of digits of two-bases G-representation of real numbers and its structural fractality*, Bukovinian Mathematical Journal, 2022, 10(1), 100–109 (in Ukrainian).

[4] Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Klymchuk S.O. *Level sets of asymptotic mean of digits function for 4-adic representation of real number.* Methods Funct. Anal. Topology. 2016, **22** (2), 184–196.

[5] Pratsiovytyi M. V., Panasenko O. B. *Fractal properties of one class of one-parameter continuous non-differentiable functions*, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Ser. 1. Phys. Math., 2006. **№7**, 160–167. (in Ukrainian).

[6] Pratsiovytyi M.V. Fractal approach to investigation of singular probability distributions, Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ. Publ., Kyiv, 1998 (in Ukrainian).

[7] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P. *Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers*, Theory of Probability and Mathem. Stat. 99 (2019), 211-228.

Надійшло 30.11.2024

Nazarchuk V.V., Vaskevych S.O., Ratushniak S.P. *One continuum class of fractal functions defined in terms of Q_s^*-representation*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 154–161.

In the paper we study one class F of multiparameter functions defined in terms of a polybasic s-adic Q_s^*-representation of numbers by the equality

$$f_a(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s^*}_{|a_1-\alpha_1||a_2-\alpha_2|\ldots|a_n-\alpha_n|\ldots},$$

where (a_n) is a sequence of digits for s-adic representation of the parameter $a \in [0;1]$,

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_n n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j})$$

is Q_s^*-representation of real numbers generated by the positive stochastic matrix $||q_{ij}||$, $\beta_{\alpha_n n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}$. For a fixed Q_s^*-representation of numbers the function f_a is defined by the parameter a, make the class of functions f_a continuum. In this paper we investigate the continuity of the function f_a on the sets of Q_s^*-binary and Q_s^*-unary numbers. We prove that the functions in this class are continuous on the set of numbers with a unique Q_s^*-representation, furthermore we show that all functions, except f_0 and f_1 have a countable set of discontinuities at Q_s^*-binary points. We provide a classification of the topological types of the value sets of the function f_a depending on the parameter a, we prove that if the value set is of the Cantor type then it is zero-dimensional. These properties reveal the fractal nature of the functions in the class F. We describe the structural properties of the level sets of the function in terms of the digits of the s-adic representation of the parameter a. In particular we establish that the level set of the function f_a can be an empty set, a finite set, or a continuum. For certain values of s we provide examples of fractal level sets and calculate its fractal dimensions.