Макарчук. О.П.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА МОДУЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-СТІЛЬТЬЄСА ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ

Досліджуються асимптотичні властивості перетворення Фур'є-Стілтьєса одного класу узагальнених згорток Бернуллі. Акцент здійснюється на знаходження необхідних та достатніх умов рівності нулю, одиниці значення верхньої границі L на нескінченності модуля відповідного перетворення Фур'є-Стілтьєса. Обчислено значення величини L при певних умовах, накладених на елементи відповідної згортки.

Ключові слова і фрази: нескінченні згортки Бернуллі, випадковий ряд, теорема Джессена-Вінтнера, числа Пізо-Віджаярагхавана, асимптотична поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності.

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine
e-mail: *makolpet@gmail.com; makarchuk@imath.kiev.ua*

Вступ

Алгебраїчне число $\lambda > 1$ називається числом Пізо (Пізо-Віджаярагхавана), якщо його мінімальний многочлен

$$f(x;\lambda) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + ... + a_1 x + a_0 \ \ (a_k \in Z \ \ \forall k \in \{0;...;r-1\}) \tag{1}$$

має нулі $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_{r-1}$, причому $|\lambda_j| < 1$ для кожного $j \in \{1;...;r-1\}$. Нехай $||t||$ — відстань від t до найближчого цілого числа. Для алгебраїчного числа x степеня n під $Q(x)$ будемо розуміти поле чисел виду $a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, де $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in Q$, з відповідними арифметичними операціями. В роботах [13, 16] була доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай дійсні числа $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, $\beta_1, \beta_2 > 1$, причому β_2 — алгебраїчне число. Умови*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\alpha_1\beta_1^n) < +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} ||\alpha_2\beta_2^n|| = 0,$$

виконуються тоді і тільки тоді, коли β_1, β_2 — числа Пізо та $\alpha_1 \in Q(\beta_1)$, $\alpha_2 \in Q(\beta_2)$.

УДК 517.57
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42-11.
This work was supported by a grant from the Simon Foundation (1290607, M. O. P.).

Нехай $M(\cdot)$ — математичне сподівання. Для характеристичної функції $f_\tau(t) = M(e^{it\tau})$ випадкової величини τ розглянемо значення

$$L_\tau = \overline{\lim_{|t|\to+\infty}} |f_\tau(t)|.$$

Добре відомо [7], що для довільного дискретного розподілу τ відповідно $L_\tau = 1$. Якщо розподіл τ абсолютно неперервний, то $L_\tau = 0$. Для сингулярного розподілу τ, як відомо [14], величина L_τ може набувати довільного значення з відрізку $[0;1]$.

Нехай $\eta \in (1;+\infty)$, $m \in N$, $m > 1$, (ψ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень 0, 1,...,$m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \eta^{-k}.$$

Якщо $m = 2$, то ймовірнісна міра $P_\psi(\cdot)$ є нескінченною згорткою Бернуллі, яка була предметом багатьох досліджень [12, 15]. За теоремою Джессена-Вінтнера [10] та теоремою Леві [11] ψ має чисто неперервний розподіл. Як відомо [12], випадкова величина ψ має сингулярний розподіл канторівського типу при $\eta > 2$. Нехай S^* та A^* — це множини чисел $\eta \in (1;2)$, для яких розподіл ψ сингулярний та абсолютно неперервний відповідно. Відомо [12], що множина A^* має повну міру Лебега. Найбільш повно A^* була описана в роботі [9]. Як було показано в [8], числа Пізо інтервалу $(1;2)$ належать множині S^*, причому $L_\psi > 0$ лише тоді, коли η — числа Пізо з множини $(1;+\infty) \setminus \{2\}$. Інші приклади чисел з S^*, крім вказаних, на даний час не відомі.

В роботі [5] для випадку $\eta \in N$ були знайдені достатні умови того, що $L_\psi > 0$ та було проаналізовано питання розкладу $F_\psi(x)$ у вигляді згортки двох функцій розподілу, одна з яких є абсолютно неперервною. В роботах [1, 2] та [6] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадків $\eta = m = 2$, $\eta = m = 3$ та $\eta = 2, m = 3$ відповідно. В [3] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадку $\eta = m \in N$. Для випадку $\eta \in N$ в статті [4] було обраховано величину L_ψ та були знайдені необхідні і достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для достатньо широких умов, накладених на матрицю $||p_{jn}||$.

В даній роботі розглянуто випадок, коли η є ірраціональним число Пізо. Знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ (для достатньо широких умов накладених на матрицю $||p_{jn}||$), $L_\psi = 1$ (в загальному випадку). Обраховано значення L_ψ при певних обмеженнях, накладених на матрицю $||p_{jn}||$.

1 Необхідні та достатні умови того, що $L_\psi \in \{0;1\}$.

Для ірраціонального числа Пізо λ з мінімальним многочленом (1) позначимо

$$\Delta_k = \lambda^k + \lambda_1^k + ... + \lambda_{r-1}^k, \quad \Delta_k^* = \lambda_1^k + ... + \lambda_{r-1}^k$$

та розглянемо множину $R_\lambda[a;b]$ чисел $t \in [a;b]$ таких, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi t \lambda^n) < +\infty. \tag{2}$$

Лема 1. *Для кожного проміжку $[a;b]$ множина $R_\lambda[a;b]$ є зчисленною всюди щільною в $[a;b]$.*

Доведення. Враховуючи теорему 1, маємо $R_\lambda[a;b] \in Q(\lambda) \cap [a;b]$, звідки $R_\lambda[a;b]$ є не більш ніж зчисленною. Розглянемо множину

$$C_\lambda = \left\{ \frac{b_{r-1}\lambda^{r-1} + b_{r-2}\lambda^{r-2} + ... + b_1\lambda + b_0}{\lambda^w} \middle| b_0, b_1, ..., b_{r-1} \in Z, w \in Z_+ \right\}$$

та покажемо, що $C_\lambda \subseteq R_\lambda(-\infty;+\infty)$. Відомо [13], що $\Delta_k \in Z$ для кожного $k \in N$. Таким чином, для числа $z \in C_\lambda$ маємо

$$\sum_{n=w+1}^{+\infty} sin^2(\pi z \lambda^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi\lambda^n \sum_{j=0}^{r-1} b_j\lambda^j\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi \sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta_{n+j} - \pi\sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta^*_{n+j}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} sin^2\left(\pi\sum_{j=0}^{r-1} b_j\Delta^*_{n+j}\right) < +\infty,$$

адже

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{r-1} |b_j| \left(|\lambda_1|^{n+j} + ... + |\lambda_{r-1}|^{n+j}\right) < +\infty.$$

Оскільки для фіксованих цілих чисел $c_2, c_3, ..., c_{r-1}$ множина

$$\{c_{r-1}\lambda^{r-1} + c_{r-2}\lambda^{r-2} + ... + c_2\lambda^2 + u\lambda + v | u, v \in Z\},$$

за теоремою Кронекера, всюду щільна на R, то множина $R_\lambda[a;b]$ є зчисленною та всюду щільною в $[a;b]$. □

Лема 2. *Якщо $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $t_1 = \frac{1}{5}$, $t_2 = \frac{\lambda+2}{5}$, то виконуються умови: $t_1 \notin R_\lambda(-\infty;+\infty)$, $t_2 \in R_\lambda(-\infty;+\infty)$, $t_2 \notin C_\lambda$.*

Доведення. Нехай (T_k) — класична послідовність Люка, тобто $T_0 = 2, T_1 = 1, T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$ для кожного натурального n. Оскільки послідовність остач членів (T_k) при діленні на 5 утворює період $(2;1;3;4)$, то маємо

$$||t_1\lambda^n|| = \left|\left|\frac{T_n}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|\right| > \frac{1}{6}$$

для достатньо великих n, а тому $t_1 \notin R_\lambda(-\infty;+\infty)$.

Легко бачити, що для кожного натурального k число $\frac{T_{k+1}+2T_k}{5}$ є натуральним, тому

$$sin^2(\pi t_2\lambda^n) = sin^2\left(\frac{\pi(T_{n+1}+2T_n)}{5} - \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) =$$

$$= sin^2\left(\pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \pi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

звідки легко бачити, що $t_2 \in R_\lambda(-\infty; +\infty)$.

Нехай (A_n), (B_n) — послідовності цілих чисел такі, що

$$\lambda^n = A_n\lambda + B_n \ \ \forall n \in Z_+.$$

Зрозуміло, що $A_0 = 0, B_0 = 1, A_1 = 1, B_1 = 0$. Оскільки $\lambda^2 = \lambda + 1$, то для кожного $n \in Z_+$ маємо $A_{n+1}\lambda + B_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda(A_n\lambda + B_n) = (A_n + B_n)\lambda + A_n$ і відповідно $A_{n+1} = A_n + B_n, B_{n+1} = A_n$.

Легко бачити, що (A_n) — послідовність Фібоначчі. Для кожного натурального n маємо

$$t_2\lambda^n = \frac{(\lambda+2)(A_n\lambda + A_{n-1})}{5} = \frac{1}{5}\left(\lambda^2 A_n + \lambda A_{n-1} + 2\lambda A_n + 2A_{n-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\lambda(3A_n + A_{n-1}) + A_n + 2A_{n-1}\right).$$

Оскільки послідовність остач членів послідовності $(A_{k+1} + 2A_k)$ при діленні на 5 утворює період $(3; 4; 2; 1)$, то $t_2 \notin C_\lambda$. □

Для кожного натурального n та $j \in \{1, ..., m-1\}$ позначимо

$$B_{jn} = \sum_{\substack{0 \le i < k \le m-1 \\ k-i=j}} p_{in}p_{kn}, \quad f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn}\sin^2(xj)$$

$$g_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} f_{n-1+k}\left(\frac{x}{\eta^k}\right). \tag{3}$$

Лема 3. *Виконується рівність*

$$|f_\psi(t)|^2 = g_0(0,5t).$$

Доведення. Враховуючи незалежність випадкових величин ψ_n, маємо

$$f_\psi(t) = E(e^{it\psi}) = \prod_{n=1}^{+\infty} E(e^{it\psi_n}).$$

Таким чином, маємо

$$\left|E\left(e^{it\psi_n}\right)\right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}\cos\left(\frac{kt}{\eta^n}\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}\sin\left(\frac{kt}{\eta^n}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_{kn}^2 + \sum_{0 \le j < l \le m-1} 2p_{jn}p_{ln}\left(\cos\left(\frac{jt}{\eta^n}\right)\cos\left(\frac{lt}{\eta^n}\right) + \sin\left(\frac{jt}{\eta^n}\right)\sin\left(\frac{lt}{\eta^n}\right)\right) =$$

$$= 1 - \sum_{0 \le j < l \le m-1} 4p_{jn}p_{ln}\left(\sin^2\left(\frac{(j-l)t}{2\eta^n}\right)\right) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jn}\sin^2\left(\frac{jt}{2\eta^n}\right) = f_n\left(\frac{t}{2\eta^n}\right).$$

□

Вірними [4] є наступні леми.

Лема 4. *Нехай (t_k) — послідовність, що збігається до деякого додатного числа t. Якщо послідовність $(g_n(t))$ є збіжною до 0, то і $(g_n(t_n))$ збігається до 0, де $g_n(t)$ визначені рівністю (3).*

Лема 5. *Нехай (t_k) — послідовність, що збігається до числа $t > 0$, (m_k) — зростаюча послідовність натуральних чисел, $(g_n(t))$ — послідовність функцій визначених рівністю (3). Послідовність $(g_{m_n}(t))$ збігається до числа $A > 0$ тоді і тільки тоді, коли $(g_{m_n}(t_n))$ збігається до числа $A > 0$.*

Теорема 2. *Нехай $\eta = \lambda$ — ірраціональне число Пізо та*

$$\varliminf_{n\to+\infty} B_{1n} > 0. \tag{4}$$

Рівність $L_\psi = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$ виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\psi(2\pi t\lambda^n)| = 0. \tag{5}$$

Доведення. Якщо $L_\psi = 0$, то для довільного $t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$ умова (5) очевидно виконується. Нехай виконується умова (5). Припустимо, що $L_\psi > 0$. Нехай (πt_n) — зростаюча, необмежена зверху послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n\to+\infty} g_0(\pi t_n) = L_\psi^2.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}} < \frac{\pi t_n}{\lambda^{log_\lambda(t_n)+1}} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}} \geq \frac{\pi t_n}{\lambda^{log_\lambda(t_n)+2}} = \frac{\pi}{\lambda^2}.$$

Оскільки послідовність $\left(\frac{\pi t_n}{\lambda^{[log_\lambda(t_n)]+2}}\right)$ обмежена, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність, тобто існує зростаюча, необмежена зверху послідовність додатних дійсних чисел $(\widetilde{t_n})$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty} |g_0(\pi\widetilde{t_n})| = L_\psi^2, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{t_n}}{\lambda^{[log_\lambda(\widetilde{t_n})]+2}} = \gamma \in \left[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}\right].$$

Отже, нехай

$$\gamma_n^* = \frac{\widetilde{t_n}}{\lambda^{[log_\lambda(\widetilde{t_n})]+2}}, \quad h_n = [log_\lambda(\widetilde{t_n})] + 2.$$

Зрозуміло, що існує число $A > 0$ та $N_A \in N$ такі, що для кожного натурального $n > N_A$ виконується умова $B_{1n} > 0,25A$. Розглянемо випадки.

1) Нехай $\gamma \notin R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$. Зрозуміло, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\gamma\lambda^n)$ є розбіжним, тому існує натуральне T таке, що

$$\sum_{n=1}^{T} sin^2(\pi\gamma\lambda^n) > -\frac{ln(0,08L_\psi)}{A}.$$

Зрозуміло, що існує натуральне N_1 таке, що для кожного $n > N_1$

$$sin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j) > sin^2(\pi\gamma\lambda^j) + \frac{ln(0,2)}{T} \ \ \forall j \in \{1;2;...;T\}.$$

Оскільки $1 - z \leq e^{-z}$ для кожного $z \in R$, то для кожного $n > max(N_A;N_1)$ маємо

$$|f_\psi(2\pi t_n)|^2 \leq \prod_{j=1}^{T} f_{h_n - j}(\pi\gamma_n^*\lambda^j) \leq \prod_{j=1}^{T}(1 - Asin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j)) \leq$$

$$\leq e^{-\sum_{j=1}^{T} Asin^2(\pi\gamma_n^*\lambda^j)} \leq e^{-ln(0,2) - \sum_{j=1}^{T} Asin^2(\pi\gamma\lambda^j)} \leq e^{ln(0,08L_\psi) - ln(0,2)} = 0,4L_\psi.$$

Маємо суперечність з припущенням $L_\psi > 0$.

2) Нехай $\gamma \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$. Зрозуміло, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} sin^2(\pi\gamma\lambda^n)$ є збіжним, а тому є збіжним і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} ||\pi\gamma\lambda^n||^2$.

Позначимо $H_m = 2\pi^2(1^2 + 2^2 + ... + (m-1)^2)$. Очевидно існує натуральне число G таке, що для кожного натурального $l \geq G$ виконується $\sum_{n=l}^{+\infty} ||\pi\gamma\lambda^n||^2 < \frac{1}{2H_m}$.

Зрозуміло, що для кожного натурального k та $j \in \{1;...;m-1\}$

$$B_{jk} \leq \sum_{0 \leq j < l \leq m-1} p_{jk}p_{lk} = \frac{1}{4}\left(2 - 2\sum_{j=0}^{m-1} p_{jk}^2\right) < \frac{1}{2}.$$

Таким чином, для кожного натурального l та $n \geq G$ виконується нерівність

$$f_l(\pi\gamma\lambda^n) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi\gamma\lambda^n j) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi j||\gamma\lambda^n||) \geq$$

$$\geq 1 - 2\pi^2||\gamma\lambda^n||^2 \sum_{j=1}^{m-1} j^2 = 1 - H_m||\gamma\lambda^n||^2.$$

Відомо, що для кожних $z_1, z_2, ..., z_s \in [0;1]$

$$\prod_{j=1}^{s}(1 - z_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^{s} z_j. \tag{6}$$

Маємо

$$\prod_{j=1}^{n-G} f_j(\pi\gamma\lambda^{n-j}) \geq \prod_{j=1}^{n-G}(1 - H_m||\gamma\lambda^{n-j}||^2) \geq 1 - H_m\sum_{j=1}^{n-G}||\gamma\lambda^{n-j}||^2 \geq \frac{1}{2},$$

звідки враховуючи умову (5) при $t = \gamma$ отримуємо

$$\lim_{n\to+\infty} g_{n-G}(\pi\gamma\lambda^G) = 0,$$

а тому, за лемою 4,

$$\lim_{n\to+\infty} g_{h_n - G}(\pi\gamma_n^*\lambda^G) = 0.$$

Оскільки для достатньо великих n величина $g_0(\pi t_n) \leq g_{h_n - G}(\pi\gamma_n^*\lambda^G)$, то маємо суперечність з припущенням $L_\psi > 0$. □

Теорема 3. *Нехай $\eta = \lambda$ — ірраціональне числа Пізо. Умова $L_\psi = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{W_{n+k}}{\lambda^{2k}} = \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \tag{7}$$

де $W_n = p_{0n}^2 + p_{1n}^2 + ... + p_{(m-1)n}^2$ для кожного натурального n.

Доведення. Якщо $L_\psi = 1$, то існує зростаюча необмежена зверху послідовність (t_n) така, що $|f_\psi(t_n)| \to 1$ $(n \to +\infty)$. Нехай $h_n = [\log_\lambda(\lambda(m-1)t_n)]$, тоді $\frac{(m-1)t_n}{\lambda^{h_n}} \in [\frac{1}{\lambda}; 1]$. Оскільки $sin(x) \le \frac{2x}{\pi}$ при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то для кожного $j \in Z_+$

$$f_{h_n+j}\left(\frac{t_n}{\lambda^{h_n+j}}\right) \le 1 - 4\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}\left(\frac{2lt_n}{\pi\lambda^{h_n+j}}\right)^2 \le$$

$$\le 1 - \left(\frac{2t_n}{\pi\lambda^{h_n+j}}\right)^2 4\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)} \le 1 - \frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}.$$

Маємо

$$|f_\psi(t_n)| \le \prod_{j=0}^{+\infty} f_{h_n+j}\left(\frac{t_n}{\lambda^{h_n+j}}\right) \le$$

$$\le \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right) \le e^{\sum_{j=0}^{+\infty}\left(-\frac{16}{\pi^2(m-1)^2}\frac{\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right)},$$

звідки

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)}}{\lambda^{2(1+j)}}\right) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Оскільки $2\sum_{l=1}^{m-1} B_{l(h_n+j)} = 1 - W_{h_n+j}$, то умова (7) виконується.

Нехай M — достатньо велике натуральне число та умова (7) виконується. Зрозуміло, що існує натуральне число k_M таке, що

$$S_M = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{2i}} \sum_{0\le j<l\le m-1} p_{j(k_M+i)}p_{l(k_M+i)} \le \frac{1}{M}.$$

Нехай $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge ... \ge |\lambda_{r-1}|$, $B_M = [log_\lambda(\sqrt[4]{M})]$, $A_M = k_M + B_M$. Зрозуміло, що для кожного $j \in \{1; 2; ...; k_M - 1\}$

$$f_j(\pi\lambda^{A_M-j}) \ge 1 - H_m||\pi\lambda^{A_M-j}||^2 = 1 - \pi^2 H_m(\Delta^*_{A_M-j})^2 \ge$$

$$\ge 1 - \pi^2 H_m(\sum_{l=1}^{r-1} |\lambda_l|^{A_M-j})^2 \ge 1 - \pi^2 H_m(r-1)^2|\lambda_1|^{2(A_M-j)}.$$

Враховуючи (6) маємо

$$\prod_{j=1}^{k_M-1} f_j(\pi\lambda^{A_M-j}) \ge 1 - \pi^2 H_m(r-1)^2 \sum_{j=1}^{k_M-1} |\lambda_1|^{2(A_M-j)} \ge$$

$$\geq 1-\pi^2H_m(r-1)^2\sum_{j=B_M+1}^{+\infty}|\lambda_1|^{2j}=1-\frac{\pi^2H_m(r-1)^2}{1-|\lambda_1|^2}|\lambda_1|^{2B_M+2}.$$

Оскільки для кожних $n\in N, r\in Z$ виконується нерівність

$$f_n(\pi\lambda^r)\geq 1-\pi^2(m-1)^2\lambda^{2r}\sum_{0\leq j<l\leq m-1}p_{jn}p_{ln},$$

то маємо:

$$\prod_{j=k_M}^{+\infty}f_j(2\pi\lambda^{A_M-j})\geq 1-\pi^2(m-1)^2\sum_{r=k_M}^{+\infty}\left(\lambda^{2(A_M-r)}\sum_{0\leq j<l\leq m-1}p_{jr}p_{lr}\right)=$$

$$=1-\pi^2(m-1)^2\lambda^{2B_M}S_M\geq 1-\frac{\pi^2(m-1)^2\lambda^{2B_M}}{M}\geq 1-\frac{\pi^2(m-1)^2}{\lambda^2\sqrt{M}}.$$

Маємо:

$$|f_\psi(\pi\lambda^{A_M})|^2\geq\left(1-\frac{\pi^2H_m(r-1)^2}{1-|\lambda_1|^2}|\lambda_1|^{2B_M+2}\right)\left(1-\frac{\pi^2(m-1)^2}{\lambda^2\sqrt{M}}\right)\to 1\ \ (M\to+\infty).$$

□

2 Значення величини L_ψ.

Теорема 4. *Нехай існують натуральні числа T та S такі, що для кожного натурального $n\geq S$*

$$p_{j(n+T)}=p_{jn}\quad\forall j\in\{0,1,...,m-1\},$$

причому виконується умова (4). Тоді виконується рівність

$$L_\psi^2=\sup_{t\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,g_0(\pi t\lambda^n)\right). \tag{8}$$

Доведення. Якщо для кожного $t\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$ виконується умова (5), то за теоремою 2 маємо $L_\psi=0$. Нехай для деякого $t^*\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\,|f_\psi(2\pi t^*\lambda^n)|>0,$$

тоді зрозуміло, що $L_\psi>0$. Розглянемо випадки.

1) Нехай $S=1$. По аналогії з доведенням теореми 2 вводимо послідовність γ_n^* і переконуємось в тому, що для деякого $\gamma\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$ виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma_n^*=\gamma.$$

Зрозуміло, що для кожного $t\in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2};\frac{1}{\lambda}]$

$$L_\psi^2\geq\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,g_0(\pi t\lambda^n). \tag{9}$$

Зрозуміло, що для заданого натурального M границя $\lim_{n\to+\infty}\lambda^{MT}\gamma_n^* = \gamma\lambda^{MT}$ і враховуючи лему 5, маємо

$$\varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma_n^*) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-M}(\lambda^{MT}\pi\gamma).$$

Оскільки для достатньо великих натуральних n виконується нерівність

$$g_0(\pi t_n) \le g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma_n^*),$$

то маємо

$$L_\psi^2 \le \varlimsup_{n\to+\infty} g_{h_n-MT}(\lambda^{MT}\pi\gamma) \le g_0(\lambda^{(M-1)T}\pi\gamma).$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільного натурального M, то маємо

$$L_\psi^2 \le \varlimsup_{M\to+\infty} g_0(\lambda^{(M-1)T}\pi\gamma) \le \varlimsup_{k\to+\infty} g_0(\lambda^k\pi\gamma)$$

і враховуючи нерівність (9), отримаємо потрібне.

2) Нехай $S > 1$. Легко бачити, що для кожного $\gamma_1 \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}; \frac{1}{\lambda}]$ та $l \in \{1; 2; ...; S-1\}$ виконується умова

$$f_l(\pi\gamma\lambda^n) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi\gamma_1\lambda^n j) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} 4B_{jl}\sin^2(\pi j||\gamma_1\lambda^n||) \to 1(n \to +\infty),$$

звідки

$$\varlimsup_{M\to+\infty} g_0(\lambda^M\pi\gamma_1) = \varlimsup_{n\to+\infty} g_S(\lambda^n\pi\gamma_1),$$

що і вимагалось довести. □

Твердження 1. *Теорема 2 виражає необхідні умови того, що розподіл ψ є абсолютно неперервним. Предметом подальших досліджень може бути дослідження лебегівської структури розподілу ψ, знаходження необхідних та достатніх умов того, що $L_\psi \in \{0; 1\}$ для випадку, коли η не є числом Пізо-Віджаярагхавана.*

Список літератури

[1] Goncharenko Y. V. *Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolutions of singular distributions*. Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2002. **3**, 376–390.(in Ukrainian)

[2] Goncharenko Y. V., Mykytyuk I. O. *Behavior of the modulus of the characteristic function of a random variable with independent s-adic digits at infinity.* Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 2008. **9**, 121–127. (in Ukrainian)

[3] Makarchuk O.*Asymptotic behavior of the Fourier – Stieltjes transform of the distribution of a random power series*, Nonlinear Oscillations 2023, **26**, №4, 495 – 504. doi: 10.3842/nosc.v26i4.1450

[4] Makarchuk O. P. *Asymptotic behavior of the characteristic function of a Jessen-Wintner type distribution*, Bukovinian Mathematical Journal 2023, **11**, №2, 173 – 182. (in Ukrainian) doi: 10.31861/bmj2023.02.17

[5] Pratsiovyti M. V., Lytvynuk A. A.*Distributions of random variables represented by an s-adic fraction with an excess set of digitsDistributions of random variables represented by an s-adic fraction with an excess set of digits*, Scientific notes of the NPU named after Drahomanova 1999, **1**, 136 – 142. (in Ukrainian)

[6] Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G. *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.* Random Oper. Stochastic Equations 2007, **15**, №1, 89–97. doi: 10.1515/ROSE.2007.006

[7] Bohr H. *Fastperiodische Funktionen.* Berlin: J.Springer, (1932).

[8] Erdos P. *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math 1939, **61**, 974 – 975. doi: 10.2307/2371641

[9] Garsia A. *Arithmetic properties of Bernoulli convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc 1962, **102**, 409 – 432. doi: 10.2307/1993615

[10] Jessen B., Wintner A. *Distribution function and Riemann Zeta-function.* Trans.Amer.Math.Soc 1935, **38**, 48–88. doi: 10.2307/1989728

[11] Levy P.*Sur les sries don't les termes sont des variables independantes.* Studia math 1931, **3**, 119–155. doi: 10.4064/sm-3-1-119-155

[12] Peres Y., Schlag W., Solomyak B. *Sixty years of Bernoulli convolutions* Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability 2000, **46**, 39 – 65. doi:10.1007/978-3-0348-8380-12

[13] Pisot C. *La repartition modulo 1 et nombres algebriques,* Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 1938, **27**, 205 – 248.

[14] Schvartz L. *Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites.* C.R.Acad.Sci.Paris 1941, **212**, 418–421.

[15] Solomyak B. *On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdos problem)*, Annals of Math 1995, **142**, 611 – 625. doi: 10.2307/2118556.

[16] Vijayaraghavan T. *On the fractional parts of the powers of a number*, Proc. Cambridge Philos. Soc 1941,**37**, 349 – 357. doi: 10.1017/S0305004100017989

Надійшло 22.11.2024

Makarchuk O.P. *Asymptotic behavior of the Fourier-Stieltjes transform module of one class of generalized Bernoulli convolutions*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 108–118.

The paper investigates the asymptotic properties of the Fourier-Stieltjes transform modulus of a class of distributions of random series η, which is a generalization of classical symmetric Bernoulli convolutions. The corresponding random series η are sums of independent random variables η_k, each of which has a discrete distribution, and according to the Jessen-Wintner theorem, the distribution η is discrete or absolutely continuous or singular. According to the Levy theorem, the distribution η is discrete only if the infinite product composed of the maximum jumps η_k is convergent. Finding necessary and sufficient conditions for the distribution η to be absolutely continuous (singular) is a difficult and not completely solved problem at the moment. The main attention in this work is paid to finding necessary and sufficient conditions for the value of the upper bound of the modulus of the Fourier-Stiltjes transform of the corresponding class of distributions (of magnitude L) to be zero under certain asymptotic constraints imposed on the distributions of the terms of the random series η; finding necessary and sufficient conditions for the value of the value L to be one in the general case; calculating

the value of the value L under the condition that the corresponding distributions of the terms η are periodically repeated starting from some place.

For a discrete distribution η, the value of L is equal to one, for an absolutely continuous distribution η, the value of L is equal to zero, and for a singular distribution η, the value of L can take on an arbitrary value from the interval $[0; 1]$. Thus, the value L is in a certain sense an indicator of the proximity of the distribution η to discrete, absolutely continuous and singular, respectively. If the distribution η is continuous and the value L is positive, then this allows us to state that η has a singular distribution. Measures corresponding to distributions η for which the value L is equal to zero belong to the class of Raichmann measures, which are of high scientific interest.