Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 2, 80–88 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №2, 80–88

Єлагін В.О.

НЕГА-Q_S-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ЙОМУ ВІДПОВІДНІ ХВОСТОВІ МНОЖИНИ

В роботі обгрунтовується, що нега -Q_s-зображення є перекодуванням Q_s-зображення, воно породжує ідентичну метричну теорію. Доведено, що группа перетворень одиничного відрізку, які зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел є нескінченною групою, яка містить підгрупу зростаючих функцій.

Ключові слова і фрази: s-кове зображення чисел, нега-Q_s-зображення чисел, циліндр, хвостові множини, неперервні перетворення, оператори зсуву цифр.

Institution of mathematics of NAS Ukraine
e-mail: *fracta.art@gmail.com*

Вступ

Сьогодні людство оперує різними числовими системами (системами чисел, які утворюють певні алгебраїчні структури і мають деяку ступінь автономності). Це системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних, гіперкомплексних чисел тощо. Представник тієї чи іншої числової системи має свій зміст і форму існування, які йому надає система числення. Числові системи та системи числення обслуговують потреби обчислювальної математики та обчислювальної техніки, сучасних ІКТ, є засобом кодування інформації.

Системою числення називається сукупність засобів для: представлення (математичного вираження); зображення (кодування, скороченого, формального запису); найменування дійсних чисел; їх ідентифікації та порівняння; а також побудови арифметики. Ця сукупність включає: 1) модель дійсного числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо); 2) алфавіт — набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлення числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів. Існуючі системи числення (а їх багато [1, 3, 8, 9]) можна певним чином класифікувати. Один з класів утворює системи, що мають основи одну або більше. Найпростішою у ньому є класична s-кова система (

УДК 511.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 28A80.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, V.O.Y.).

© Єлагін В.О., 2024

$1 < s \in \mathbb{N}$) числення, зокрема двійкова. Ця система має багато різних узагальнень та аналогів і ряд різнопанових застосувань у теорії чисел, теорії функцій, теорії фракталів.

Дана робота присвячена зображенню чисел у системі числення з основою (-s), яка називається нега-s-ковою, а також її узагальненню нега-Q_s-зображенню. В роботі доводиться, що нега-Q_s-зображення є простим перекодуванням Q_s-зображення (у поліосновній системі з s додатними основами). Враховуючи, що нега-Q_s-зображення не є топологічно еквівалентним Q_s-зображенню, і те, що нега-s-кові зображення кілька разів використовувались для конструювання неперервних локально складних функцій [1, 4, 5], вважаємо за доцільне розвиток теорії нега-Q_s-зображення чисел.

1 Нега-s-кове зображення чисел як перекодування s-кового

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту A_s.

Нагадаємо [8], що зміст s-кового зображення $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ числа $x \in [0; 1]$, де $(\alpha_n) \in L_s$, розкриває рівність

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}. \tag{1}$$

Тут представленням числа x є ряд (1), при цьому послідовність $s_n = \bar{s}^n$ є базисною, а цифри α_n відіграють роль чисел у поданні числа і символів у його зображенні.

Теорема 1. *[1] Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\tau_n) \in L_s$ така, що*

$$x = \frac{s}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-s)^n} \equiv \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots} = \tag{2}$$

$$= 1 - \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} - \frac{\gamma_3}{s^3} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(-s)^n}, \tag{3}$$

де $\gamma_n = \tau_n + 1$.

Означення 1. *Розклад x у ряд (2) називається його нега-s-ковим представленням, а його формальний запис $\Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}$ — нега-s-ковим зображенням. При цьому τ_n називається n-ою цифрою даного зображення.*

Зауваження 1. *Хід доведення теореми 1 [8] вказує на зв'язок s-кового та нега-s-кового зображень одного і того ж числа, а саме: цифри τ_n нега-s-кового зображення $\Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots}$ числа $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ обчислюються за формулою:*

$$\tau_n = \begin{cases} s - 1 - \alpha_n, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \alpha_n, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Якщо ж відоме нега-s-кове зображення числа $x = \Delta^s_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, то цифри його s-кового зображення можна отримати за формулами:

$$\alpha_n = \begin{cases} s-1-\tau_n, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ \tau_n, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Отже, $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\ldots} = \Delta^{-s}_{[s-1-\alpha_1]\alpha_2[s-1-\alpha_3]\alpha_4[s-1-\alpha_5]\alpha_6\ldots\alpha_{2n}[s-1-\alpha_{2n+1}]\ldots}$.

Це дає підставу стверджувати, що нега-s-кове зображення по своїй суті є лише перекодуванням s-кового зображення числа x. Для більш повного обґрунтування такого висновку проведемо аналіз його тополого-метричних властивостей.

2 Геометрія нега-s-кового зображеня

Суть геометрії зображення чисел в значній мірі розкривають властивості циліндричних та хвостових множин. Нагадаємо, що циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ для s-кового та нега-s-кового зображень відповідно називаються множини[8]

$\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = 1,\ldots,m\}$, $\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : \tau_i(x) = c_i,\ i = 1,\ldots,m\}$.

1. Циліндр для кожного з зображень є відрізком, причому

1.1. $\Delta^s_{c_1\ldots c_m} = [a;b]$, де $a = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{s^i}$, $b = a + \frac{1}{s^m}$;

1.2. $\Delta^{-s}_{c_1\ldots c_m} = [A-B;A+C]$, де $A = \frac{s}{s+1} + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(-s)^i}$,

$$B = \begin{cases} \frac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \frac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases} \quad C = \begin{cases} \frac{1}{s^{m-1}(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \frac{1}{s^m(s+1)}, & \text{якщо } m \text{ парне.} \end{cases}$$

2. $|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{s^m} = |\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m}|$.

3. $\frac{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{s} = \frac{|\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_m}|}$.

4. $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots} = \bigcap_{m=1}^\infty \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$; $x = \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m\ldots} = \bigcap_{m=1}^\infty \Delta^{-s}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}$.

Властивість 3 циліндрів s-кового та нега-s-кового зображень називається основним метричним відношенням, оскільки відіграє важливу (ключову) роль у відповідній метричній теорії. Його вираз є свідченням близькості (і навіть "ідентичності") відповідних метричних теорій.

Зауваження 2. *Враховуючи зазначене, приходимо до висновку, що розв'язки топологічних і метричних задач для нега-s-кового зображення, аналогічних задачам для s-кового зображення, можна отримати з відомих результатів для останнього переформулюванням у новій системі кодування з урахуванням вказаних зв'язків.*

3 Нега-Q_s-зображення чисел

Нагадаємо [1] суть поліосновного Q_s-зображення чисел з $[0;1]$. Нехай $Q_s \equiv (q_0,\ldots,q_{s-1})$ – заданий ймовірнісний вектор з додатними координатами, тобто $q_0 + q_1 + \cdots + q_{s-1} = 1$; $\beta_0 = 0$, $\beta_{i+1} = \beta_i + q_i = q_0 + q_1 + \cdots + q_i$, $i = 0,1,\ldots,s-1$.

Теорема 2. *[2] Для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_s$ така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \tag{4}$$

Скорочений запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (4) і його суми x називають Q_s-зображенням числа x, при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ відповідно n-ою цифрою цього зображення. Подамо ряд (4) у вигляді:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j} + \cdots =$$

$$= (\beta_{\alpha_1+1} - q_{\alpha_1}) + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + (\beta_{\alpha_3+1} - q_{\alpha_3}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots +$$

$$+ (\beta_{\alpha_{2k-1}+1} - q_{\alpha_{2k-1}}) \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j(x)} + \beta_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j(x)} + \cdots =$$

$$= \beta_{\alpha_1+1} - \beta'_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3+1} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \cdots + \beta_{\alpha_{2k-1}+1} \prod_{j=1}^{2k-2} q_{\alpha_j} - \beta'_{\alpha_{2k}} \prod_{j=1}^{2k-1} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= \beta'_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} (\beta'_{\alpha_k}(x) \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) \equiv \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{5}$$

де $\beta'_{\alpha_n} = \begin{cases} \beta_{\alpha_n+1}, \text{ якщо } n \text{ - непарне}, \\ 1 - \beta_{\alpha_n}, \text{ якщо } n \text{ - парне}. \end{cases}$

Таке представлення числа x називатимемо нега-Q_s-представленням, а відповідний скорочений запис $\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ його нега-Q_s-зображенням. Таким чином, нами доведено наступне твердження.

Лема 1. *Для числа $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ має місце рівність (5).*

Отримане перекодування можна здобути іншим шляхом. Наведемо його.

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots + \beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= 1 - 1 + \beta_{\alpha_1} + (\beta_{\alpha_2+1} - q_{\alpha_1}) q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + (\beta_{\alpha_4+1} - q_{\alpha_4}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} + \cdots +$$

$$+ (\beta_{\alpha_n+1} - q_{\alpha_n}) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j} + \cdots =$$

$$= 1 - (1 - \beta_{\alpha_1}) + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} - (1 - \beta_{\alpha_3}) q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_4} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} - \cdots +$$

$$+ \beta_{\alpha_{2n}} \prod_{j=1}^{2n-1} q_{\alpha_j} - (1 - \beta_{\alpha_{2n+1}}) \prod_{j=1}^{2n} q_{\alpha_j} + \ldots =$$

$$= 1 - \gamma_1 + \gamma_2 q_{\alpha_1} - \gamma_3 q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} + \dots + \gamma_{2n} \prod_{j=1}^{2n-1} q_{\alpha_j} - \gamma_{2n+1} \prod_{j=1}^{2n} q_{\alpha_j} + \dots,$$

де γ_n визначаються так:

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 - \beta_{\alpha_n}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \beta_{\alpha_n+1}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Тобто для числа x, що має Q_s-представлення (4), має місце рівність:

$$x = 1 - \gamma_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \gamma_k \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}.$$

Якщо цифри у нега-Q_s-зображенні числа утворюють період, то вони записуються у круглих дужках. Зліченна множина чисел має два нега-Q_s–зображення. Це числа виду: $\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0[s-1])} = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k+1]([s-1]0)}$. Детальніше уявлення про те, числа якого виду можуть давати два зображення, дає наступний розділ.

4 Геометрія нега-Q_s-зображеня

Означення 2. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, називається множина $\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що складається з усіх чисел $x \in [0;1]$, що мають нега-Q_s-зображення, у якого перші m символів рівні $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно.*

Далі наведено деякі властивості циліндрів нега-Q_s-зображення та висвітлимо їх зв'язок з циліндрами Q_s-зображення.

1.Для кожного з зображень циліндр є відрізком, причому:

1.1. $\Delta^{Q_s}_{c_1\ldots c_m} = [a;b]$, де $a = \sum_{i=1}^{m} \beta_{c_i} \prod_{k=1}^{i-1} q_{c_i}$, $b = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$;

1.2. $\Delta^{-Q_s}_{c_1\ldots c_m} = [A;B]$, де

$$A = \begin{cases} = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}), & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}) + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}, & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}) + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ = \beta'_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k-1} (\beta'_{c_k} (\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j}), & \text{якщо } m \text{ парне;} \end{cases}$$

2. $\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcup_{t\in A_s} \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k t}$; $[0,1] = \bigcup_{i_1=0}^{s-1} \bigcup_{i_2=0}^{s-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{s-1} \Delta^{-Q_s}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$;

3.$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k} = x \equiv \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$ для $(c_k) \in L$;

4. $\max \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}i} = \min \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}[i-1]}$; $\max \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k}[i]} = \min \Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{2k}[i+1]}$;

5. $|\Delta^{-Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k}| = \prod_{i=1}^{k} q_{c_i} = |\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_k}|$.

Таким чином, числа можуть мати два зображення, тоді і лише тоді, коли вони є спільним кінцем двох циліндрів.

5 Хвостові множини

Кажуть [1], що нега-Q_s-зображення чисел $x = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots}$ та $y = \Delta^{-Q_s}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots}$ мають однакові хвости, якщо існують деякі натуральні числа k та m такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для будь-яких $j \in \mathbb{N}$. Це символічно записується $x \sim y$.

Означення 3. *Множину всіх чисел, що мають однаковий хвіст називають хвостовою множиною.*

Зауважимо, що числа, які мають два нега-Q_s- зображення належать одній хвостовій множині. Легко бачити, що кожна хвостова множина є зліченною і всюди щільною на відрізку $[0;1]$.

Зауваження 3. *Відношення $\sim$ мати однаковий хвіст є бінарним відношенням еквівалентності.*

Лема 2. *Фактор-множина $G \equiv L_s/\sim$ є континуальною.*

Доведення. Припустимо, що G є зліченною множиною. Тоді простір L_s послідовностей елементів алфавіту є зліченним об'єднанням зліченних множин, тобто зліченною множиною. Але простір L_s є континуальною множиною, що суперечить нашому припущенню, про зліченність G. □

Нам невідомі змістовні метризації множини G, а вони могли б суттєво збагатити метричну теорію нега-Q_s-зображення чисел і розширити застосування у фрактальному аналізі.

6 Спеціальні функції нега-Q_s-зображення

Казатимемо, що функція $f : [0;1] \to [0;1]$ зберігає хвости нега-Q_s-зображення чисел, якщо для будь-якого $x \in [0;1]$ виконується $x \sim f(x)$.

Оператор лівостороннього зсуву цифр нега-Q_s-зображення чисел, який означується рівністю:

$$\eta(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

є кусково-лінійною функцією, а саме: $\eta(x) = \frac{-1}{q_{\alpha_1}}x + \frac{1-\beta'_{\alpha_1}}{q_{\alpha_1}}$. Оскільки $\eta(\Delta^{-Q_s}_{i(0[s-1])}) = \Delta^{-Q_s}_{0[s-1]}$ і не дорівнює $\eta(\Delta^{-Q_s}_{[i+1]([s-1]0)}) = \Delta^{-Q_s}_{[s-1]0}$, то оператор є коректно означеною функцією лише після домовленості використовувати одне з двох зображень, нехай те, що містить період $(0[s-1])$.

Означення 4. *n-кратним оператором лівостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел, де $n \in \mathbb{N}$, називається оператор*

$$\eta^n(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \eta(\eta^{n-1}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} =$$

$$\frac{(-1)^n}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\cdots q_{\alpha_n}}x + \frac{\beta'_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n}} - \frac{\beta'_{\alpha_{n-1}}}{q_{\alpha_n}q_{\alpha_{n-1}}} + \cdots + \frac{(-1)^n\beta'_{\alpha_1}}{q_{\alpha_n}q_{\alpha_{n-1}}\cdots q_{\alpha_1}}.$$

Динаміка у просторі [0;1], породжена відображенням $\eta(x)$, є непростою, хоча траєкторії точок не виходять за межі хвостових множин, які вони представляють.

Означення 5. *Оператором правостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел з параметром i, $i \in A_s$ називається відображення(функція):*

$$\omega_i(x = \Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{-Q_s}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = -q_i x + \beta'_i.$$

Означення 6. *Оператором правостороннього зсуву нега-Q_s-зображення чисел з набором параметрів $(i_1, \ldots, i_n) \in A_s^n, n \in \mathbb{N}$ називається функція*

$$\omega_{i_1 i_2\ldots i_n}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \omega_{i_1}(\omega_{i_2\ldots i_n}(\Delta^{-Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{-Q_s}_{i_1 i_2\ldots i_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} =$$

$$= (-1)^n x \prod_{j=1}^{n} q_{i_j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \beta_{i_j} \prod_{k=1}^{j-1} q_{i_k}.$$

Зауважимо, що всі оператори зсуву цифр є функціями, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел. Можна побачити, що n-кратний оператор лівостороннього зсуву буде зростачою функцією на кожному циліндрі n-рангу, якщо n – парне, і спадною, якщо n – непарне. Аналогічний зв'язок можна побачити і у оператора правостороннього зсуву в залежності від кількості параметрів, для парної кількості параметрів, оператор буде зростаючою фунцією, для непарної кількості – спадною.

Нагадаємо, що перетворенням множини називається бієктивне (одночасно ін'єктивне та сюр'єктивне) відображення цієї множини на себе. Неперервне перетвореннія відрізка [0;1] є зростаючою або спадною неперервною функцією такою, що $f(0) = 0; f(1) = 1$ або $f(0) = 1; f(1) = 0$. Прикладами перетворень, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел, є наступні функції: $f(x) = x$;

$$f_{2k-1}(x) = \begin{cases} \omega_0(x), \text{ коли } 0 \le x \le \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots 0[s-1]0}_{2k-1}0)}, \\ \eta^{2k-1}(x), \text{ коли } \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots 0[s-1]0}_{2k-1}0)} \le x \le 1; \end{cases}$$

$$f_{[s-1]0}(x) = \begin{cases} \omega_{[s-1]0}(x), \text{ коли } 0 \le x \le \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots 0[s-1]}_{2k}[s-1]0)}, \\ \eta^{2k}(x), \text{ коли } \Delta^{-Q_s}_{(\underbrace{0[s-1]0[s-1]\ldots 0[s-1]}_{2k}[s-1]0)} \le x \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, що таких перетворень існує нескінченна кількість, бо $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Множина H всіх неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, що зберігають хвости нега-Q_s-зображення чисел, відносно операції "композиція перетворень"утворює нескінченну некомутативну групу, яка має підгрупу зростаючих перетворень.*

Основні моменти доведення теореми аналогічні схемі, яка використовувалась в роботах [6, 7]. Тому ми обмежились лише конструктивним доведенням нескінченності групи. Ціваво було б вивчити структуру групи H, сім'ю підгруп та інваріантів.

Список літератури

[1] Pratsiovytyi M., Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. (in Ukrainian), Scientific opinion, Kyiv, 2022. — 316p.

[2] M. V. Pratsiovytyi, Fractal Approach to Investigation of Singular Probability Distributions (in Ukrainian), Mykhailo Drahomanov Natl. Pedagog. Univ., Kyiv, 1998.

[3] Schweiger F., Ergodic theory of fibred systems and metric number theory, Oxford University Press, New York, 1995.

[4] Pratsiovytyi M., Chuikov A., A continuous nowhere monotonic function defined in terms of nega-ternary and A2-continued fractions // Collection of Papers, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. – 2018. – Vol. 15. – No. 1. – p. 147–161.

[5] Pratsiovytyi M., Goncharenko Y., Lysenko I. Nega-binary representation of real numbers and its application. Scientific Journal of NPU named after M.P. Drahomanov. Series 1. Physical and Mathematical Sciences. 2015. No. 17. p. 83–106.

[6] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Uncountable group of continuous transformations of unit segment preserving tails of Q_2-representation of numbers. Proceeding of the International Geometry Center. – 2024. – 17(2). P.99-108

[7] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I., Maslova Yu. *Group of continuous transformations of real inerval preserving tails of G_2-representation of numbers.* Algebra and Discrete Mathematics., 2020, 29(1), 99-108.

[8] Pratsiovytyi M.V. Negative-Cantor Representations of Real Numbers as Trivial Recodings of Cantor Representations (negative s-adic recodings of s-adic Representations) // Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2017. – Vol. 14. – No. 4. – P. 167-177.

[9] Kasatkin V.N. New Insights on Numeral Systems. – Vyshcha Shkola, Kyiv, 1982. – 96 pages.

Надійшло 01.12.2024

Yelahin V.O. *Nega-Q_s-representation of numbers and its corresponding tail sets*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 80–88.

The article demonstrates that the nega-Q_s-representation serves as a re-encoding of the traditional Q_s-representation and, despite its altered structural framework, leads to the same metric theory. This equivalence implies that while the representations may appear different in their formal descriptions, they fundamentally capture the same mathematical relationships and properties of the system they describe. Moreover, the study explores the group of transformations acting on the [0,1] interval that preserve the tails of the nega-Q_s-representation. This group, intriguingly, is shown to be infinite, highlighting the extensive symmetry underlying this representation. Within this infinite group, there exists a particularly interesting subset: a subgroup composed of increasing functions. These increasing functions retain the order of points within the interval, suggesting a natural compatibility with the nega-Q_s-representation's structure and preserving its essential features. This finding is significant because it not only confirms the mathematical equivalence of the Q_s- and nega-Q_s-representations but also reveals the rich algebraic structure associated with transformations that maintain the core properties of the nega-$Q_s$representation. By identifying this infinite group and its increasing function subgroup, the article deepens our understanding of how such representations interact with transformations and sheds light on the broader implications for metric theory and number

representation systems. The study invites further exploration into the properties of these transformations, particularly how they might be exploited in applications where alternative number representations or encoding schemes are utilized. Additionally, the identification of increasing functions within this group suggests potential connections to dynamical systems and mathematical models where order preservation is crucial.