Мазуренко О.В.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВПОРЯДКОВАНИХ СТРУКТУР, ЕКВІВАЛЕНТНІ ДО ПОВНОТИ ЗА ДЕДЕКІНДОМ

Як відомо, повнота за Дедекіндом є одним з основних понять дійсного аналізу, яке виникає одразу при побудові прямої дійсних чисел. Оскільки ця властивість має багато застосувань в різних ситуаціях, то природно виникають альтернативні властивості, еквівалентні до повноти за Дедекіндом. У цій статті основна увага сконцентрована на описі таких властивостей, на доведенні еквівалентності до повноти і на окремих прикладах застосувань. Зокрема, введено модифіковане означення розрізів Дедекінда, що дало змогу класифікувати їх як головні і вільні розрізи, які слугують зручними моделями раціональних і ірраціональних чисел відповідно. Розглянуто аксіоми Кантора і Архімеда і їх зв'язок з повнотою за Дедекіндом у впорядкованих полях і у впорядкованих множинах. Знайдено зв'язок між виконанням аксіоми Архімеда і наявністю зліченної всюди щільної множини у впорядкованих полях, що задовольняють аксіому Кантора.

Ключові слова і фрази: повнота за Дедекіндом, розріз Дедекінда, аксіома Архімеда, дійсна пряма, нестандартна дійсна пряма, головні і вільні розрізи.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна (Мазуренко О.В.)
e-mail: *oles.mazurenko@lnu.edu.ua (Мазуренко О.В.)*

Вступ

Автори у [1, 2, 3] описують побудову дійсних чисел як впорядкованого поля, повного за Дедекіндом, використовуючи для цього розрізи Дедекінда. У [3, 4, 5] автори переходять до нестандартного аналізу в неархімедових впорядкованих полях (які, зокрема, не є повними за Дедекіндом). Наша робота має на меті надати більше уваги повноті за Дедекіндом (чи її відсутності), що і утворює сприятливий грунт для вищезгаданих досліджень. Зокрема, ми розглянемо питання еквівалентних до повноти властивостей у лінійно впорядкованих множинах і впорядкованих полях та їх застосування у згаданих тематиках.

Лінійно впорядкована множина $(S, <)$ називається *повною за Дедекіндом*, якщо для кожної пари непорожніх підмножин A і B таких, що кожен елемент множини A менший

УДК 510
2010 *Mathematics Subject Classification:* 12J15, 06A99.

за кожен елемент множини B і в об'єднанні вони вичерпують множину S, знайдеться елемент c з S, який розділяє ці множини в сенсі $(\forall a \in A)(\forall b \in B) : a \leq c \leq b$. Таке формулювання повноти за Дедекіндом ми вважатимемо канонічним. Альтернативним популярним варіантом повноти вважається існування точної верхньої межі для обмежених підмножин. Таке формулювання в нашій роботі згадуватись не буде, а його зв'язок з канонічним формулюванням загальновідомий [6].

В розділі 1 ми розглянули поняття розрізу Дедекінда, яке було модифіковане нами спочатку з наміром зручнішої побудови дійсної прямої (див. зауваження 1), але згодом вилилося у класифікацію розрізів (вільні/головні), яка нагадує класифікацію понять в інших математичних напрямках, і, відповідно, властивість лінійно впорядкованої множини мати лише головні розрізи, еквівалентну до повноти.

В розділі 2 ми описали зв'язки між аксіомами Кантора і Архімеда та повнотою за Дедекіндом при наявності операцій (впорядковане поле) і за їх відсутності (лінійно впорядкована множина). Як наслідок, отримали умову існування зліченної всюди щільної підмножини в нестандартних моделях дійсних чисел (тобто в моделях, які відрізняються від стандартної моделі дійсних чисел невиконанням однієї з аксіом другого порядку, в нашому випадку – аксіоми Архімеда). За таким принципом показали відсутність зліченної всюди щільної множини в нестандартній прямій $^*\mathbb{R}$, що є фактор множиною раціональних послідовностей за відношенням еквівалентності, побудованим на основі рівності "великої" кількості координат в сенсі ультрафільтра на натуральних числах (детальніше про розширення фільтра Фреше до ультрафільтра описано у [5]).

В результаті, для впорядкованих полів отримали наступні властивості, еквівалентні до повноти за Дедекіндом (схематично).

$$\textit{Головні розрізи} \iff \textit{повнота за Дедекіндом} \iff \textit{Кантор + Архімед}$$
$$\iff \textit{Існування супремуму}$$

Попередні відомості

Надалі під "повнотою" маємо на увазі повноту за Дедекіндом, під "розрізом" маємо на увазі розріз Дедекінда, а під "впорядкованою множиною" — лінійно впорядковану множину.

Впорядкованою множиною називаємо математичну структуру $(S, <)$, де відношення $<$ є іррефлексивним, транзитивним і лінійним (всі елементи S порівняльні).

Впорядкованим полем називаємо математичну структуру $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$, яка є одночасно полем і впорядкованою множиною, наділеною відношенням $<$ сумісним з операціями $+, \cdot$.

Пишучи $A = \downarrow A$, маємо на увазі, що множина A збігається зі своїм нижнім класом, тобто разом з кожним своїм елементом містить всі менші елементи простору. Аналогічно під $B = \uparrow B$ маємо на увазі, що множина B збігається зі своїм верхнім класом, тобто разом з кожним своїм елементом містить всі більші елементи простору.

Якщо елементом нерівності є множина, то маємо на увазі, що нерівність виконується для кожного елемента цієї множини. Наприклад, пишучи $a < A$, розуміємо, що

$\forall x \in A : a < x$.

Зліченною називаємо множину, з якої можна побудувати ін'єктивне відображення у множину натуральних чисел $\mathbb{N}$. Зауважимо, що непорожня множина A є зліченною тоді і тільки тоді, коли $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для деякої послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Вільні та головні розрізи Дедекінда. Їх зв'язок з повнотою.

Визначення розрізу Дедекінда, запропоноване нами нижче, дещо відрізняється від стандартних, описаних, наприклад, у [1, 2]. Така модифікація зумовлена низкою обґрунтованих згодом міркувань, зокрема, прагненням до зручності та ефективності використання цього визначення.

Означення. *Впорядкована пара (A, B) непорожніх неперетинних підмножин деякої лінійно впорядкованої множини $(S, <)$ називається* розрізом Дедекінда *в множині S, якщо множина A не має максимального елемента, множина B не має мінімального елемента і виконується наступна умова*

$$\forall a, b \in S : (a < b) \implies (a \in A \vee b \in B.) \tag{1}$$

Для (дещо комплексної) умови (1), справедлива наступна характеризація.

Твердження 1. *Нехай $(S, <)$ лінійно впорядкована множина, непорожня підмножина $A \subset S$ не має максимуму, непорожня підмножина $B \subset S$ не має мінімуму і множини A, B неперетинні.*

Пара множин (A, B) є розрізом Дедекінда тоді і тільки тоді, коли $A = {\downarrow}A$, $B = {\uparrow}B$ і об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S за винятком, можливо, однієї точки.

Доведення. Нехай маємо розріз Дедекінда (A, B). Припустимо, що $A \neq {\downarrow}A$, тобто для деякого елемента $a \in A$

$$(\exists\, c \in S \setminus A) : c < a$$

Тоді за умовою (1) отримаємо $a \in B$, що суперечить неперетинності множин A і B. Отже, $A = {\downarrow}A$. Аналогічно отримуємо $B = {\uparrow}B$.

Тепер припустимо, що об'єднання $A \cup B$ не покриває більше однієї точки множини S, зокрема не покриває дві різні точки $a, b \in S$. За лінійністю порядку ці точки порівнянні, тому нехай для визначеності $a < b$. Звідси за умовою (1) отримуємо $(a \in A) \vee (b \in B)$, що суперечить непокритості обидвох точок об'єднанням $A \cup B$. Необхідність доведено.

Нехай тепер множини A, B такі, як сказано в умові твердження, і $A = {\downarrow}A$, $B = {\uparrow}B$, об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S за винятком, можливо, однієї точки. Перевіримо виконання умови (1). Нехай маємо $a, b \in S : a < b$. З умови $|S \setminus (A \cup B)| \leq 1$ отримаємо, що $a \in (A \cup B) \vee b \in (A \cup B)$. Якщо $a \in (A \cup B)$, то $a \in A$ або $a \in B$, звідки, враховуючи $B = {\uparrow}B$, отримуємо $b \in B$. Якщо $b \in (A \cup B)$, то $b \in B$ або $b \in A$, звідки, враховуючи $A = {\downarrow}A$, отримуємо $a \in A$. В кожному випадку, $a \in A$ або $b \in B$. Отже, умова (1) виконується і пара множин (A, B) є розрізом Дедекінда. □

Природно з твердження 1 випливає наступна класифікація розрізів Дедекінда.

Означення. *Розріз Дедекінда* (A, B) *у лінійно впорядкованій множині* $(S, <)$ *називають* вільним розрізом, *якщо* $A \cup B = S$, *тобто немає непокритої точки.*

Означення. *Розріз Дедекінда* (A, B) *у лінійно впорядкованій множині* $(S, <)$ *називають* головним розрізом, *якщо* $A \cup B \neq S$, *тобто множини* A *і* B *розділяє єдина непокрита точка.*

З нової класифікації розрізів Дедекінда, введеної вище, отримуємо наступну властивість лінійно впорядкованої множини, еквівалентну до повноти за Дедекіндом.

Теорема 1. *Лінійно впорядкована множина* $(S, <)$ *є повною за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кожен розріз Дедекінда в* S *є головним.*

Доведення. Нехай лінійно впорядкована множина $(S, <)$ повна за Дедекіндом.

Припустимо протилежне, тобто що існує розріз Дедекінда (A, B) у множині S, який не є головним, тобто $A \cup B = S$. Оскільки (A, B) розріз, то множини A і B непорожні і $A < B$. Тоді з повноти множини S за Дедекіндом маємо

$$\exists\, c \in S : A \leq c \leq B.$$

Оскільки об'єднання $A \cup B$ покриває всю множину S, то елемент c лежить в одній з множин A, B. Якщо $c \in A$, то, враховуючи нерівність $A \leq c$, c є максимальним елементом множини A. Якщо ж $c \in B$, то, враховуючи іншу частину нерівності $c \leq B$, c є мінімальним елементом B. Кожен з цих випадків суперечить означенню розрізу Дедекінда, а тому кожен розріз Дедекінда в S є головним.

Нехай тепер кожен розріз Дедекінда в S є головним. Візьмемо довільну пару множин (A, B), які задовольняють умови, накладені на пару множин в означенні повноти за Дедекіндом, тобто A, B непорожні, $A \cup B = S$ і $A < B$.

Якщо множина A має максимальний елемент c або множина B має мінімальний елемент c, то $A \leq c \leq B$ і c є шуканим елементом і множина S повна за Дедекіндом. В іншому випадку ми стверджуємо, що пара множин (A, B) буде розрізом Дедекінда в S. Для цього залишилось показати, що вона задовольняє умову (1). Маємо $A \cup B = S$. Також $A = {\downarrow}A$, бо якщо припустимо протилежне, що для деякого $a \in A$ маємо $\exists\, a^* \in S \setminus A : a^* < a$ отримуємо $a^* \in B$, що суперечить $A < B$. Аналогічно можна показати, що $B = {\uparrow}B$.

Таким чином, за твердженням 1 пара (A, B) є розрізом Дедекінда в S. Оскільки кожен розріз Дедекінда в S головний, то $A \cup B \neq S$, а це суперечність, яка показує, що розглянутого випадку, коли множина A не має максимуму, а множина B не має мінімуму, не може існувати. □

Запропонований нетрадиційний підхід до введення розрізів Дедекінда може бути застосований, наприклад, для зручнішого введення структури дійсних чисел при застосуванні методу поповнення раціональних чисел розрізами Дедекінда (стандратний варіант описаний, наприклад, у [1]) і для більш лаконічного доведення властивостей цієї структури.

Зауваження 1. *Таке застосування можливе завдяки тому, що означені нами головні і вільні розрізи Дедекінда є зручними моделями для раціональних і ірраціональних чисел відповідно.*

Нехай маємо впорядковане поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Раціональне число $q \in \mathbb{Q}$ може бути ототожнене з головним розрізом дедекінда $(\overleftarrow{q}, \overrightarrow{q})$, де

$$\overleftarrow{q} = \{q^* \in \mathbb{Q} \mid q^* < q\} \ i \ \overrightarrow{q} = \{q^* \in \mathbb{Q} \mid q^* > q\},$$

а множина ірраціональних чисел може бути подана, як множина всіх вільних розрізів Дедекінда

$$\mathbb{I} = \{(A, B) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | (A, B) \text{ вільний розріз Дедекінда}\}$$

Таким чином множина $\mathbb{R}$, отримана при поповненні $\mathbb{Q}$ вільними розрізами Дедекінда $\mathbb{I}$ буде складатися тільки з розрізів Дедекінда. Ця однорідність спростить введеня операцій і порядку на $\mathbb{R}$, а також доведення аксіом поля, впорядкованої множини і повноти за Дедекіндом.

Аксіоми Кантора і Архімеда як альтернатива повноти

Означення. *Впорядковане поле $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$ задовольняє* аксіому Архімеда, *якщо*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N}) : n \cdot \varepsilon > 1$$

Означення. *Впорядкована множина $(S, <)$ задовольняє* аксіому Кантора, *якщо довільна послідовність вкладених відрізків з S має непорожній перетин. Тобто*

$$\forall ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N}\, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]) \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Твердження 2. *Лінійно впорядкована множина $(S, <)$ задовольняє аксіому Кантора тоді і тільки тоді, коли довільна послідовність вкладених відрізків $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ з S така, що послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є строго монотонними, має непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність напряму випливає з означення аксіоми Кантора. Доведемо достатність. Нехай маємо довільну послідовність вкладених відрізків $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Припустимо, що $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, m \in \mathbb{N}) : (a_n < a_m) \wedge (b_m < b_n)$. Тоді можемо побудувати підпослідовність вкладених відрізків $([a_{n_k}, b_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$, в якої відповідні послідовності кінців відрізків є строго монотонними. Застосувавши умову теореми отримаємо, що існує $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{n_k}, b_{n_k}]$. Розглянемо довільний відрізок $[a_n, b_n]$ з початкової послідовності. Взявши $k \in \mathbb{N}$ таке, що $n < n_k$, отримаємо, що $c \in [a_{n_k}, b_{n_k}] \subseteq [a_n, b_n]$. Таким чином $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Тепер нехай $(\exists\, n^* \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : (a_m \leq a_{n^*}) \vee (b_{n^*} \leq b_m)$. Оскільки маємо вкладені відрізки, то $\forall m > n^*$ маємо $a_m = a_{n^*}$, або $\forall m > n^*$ маємо $b_{n^*} = b_m$, що в свою чергу дає $\{a_{n^*}, b_{n^*}\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$. Звідки $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

В обох випадках (які є взаємно протилежними) аксіома Кантора задовольняється. Теорему доведено. □

Відомим фактом [6, 7] є наступна теорема про еквівалентність між повнотою за Дедекіндом і виконанням аксіом Кантора та Архімеда.

Теорема 2. *Впорядковане поле $(S, <, +, \cdot, 0, 1)$ є повним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє аксіому Кантора та аксіому Архімеда.*

Доведення. Дивитись у [6, 7]. □

Зауважимо, що аксіома Кантора і повнота за Дедекіндом є порядковими властивостями, в той час як аксіома Архімеда потребує наявності операцій. Природно виникає запитання про зв'язок згаданих порядкових аксіом при відсутності операцій.

Теорема 3. *Якщо впорядкована множина $(S, <)$ є повною за Дедекіндом, то вона задовольняє аксіому Кантора.*

Доведення. Нехай маємо впорядковану множину $(S, <)$, яка є повною за Дедекіндом. Припустимо, що аксіома Кантора не задовольняється, тобто існує послідовність вкладених відрізків $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ з множини S, така що $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \varnothing$. Причому за твердженням 2 можемо вважати, що послідовності кінців цих відрізків строго монотонні. Задамо множини A та B наступним чином

$$A = \{a \in S \mid a < a_1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, a_{n+1}]$$

$$B = \{b \in S \mid b_1 < b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[b_{n+1}, b_n].$$

Переконаємось що задані множини задовольняють умови, накладені на пару множин в означенні повноти за Дедекіндом. За побудовою множин очевидно, що $A, B \subseteq S$ і $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$. За припущенням $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \varnothing \implies A \cup B = S$. Оскільки послідовності кінців відрізків є строго монотонними, то кожен відрізок $[a_n, b_n]$ невироджений. Тобто $a_n < b_n$ для всіх $n \in \ltimes$, звідки отримаємо $A < B$. Таким чином, з повноти множини S за Дедекіндом, отримаємо

$$(\exists c \in S)(\forall a \in A)(\forall b \in B) : a \leq c \leq b.$$

Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $a_n \in A, b_n \in B$, то отримаємо $\forall n \in \mathbb{N} : c \in [a_n, b_n]$, що суперечить припущенню. Отже, аксіома Кантора задовольняється. □

Теорема 4. *Якщо впорядкована множина $(S, <)$, яка містить зліченну всюди щільну підмножину Q, задовольняє аксіому Кантора, то вона є повною за Дедекіндом.*

Доведення. Нехай маємо впорядковану множину $(S, <)$, яка задовольняє аксіому Кантора і містить зліченну всюди щільну підмножину Q.

Візьмемо довільні множини A, B, які задовольняють умови, накладені в означенні повноти за Дедекіндом, тобто A, B непорожні, $A < B$ і $A \cup B = S$. Якщо множина A містить максимальний елемент c або множина B містить мінімальний елемент c, то c і є шуканим, таким що $A \leq c \leq B$ і S повна за Дедекіндом.

Розглянемо випадок, коли множина A не має максимуму, а множина B не має мінімуму. Оскільки всюди щільна множина Q зліченна, а множини A, B непорожні, то можемо окремо занумерувати елементи з Q, які належать множині A, і елементи з Q, які належать множині B. Нехай $A \cap Q = \{a_1, a_2, \dots\}$ і $B \cap Q = \{b_1, b_2, \dots\}$ довільні нумерації відповідних множин (можливо з повтореннями). Тепер утворимо з цих довільних нумерацій послідовності $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, задавши їх наступним чином.

$$a_n^* = \max\{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{та} \quad b_n^* = \min\{b_1, \dots, b_n\}$$

Очевидно, що послідовність $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно неспадна, а послідовність $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно незростаюча. Тому ми отримали послідовність вкладених відрізків $([a_n^*, b_n^*])_{n\in\mathbb{N}}$. За аксіомою Кантора існує такий елемент $c \in S$, що $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n^*, b_n^*]$. Покажемо, що $A \le c \le B$.
Припустимо протилежне, тобто що існує такий елемент $a' \in A$, що $c < a'$. Оскільки множина A не має максимуму, то існує елемент $a'' \in A$ такий, що $c < a' < a''$. Тоді оскільки інтервал (c, a'') непорожній, то за всюди щільністю множини Q між елементами c і a'' існує деякий елемент $a_k \in Q$ і, як наслідок, для нього правильна нерівність $c < a_k \le a_k^*$. Враховуючи, що a_k^* є лівим кінцем k-го вкладеного відрізка, отримана нерівність суперечить тому, що елемент c належить всім вкладеним відрізкам. Отже, $A \le c$. За аналогічними міркуваннями $c \le B$. Таким чином $A \le c \le B$ і S повна за Дедекіндом. □

З теореми 2 і теорем 3, 4 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Якщо впорядковане поле, яке містить зліченну всюди щільну підмножину, задовольняє аксіому Кантора, то воно задовольняє аксіому Ахімеда.*

Цей наслідок дає нам змогу досліджувати наявність зліченної всюди щільної підмножини в складніших структурах, таких як, наприклад, нестандартна дійсна пряма. Детальніше означення цієї структури та доведення виконання аксіом впорядкованого поля розглянуте, наприклад, у [3, 4, 5].

Нехай $\mathcal{U}$ вільний ультрафільтр на ω, який є розширенням фільтра Фреше $\mathcal{F}_r = \{A \subseteq \omega \mid \omega \setminus A \text{ скінченна множина}\}$. На множині $\mathbb{Q}^\omega = \{(a_n)_{n\in\omega} \mid \forall n \in \omega : a_n \in \mathbb{Q}\}$ задамо відношення еквівалентності $\sim$ наступним чином

$$(a_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega} \iff \{n \in \omega \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Фактор–множину ${}^*\mathbb{R} = \{\sim(a_n)_{n\in\omega} \mid (a_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{Q}^\omega\}$ називатимемо нестандартною дійсною прямою. Надалі через $[\alpha]$ будемо позначати клас еквівалентності за відношенням $\sim$ з представником $\alpha = (a_n)_{n\in\omega}$. Також $\alpha(n)$ – n-тий член послідовності α.

Порядок і операції на ${}^*\mathbb{R}$ задаються наступним чином

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \qquad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta],$$

де $\alpha + \beta$ і $\alpha \cdot \beta$ – операції покоординатного додавання і множення послідовностей.

$$<_* = \{([\alpha], [\beta]) \in {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \mid \{n \in \omega \mid \alpha(n) < \beta(n)\} \in \mathcal{U}\}.$$

Теорема 5. *Нестандартна пряма* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *задовольняє аксіому Кантора.*

Доведення. Введемо позначення $u_k = [\alpha_k]$ і $v_k = [\beta_k]$. Розглядаємо довільну послідовність $([u_k, v_k])_{k\in\mathbb{N}}$ вкладених відрізків у впорядкованому полі ${}^*\mathbb{R}$. За твердженням 2 без зменшення загальності вважатимемо, що відповідні послідовності кінців відрізків є строго монотонними. Нам потрібно знайти принаймні один елемент $u \in {}^*\mathbb{R}$ такий, що $u \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[u_k, v_k]$, тобто $u_k <_* u <_* v_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Ми знаємо, що

$$u_1 <_* u_2 <_* u_3 <_* \cdots <_* v_3 <_* v_2 <_* v_1. \tag{2}$$

Але враховуючи означення порядку $<_*$, такі нерівності виконуються не для всіх членів відповідних послідовностей. Утворимо послідовність множин $\tilde{U}_k \subseteq \mathbb{N}$ таку, що

$$\tilde{U}_k = \{n \in \omega \mid \alpha_1(n) < \cdots < \alpha_k(n) < \beta_k(n) < \cdots < \beta_1(n)\}. \tag{3}$$

Тобто множина $\tilde{U}_k$ містить ті номери членів послідовностей-представників елементів з (2), для яких виконуються відповідні нерівності щонайменше для перших k вкладених відрізків. З побудови для всіх $k \in \mathbb{N}$ маємо $\tilde{U}_k \supseteq \tilde{U}_{k+1}$. Зауважимо також, що множину $\tilde{U}_k$ можна подати у вигляді наступного перетину

$$\tilde{U}_k = \left(\bigcap_{i=2}^{k}\{n \in \omega \mid \alpha_{i-1}(n) < \alpha_i(n)\}\right) \cap \{n \in \omega \mid \alpha_k(n) < \beta_k(n)\} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{k}\{n \in \omega \mid \beta_i(n) < \beta_{i-1}(n)\}\right).$$

Причому, враховуючи нерівності (2), кожна з використаних множин належить ультрафільтру $\mathcal{U}$ за означенням порядку $<_*$. А отже, $\tilde{U}_k \in \mathcal{U}$ як перетин скінченної кількості множин з ультрафільтра $\mathcal{U}$.

Тепер додатково перетнемо кожну з множин $\tilde{U}_k$ з променем натуральних чисел $[k, +\infty) = \{n \in \omega \mid n \geq k\}$, отримавши при цьому послідовність $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\tilde{U}_k \cap [k, +\infty))_{k\in\mathbb{N}}$. Враховуючи, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ маємо $[k, +\infty) \supset [k+1, +\infty)$ і $[k, +\infty) \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{U}$, ми не втратимо згаданих вище властивостей послідовності $(\tilde{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ при переході до послідовності $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$, але тепер також матимемо $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \varnothing$. Це дозволить нам коректно задати шукані елементи.

Задамо два елементи $u = [\alpha(n)], v = [\beta(n)]$ з ${}^*\mathbb{R}$ наступним чином

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \forall n \in (U_k \setminus U_{k+1}) : \quad \alpha(n) = \alpha_k(n) \quad \text{та} \quad \beta(n) = \beta_k(n). \tag{4}$$

Таким чином, ми задали тільки ті члени послідовностей-представників елементів u, v, номери яких входили в U_1. Щоб задання було коректним, довизначимо

$$\forall n \in (\mathbb{N} \setminus U_1) : a(n) = \alpha_1(n), \beta(n) = \beta_1(n).$$

З того що $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in U_k) : \alpha_k(n) < \beta_k(n)$ за побудовою (3), випливає $\{n \in \omega \mid \alpha(n) < \beta(n)\} \supseteq U_1 \in \mathcal{U}$, тобто $u <_* v$.

Зафіксуємо довільне $k^* \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх натуральних $k > k^*$ за побудовою (3), (4) маємо

$$\forall n \in U_k \setminus U_{k+1} : \alpha_{k^*}(n) < \alpha_k(n) = \alpha(n) < \beta(n) = \beta_k(n) < \beta_{k^*}(n).$$

А отже, таке твердження правильне і для всіх $n \in \bigcup_{k=(k^*+1)}^{\infty}(U_k \setminus U_{k+1}) = U_{k^*+1}$. В результаті отримали, що $U_{k^*+1} \subseteq \{n \in \omega \mid \alpha_{k^*}(n) < \alpha(n) < \beta(n) < \beta_{k^*}(n)\}$. Звідси, оскільки $U_{k^*+1} \in \mathcal{U}$, отримуємо $u_{k^*} <_* u <_* v <_* v_{k^*}$ для довільного $k^* \in \mathbb{N}$. А це означає, що $[u, v] \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty}[u_k, v_k]$, тобто перетин довільної послідовності вкладених відрізків в ${}^*\mathbb{R}$ не тільки містить хоча б одну точку з ${}^*\mathbb{R}$, а й містить цілий невироджений відрізок $[u, v]$ з ${}^*\mathbb{R}$. Отже, впорядковане поле $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ задовольняє аксіому Кантора. □

Теорема 6. *Нестандартна пряма* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *не задовольняє аксіому Архімеда.*

Доведення. Приклад нескінченно малого/великого числа побудовано у [5]. □

Таким чином, з теорем 5, 6 та наслідку 1 випливає наступне.

Наслідок. *Модель нестандартних дійсних чисел* $({}^*\mathbb{R}, <_*, +, \cdot, 0, 1)$ *не містить зліченної всюди щільної підмножини.*

Список літератури

[1] Goldrei D. Classic Set Theory – For guided independent study. Chapman & Hall, London, 1996.

[2] Landau E. Grundlagen der Analysis: das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

[3] Krapp L. Constructions of the real numbers a set theoretical approach. Oxford, 2014.

[4] Lindstrom T. An invitation to nonstandard analysis. Cambridge University Press, London, 1988.

[5] Garcia M. *Filters and Ultrafilters in Real Analysis*, 2012, https://arxiv.org/abs/1212.5740

[6] Bartle R., Sherbert D. Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons, USA, 1982.

[7] Tao T. Analysis I. Springer, Heidelberg, 2006.

Надійшло 27.11.2024

Mazurenko O.V. *On some properties of ordered structures equivalent to Dedekind completeness*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 98–107.

As is well known, the Dedekind completeness is one of fundamental concepts of Real Analysis, arising immediately in the construction of the real number line. Since this property has numerous applications in various contexts, it is natural to consider alternative properties equivalent to Dedekind completeness. This paper focuses on expressing the property of Dedekind completeness through Dedekind cuts. The definition of cuts has been slightly modified, so that rational and irrational numbers are defined uniformly as principal and free cuts, which allows to simplify the routine verification of standard properties of real numbers.

The Cantor and Archimedean axioms are also examined as alternatives to Dedekind completeness in ordered fields. Furthermore, the relationship between the Cantor axiom and

Dedekind completeness (which, unlike the Archimedean axiom, are purely order-theoretic properties) is explored in ordered sets, where they are shown to be equivalent under the presence of a countable dense subset. From these relationships, a criterion for the existence of a countable dense subset in nonstandard models of real numbers is derived. These models differ from the standard model of real numbers by failing to satisfy one of second-order axioms, in this case, the Archimedean axiom.