

МАЦЕНКО В.Г.

**АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ТИПУ СКЕЛЛАМА З ПЕРІОДИЧНИМИ РЕЖИМАМИ**

Розглянуто узагальнення моделі Скеллама. Висвітлено питання існування та стійкості стаціонарних і періодичних розв'язків моделі без збору та зі збором урожаю. Проведено комп'ютерний аналіз розв'язків моделі.

*Ключові слова і фрази:* дискретні моделі, модель Скеллама, стаціонарні розв'язки, періодичні розв'язки, стійкість, збір урожаю.

---

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: [v.matsenko@chnu.edu.ua](mailto:v.matsenko@chnu.edu.ua)

**ВСТУП**

Для багатьох реальних біологічних популяцій їх стан у момент часу  $t$  залежить від стану в попередні моменти часу. Це популяції з неперервними поколіннями, тобто ті, в яких ріст чисельності відбувається в дискретні моменти часу. До таких популяцій можна віднести багато видів комах з однорічною генерацією.

Математичні моделі таких популяцій пов'язують чисельності популяції  $N_{t+1}$  в момент часу  $t + 1$  з чисельностями в попередні моменти часу. Динаміка чисельності таких популяцій у простішому випадку описується рівняннями вигляду

$$N_{t+1} = f(N_t)N_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де  $N_t$  – чисельність популяції в момент часу  $t$ , а  $f(\cdot)$  – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір  $R^+ = [0, \infty)$  в  $R^+$ . Серед дискретних рівнянь (1) в екології найвідоміші дискретна логістична модель, модель Рікера та модель Скеллама.

Оскільки при практичному використанні природних ресурсів важливо, щоб експлуатація популяцій не призводила до їх знищення, а відбувалося відновлення природних ресурсів, то в працях [1, 2] ці моделі вивчаються з ефектом збору врожаю. Такі моделі дозволяють здійснити кількісний аналіз антропогенної діяльності і забезпечити раціональне використання природного ресурсного потенціалу.

---

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

У дискретних моделях знання про характер процесів виживання й народжування виражається в єдиному популяційному показнику – коефіцієнті природного відтворення (або коефіцієнт розмноження)

$$f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}.$$

Коефіцієнт природного відтворення – це середня кількість потомків, яка припадає на одну особину, що існувала в момент часу  $t$ .

Якщо припустити, що вплив саморегулюючих внутрішньопопуляційних факторів із ростом чисельності тільки посилюється, то коефіцієнт розмноження вибирають у вигляді монотонних спадних функцій.

У моделі Скеллама коефіцієнт розмноження має вигляд спадної гіперболічної функції, тобто

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}, \quad (2)$$

де параметр  $a$  задає найбільше значення розмноження, а коефіцієнт  $b$  описує вплив саморегулюючих механізмів на популяційну динаміку.

Модель Скеллама була запропонована в праці [3] в 1951 р. і відтоді широко використовується для опису динаміки чисельності дискретних популяцій.

У праці [2] вивчаються узагальнення моделі Скеллама на випадок, коли коефіцієнт розмноження має вигляд

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^2} \quad \text{та} \quad f(N_t) = \frac{aN_t}{b + N_t^2}. \quad (3)$$

Також тут здійснено аналіз цих моделей з ефектом збору урожаю з постійною інтенсивністю  $c$ . Показано, що в усіх цих випадках при певних обмеженнях на параметри  $a$ ,  $b$ ,  $c$  рівняння Скеллама допускають лише монотонну стабілізацію чисельності популяції до деякого стаціонарного рівня. Циклічні режими відсутні, тоді як логістичне дискретне рівняння та модель Рікера мають періодичні розв'язки.

У даній статті знайдено таке узагальнення моделі Скеллама, яке допускає існування і періодичних розв'язків. Це відбувається тоді, коли

$$f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}.$$

Для моделі з таким коефіцієнтом розмноження проведено дослідження з м'якою стратегією збору врожаю.

## 1 АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ СКЕЛЛАМА

У праці [2] досліджується модель Скеллама та її узагальнень. У рамках цих моделей спостерігалися режими з монотонною стабілізацією чисельності популяцій.

Проте, як з'ясувалося, існують узагальнення моделі Скеллама, які, крім стаціонарних розв'язків, мають і періодичні розв'язки різних періодів. Такою моделлю є дискретне рівняння вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3} \equiv F(N_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad a, b > 0. \quad (4)$$

Розв'язати рівняння (4) в аналітичній формі не вдається, але можна знайти стаціонарні та періодичні розв'язки й дослідити їх на стійкість. Це рівняння має нульовий розв'язок  $N_0^* = 0$ . Ненульові стаціонарні стани знаходяться зі співвідношення  $N^3 = a - b$ , тобто  $N_1^* = \sqrt[3]{a - b}$ .  $N_1^*$  набуває додатні значення при  $a > b$ .

Для дослідження стаціонарних точок на стійкість знайдемо мультиплікатор динамічної системи (4).

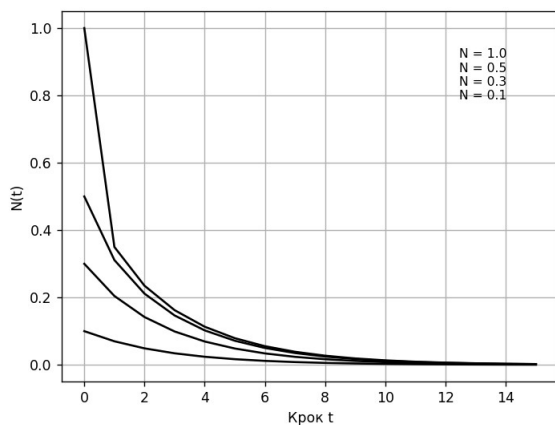
Маємо

$$F'(N) = \frac{a(b - 2N^3)}{(b + N^3)^2}.$$

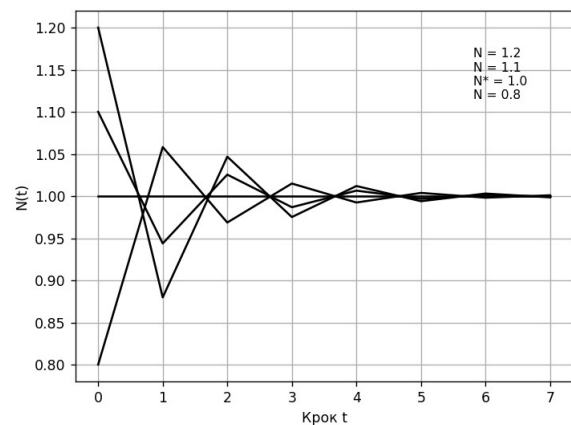
Оскільки при  $0 < a < b$   $F'(0) = \frac{a}{b} < 1$ , то нульовий розв'язок стійкий (рис. 1а).

При  $a > b$  нульовий розв'язок перестає бути стійким і водночас з'являється ненульовий розв'язок  $N_1^* > 0$ , який буде стійким за умови  $|F'(N_1^*)| < 1$ , тобто при  $\left|3\frac{b}{a} - a\right| < 1$ , або  $\frac{a}{3} < b < a$  (рис. 1б).

Якщо  $b < \frac{a}{3}$ , то існуючий стаціонарний розв'язок перестає бути стійким, зокрема, при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$  стаціонарний розв'язок  $N^* = \sqrt[3]{a - b} = 0.9654$  нестійкий. У цьому випадку ( $a > 3b$ ) можуть з'явитися періодичні розв'язки.



а



б

Рис. 1. Ілюстрація стійкості стаціонарних розв'язків рівняння (4) а –  $a = 0.7$ ,  $b = 1$ ; б –  $a = 2$ ,  $b = 1$  ( $\frac{a}{3} < b < a$ )

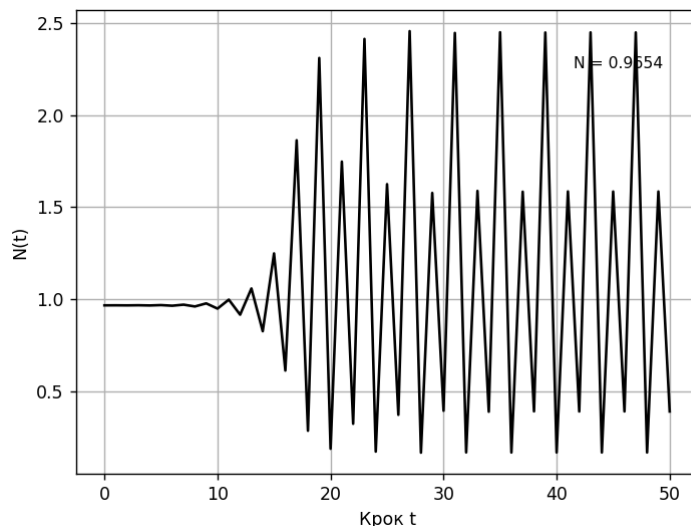


Рис. 2. Нестійкість стаціонарного розв'язку  $N^* = 0.9654$  рівняння (4) при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$  ( $a > 3b$ )

Перейдемо до дослідження існування періодичних розв'язків і їх стійкості. Спочатку розглянемо випадок періоду  $T = 2$ , тобто коли  $N_{t+2} = N_t$  для  $t = 0, 1, 2, \dots$

З (4) маємо

$$N_t = \frac{a^2 N_t (b + N_t^3)^2}{b (b + N_t^3)^3 + (a N_t)^3}, \tag{5}$$

або якщо запровадити заміну  $N_t^3 = x$ , то рівняння (5) набуває вигляду

$$bx^3 + (3b^2 - a^2)x^2 + (3b^3 - 2a^2b + a^3)x + b^4 - a^2b^2 = 0. \tag{6}$$

Відомо, що це рівняння має корінь  $a - b$ , оскільки  $N_t = \sqrt[3]{a - b}$  задовольняє умову періодичності  $N_{t+2} = N_t$ .

Розділивши (6) на  $x - (a - b)$ , одержуємо рівняння

$$bx^2 + (2b^2 - a^2 + ba)x + b^3 + b^2a = 0, \tag{7}$$

коренями якого є

$$x_{1,2} = \frac{a^2 - 2b^2 - ba \pm \sqrt{a^4 - 3a^2b^2 - 2a^3b}}{2b}. \tag{8}$$

Дискримінант цього рівняння  $D = a^2(a^2 - 3b^2 - 2ab)$  при  $b < \frac{a}{3}$  додатний, оскільки  $a^2 - 3b^2 - 2ab > a^2 - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2a\frac{a}{3} = 0$ .

Зокрема, при  $b = 1, a = 4$  ( $a > 3b$ )  $D = 5 > 0$ , а при  $a = 2, b = 1$  ( $a < 3b$ )  $D = -3 < 0$ . Крім цього, при  $a > 3b$

$$a^2 - 2b^2 - ab > a^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a}{3}a = \frac{4}{9}a^2 > 0,$$

$$a^2 - 2b^2 - ab > \sqrt{(2b^2 - a^2 - ab)^2 - 4b(b^3 + b^2a)}.$$

Тому рівняння (7), в цьому випадку, має два різні додатні корені. Це означає, що при  $b < \frac{a}{3}$  у рівняння (4) з'являється додатний періодичний розв'язок  $N_1^* = \sqrt[3]{x_1}$ ,  $N_2^* = \sqrt[3]{x_2}$  з періодом  $T = 2$ , а стаціонарна точка  $N_1^* = \sqrt[3]{a-b}$  перестає бути стійкою.

Проведемо дослідження цього періодичного розв'язку на стійкість. Для цього обчислимо мультиплікатор

$$\mu = \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} \cdot \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} = \frac{a^2 (b - 2(N_1^*)^3)}{(b + (N_1^*)^3)^2} \cdot \frac{b - 2(N_2^*)^3}{(b + (N_2^*)^3)^2} = a^2 \cdot \frac{b - 2x_1}{(b + x_1)^2} \cdot \frac{b - 2x_2}{(b + x_2)^2}.$$

Враховуючи вирази (8), одержуємо значення мультиплікатора  $\mu$  в коефіцієнтній формі

$$\mu = \frac{9b^2 + 6ab - 2a^2}{a^2}.$$

З умови стійкості  $\left| 9 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 6 \frac{b}{a} - 2 \right| < 1$  встановлюємо, що існуючий періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$  стійкий при

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3}a < b < \frac{a}{3}. \quad (9)$$

Це означає, що при  $b < \frac{\sqrt{2}-1}{3}a$  періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$  перестає бути стійким і з'являється стійкий періодичний розв'язок довжиною чотири.

Зокрема, при  $b = 1$ ,  $a = 4$  для рівняння (7) маємо квадратне рівняння  $x^2 - 10x + 5 = 0$ . Звідки  $x_1 = 9.472$ ,  $x_2 = 0.528$ . Тому  $N_1^* = 2.1158$ ,  $N_2^* = 0.8082$  – це значення, що складають періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$ . При цьому  $\mu = 0.0628$ , що означає стійкість періодичного розв'язку (рис. 3а).

При  $b = 3$ ,  $a = 10$  квадратне рівняння  $3x^2 - 52x + 117 = 0$  має корені  $x_1 = 14.6759$ ,  $x_2 = 2.6504$ , тобто періодичний розв'язок задається двома числами:  $N_1^* = 2.4483$ ,  $N_2^* = 1.3839$ . Мультиплікатор  $\mu = 0.5879 < 1$ , що забезпечує стійкість цього розв'язку (рис. 3б).

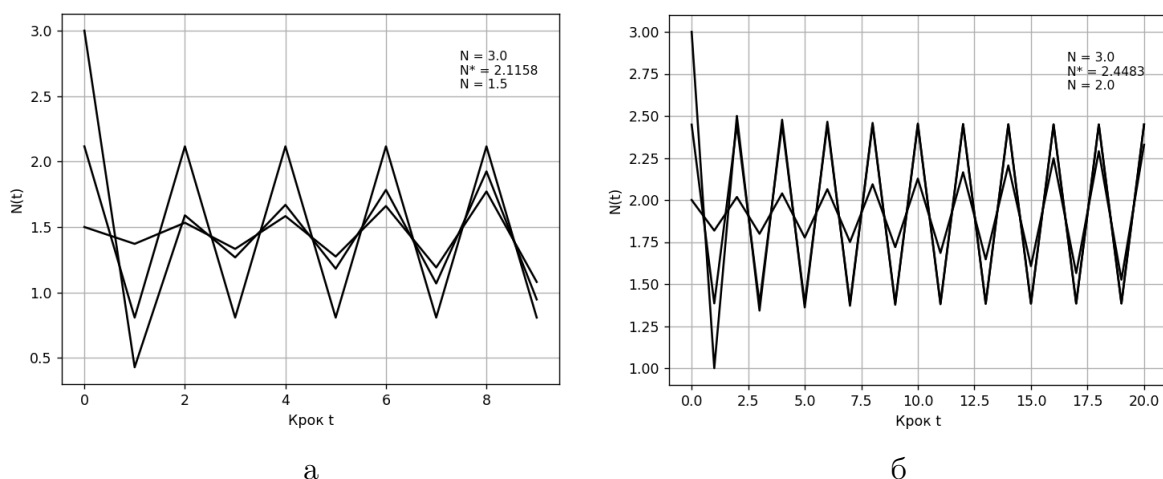


Рис. 3. Існування та стійкість періодичних розв'язків рівняння (4) з періодом  $T = 2$ : а –  $b = 1$ ,  $a = 4$ , ( $a > 3b$ ),  $N_1^* = 2.1158$ ,  $N_2^* = 0.8082$ ; б –  $b = 3$ ,  $a = 10$ , ( $a > 3b$ ),  $N_1^* = 2.4483$ ,  $N_2^* = 1.3852$

При  $b = 0.1$ ,  $a = 1$  рівняння (7) має вигляд

$$x^2 - 8.8x + 0.11 = 0.$$

Звідки  $x_1 = 8.7875$ ,  $x_2 = 0.0125$ , що дає  $N_1^* = 2.06358$ ,  $N_2^* = 0.23219$ . Значення мультиплікатора  $\mu = 1.31 > 1$ , тому цей періодичний розв'язок нестійкий (рис. 4).

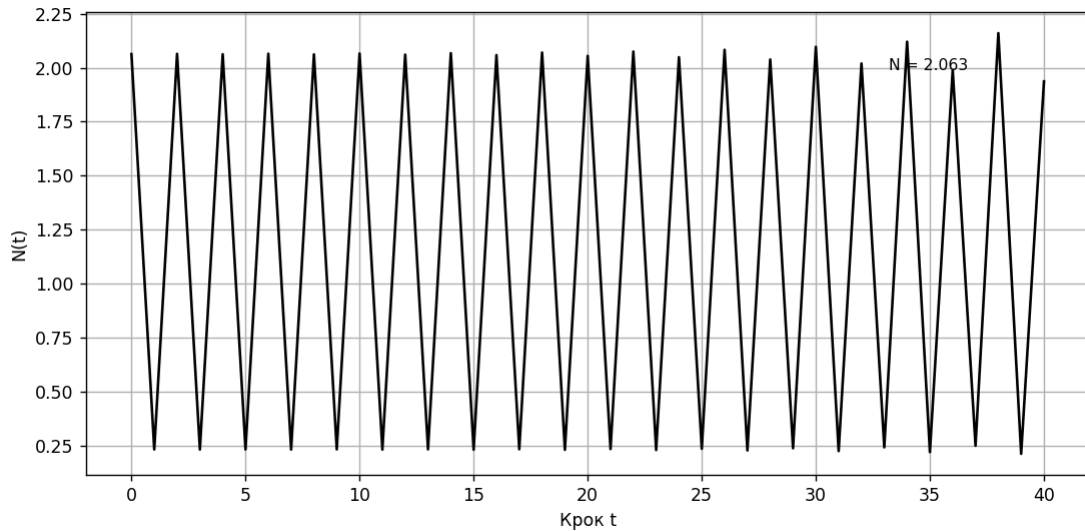


Рис. 4. Нестійкість періодичного розв'язку ( $T = 2$ ) рівняння (4) при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $N_1^* = 2.06358$ ,  $N_2^* = 0.23219$

Знайдемо періодичний розв'язок рівняння (4) з періодом  $T = 4$  (умова  $N_{t+4} = N_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ ). Якщо ввести позначення  $N_t = x$ ,  $N_{t+1} = y$ ,  $N_{t+2} = z$ ,  $N_{t+3} = u$ , то для знаходження періодичного розв'язку з періодом  $T = 4$  маємо систему вигляду

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{b + x^3} \equiv \varphi(x), \\ z = \frac{ay}{b + y^3} \equiv \varphi(y), \\ u = \frac{az}{b + z^3} \equiv \varphi(z), \\ x = \frac{au}{b + u^3} \equiv \varphi(u), \end{cases} \quad (10)$$

яку можна звести до одного рівняння

$$x = (\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))). \quad (11)$$

Такі рівняння можна розв'язувати, застосовуючи числові методи. Маючи розв'язок  $x$ , за формулами (10) знаходимо  $y$ ,  $z$ ,  $u$ . Тоді різні числові значення  $N_1^* = x$ ,  $N_2^* = y$ ,  $N_3^* = z$ ,  $N_4^* = u$  і визначають періодичний розв'язок рівняння (4) з періодом  $T = 4$ .

У комп'ютерних експериментах при  $a = 2.67$ ,  $b = 0.227$  (виконується умова  $b < \frac{\sqrt{2}-1}{3}a$ ) одержали періодичний розв'язок ( $T = 4$ ), який задається числами 0.19087, 3.73198, 0.55059, 2.17832 (рис. 5а).

Мультиплікатор цього періодичного розв'язку  $\mu = 0.0399 < 1$ , що означає його стійкість (рис. 5б).

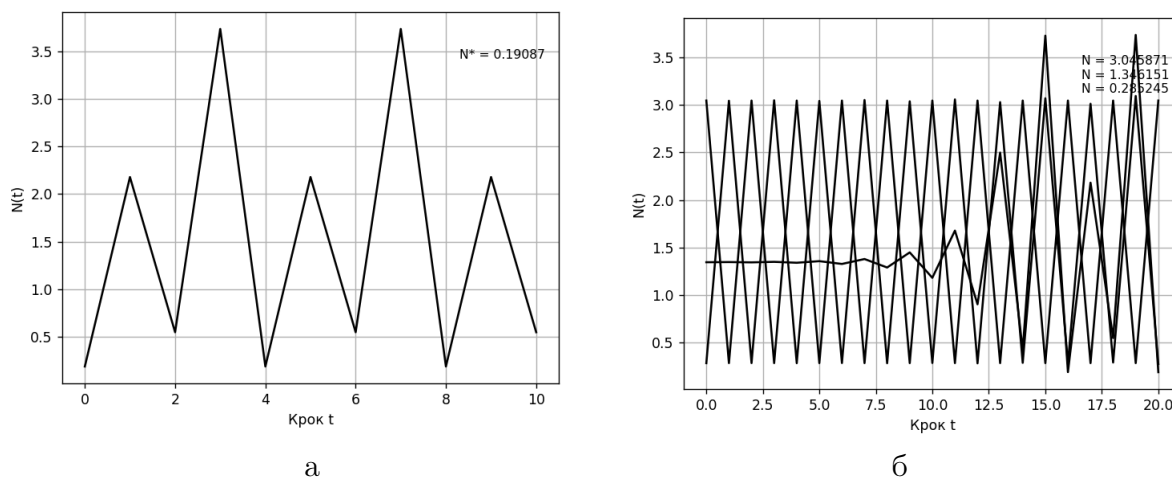


Рис. 5. Графіки періодичних розв’язків з періодом  $T = 4$  при  $a = 2.67$ ,  $b = 0.227$ : а –  $N_1^* = 0.19087$ ,  $N_2^* = 3.731982$ ,  $N_3^* = 0.550598$ ,  $N_4^* = 2.178315$ ; б – його стійкість

Графічне розв’язування рівняння (11) в цьому випадку наведено на рис. 6.

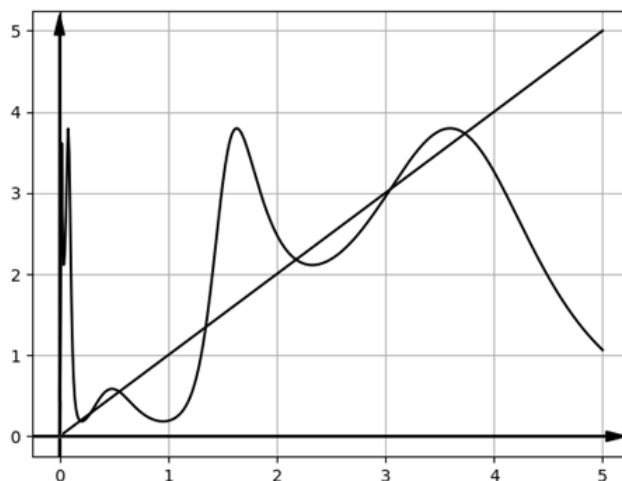


Рис. 6. Графічне розв’язування рівняння (11). При  $a = 2.67$ ,  $b = 0.227$  існує 7 коренів (0.190870, 0.285245, 0.550598, 1.346151, 2.178315, 3.045871, 3.731982)

Як бачимо з рис. 6, рівняння (11) має ще три корені (всього сім). Два з них, а саме  $N_5^* = 0.285245$ ,  $N_6^* = 3.045871$ , визначають періодичний розв’язок з періодом  $T = 2$ . Він нестійкий, оскільки мультиплікатор  $\mu = 1.4399 > 1$  (рис. 5б).

Ще один корінь  $N_7^* = 1.346151$  визначає стаціонарну точку, яка теж нестійка (виконується умова  $b < \frac{a}{3}$ ) (рис. 5б).

При подальшій відповідній зміні параметрів  $a$  та  $b$  послідовно відбуватиметься біфуркація подвоєння довжини циклу, тобто виникають нові стійкі цикли довжиною  $2^m$  ( $m > 2$ ) і при цьому втрачається стійкість періодичного циклу довжиною  $2^{m-1}$ .

У цій праці ще практично знайдені цикли довжиною вісім, зокрема при  $a = 5.34$ ,  $b = 0.227$ . Рівняння типу (11) мали 15 різних коренів. Вісім з них задавали цикл довжиною вісім, чотири – цикл довжиною чотири, два – цикл довжиною два і один – стаціонарний розв’язок.

Перейдемо до знаходження періодичних розв'язків рівняння (4) з періодом  $T = 3$  (виконується умова  $N_{t+3} = N_t, t = 0, 1, 2, \dots$ ).

Такі розв'язки складатимуть три різних числа:  $x, y, z$ . Для їх знаходження маємо систему вигляду

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{b+x^3} = \varphi(x), \\ z = \frac{ay}{b+y^3} = \varphi(y), \\ x = \frac{az}{b+z^3} = \varphi(z), \end{cases}$$

або рівняння

$$x = (\varphi(\varphi(\varphi(x)))) . \tag{12}$$

При проведенні комп'ютерних експериментів над розв'язуванням рівняння (12), не вдалося знайти такі значення параметрів  $a$  та  $b$ , щоб рівняння (12) мало три різні корені.

Існував лише єдиний корінь, що означає існування стаціонарного стану, для якого теж виконується умова  $N_{t+3} = N_t$  (рис. 7).

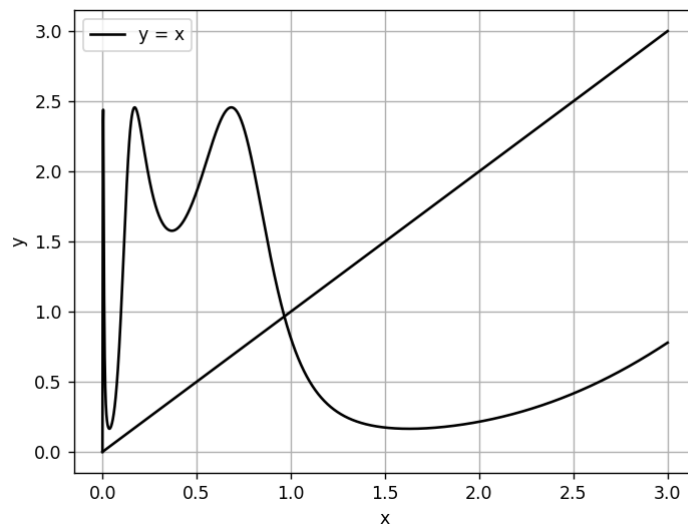


Рис. 7. Графічне розв'язування рівняння (12) при  $a = 1, b = 0.1$ . Корінь  $N^* = 0.9654$

Зазначимо, що для моделей вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b+N_t^2}, \quad N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b+N_t^3}$$

періодичних розв'язків не існує.

## 2 МОДЕЛЬ ЗБОРУ ВРОЖАЮ З М'ЯКОЮ СТРАТЕГІЄЮ

Узагальнимо модель (4) на випадок урахування збору врожаю з оберненим зв'язком, тобто коли збір урожаю залежить від стану популяції.

При цьому з популяції в певні моменти часу відбирається кількість особин, яка пропорційна загальній чисельності, тому модель (4) набуває вигляду

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b+N_t^3} - kN_t, \quad a, b > 0, \quad k \in (0, 1), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{13}$$



де  $N_t$ , як і раніше, – чисельність популяції в момент часу  $t$ ,  $k$  – параметр інтенсивності збору врожаю.

Рівняння (13) має два стани рівноваги  $N_1^* = 0$  та  $N_2^* = \sqrt[3]{\frac{a}{1+k}} - b$ . Додатний стан  $N_2^*$  існує за умови, що  $\frac{a}{1+k} > b$ .

При  $\frac{a}{b} < 1+k$   $N_1^* = 0$  стійкий (рис. 8), а при  $\frac{a}{b} > 1+k$ , коли з'являється  $N_2^*$ , нульовий розв'язок  $N_1^*$  втрачає стійкість. Зокрема, це має місце при  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.05$  (рис. 9). Тут  $N_2^* = 0.9672$ , натомість при  $k = 0$ ,  $N_2^* = 1.0$ . Тобто при інтенсивності експлуатації  $k = 0.05$ , відбувається зменшення стаціонарного рівня на 3.28%.

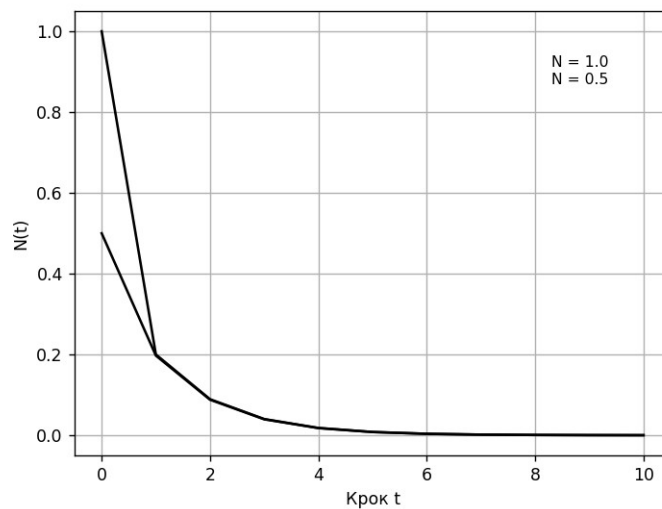


Рис. 8. Стійкість нульового розв'язку рівняння (13) при  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.05$

Для визначення стійкості  $N_2^*$  обчислюємо мультиплікатор

$$\mu = \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} = \frac{a(b - 2N_2^*)}{b + (N_2^*)^3} - k.$$

З нерівності  $|\mu| < 1$  одержуємо умови стійкості  $N_2^*$  у вигляді

$$\frac{1 + 2k}{(1 + k)^2} < 3\frac{b}{a} < \frac{3 + 2k}{(1 + k)^2}.$$

Для випадку, коли  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.05$   $|\mu| = 0.05 < 1$ , що дає стійкість  $N_2^*$  (рис. 9).

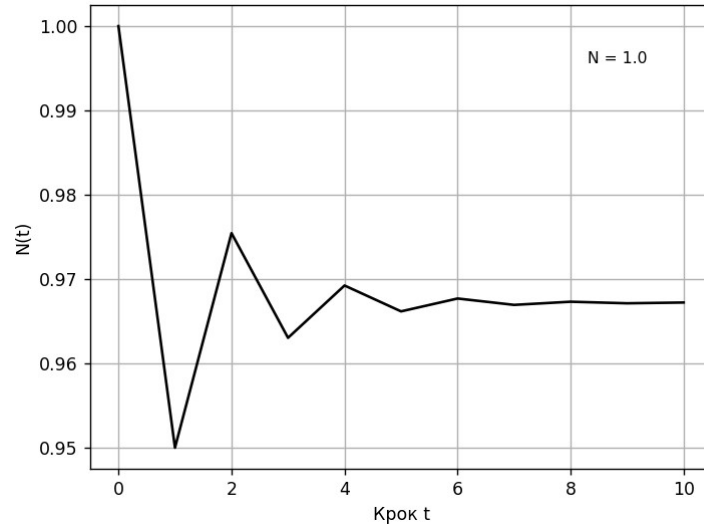


Рис. 9. Стійкість ненульового розв'язку  $N_2^* = 0.9672$  при  $a = 2, b = 1, k = 0.05$

Періодичний розв'язок рівняння (13) з періодом  $T = 2$  існує, якщо система

$$N_t = \frac{aN_{t+1}}{b + N_{t+1}^3} - kN_{t+1} = \psi(N_{t+1}),$$

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{b + N_t^3} - kN_t = \psi(N_t),$$

або те ж саме, що рівняння

$$N_t = \psi(\psi(N_t)) \tag{14}$$

має два різних додатних розв'язки  $N_1^* \neq N_2^*$ .

Це рівняння є алгебраїчним рівнянням дев'ятого порядку, яке аналітично не розв'язується. Тому шукаємо його корені числовими методами на комп'ютері.

Графічний аналіз розв'язків рівняння (14) при  $a = 1, b = 0.1, k = 0.05$  наведено на рис. 10.

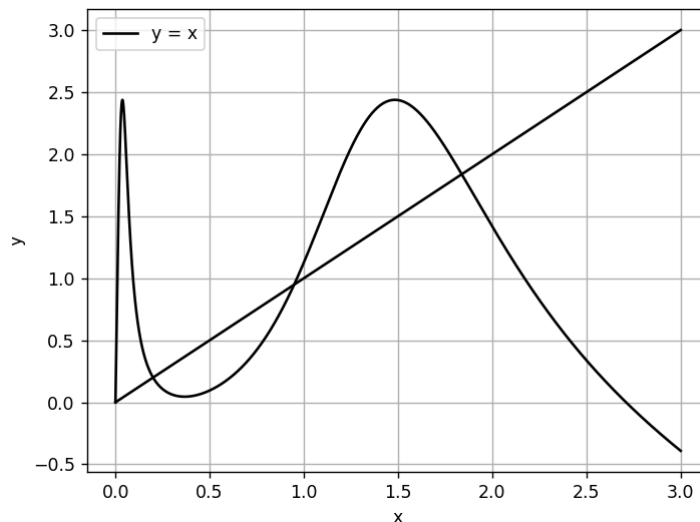


Рис. 10. Графічне розв'язування рівняння (14) при  $a = 1, b = 0.1, k = 0.05$ . Корені рівняння  $N^* = 0.94815$  – стаціонарне значення,  $N_1^* = 1.837915$ ;  $N_2^* = 0.199450$  – періодичний розв'язок з періодом  $T = 2$

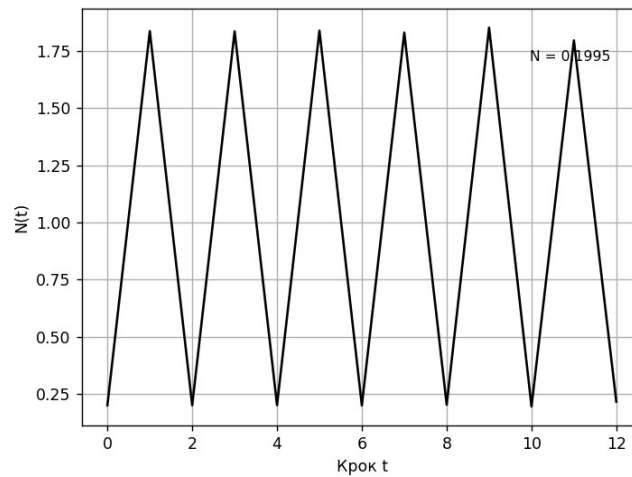
Як видно з графіка, що за умови

$$\frac{b}{a} < \frac{1}{3} \frac{1+2k}{(1+k)^2}$$

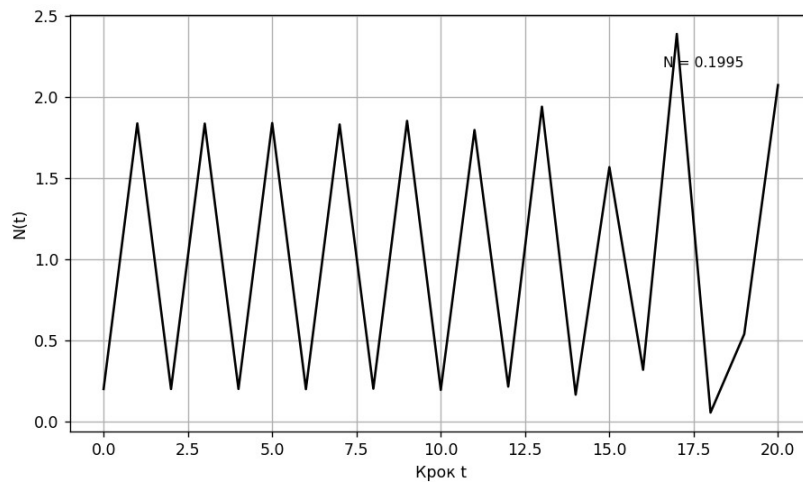
рівняння (13) має періодичні розв'язки з періодом  $T = 2$ .

Зокрема, в нашому випадку періодичний розв'язок складають два значення  $N_1^* = 0.19945$  і  $N_2^* = 1.83793$  (рис. 11а), причому він нестійкий (рис. 11б), оскільки мультиплікатор

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} \cdot \left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} = 2.5779 > 1.$$



а



б

Рис. 11. Графіки періодичного розв'язку ( $T = 2$ ) при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ : а —  $N_1^* = 0.1995$ ,  $N_2^* = 1.8379$ ; б — його нестійкість

Нестійкий також стаціонарний розв'язок  $N^* = 0.948152$ . Для нього мультиплікатор  $\mu = 1.81945 > 1$ .

Періодичні розв'язки з періодом  $T = 4$  знаходили з рівняння

$$x = \psi(\psi(\psi(\psi(x)))) \quad (15)$$

Зокрема, при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ , побудувавши графіки правої та лівої частини рівняння (15) (рис. 12), знайдено періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$ , який складають числа 0.128817, 1.25473, 0.571842, 2.064309.

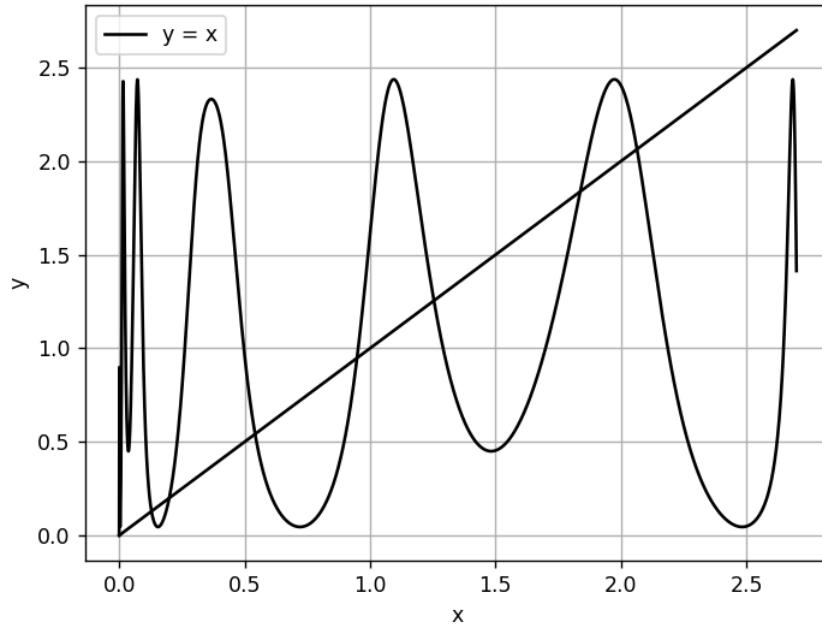


Рис. 12. Графічний аналіз розв'язків рівняння (15) при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ . Точки перетину графіків: 0.128817, 0.199447, 0.541842, 0.948151, 1.254730, 1.837915, 2.064309

Мультиплікатор цього розв'язку  $\mu = 7.6214 > 1$ , що означає його нестійкість (рис. 13). Хоча при  $k = 0$  в цьому випадку існував стійкий періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$  (рис. 14).

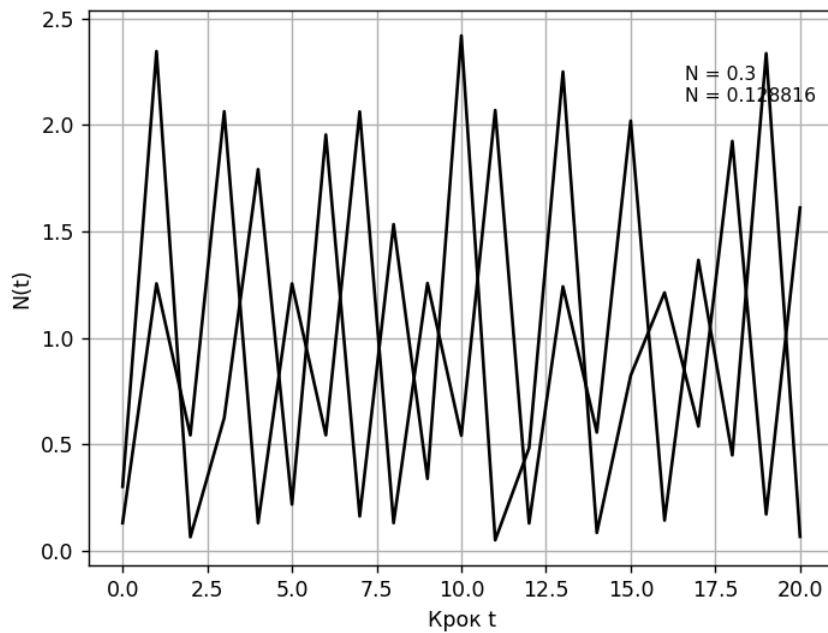


Рис. 13. Періодичний розв'язок рівняння (13) з періодом  $T = 4$  та його нестійкість.  
 $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$

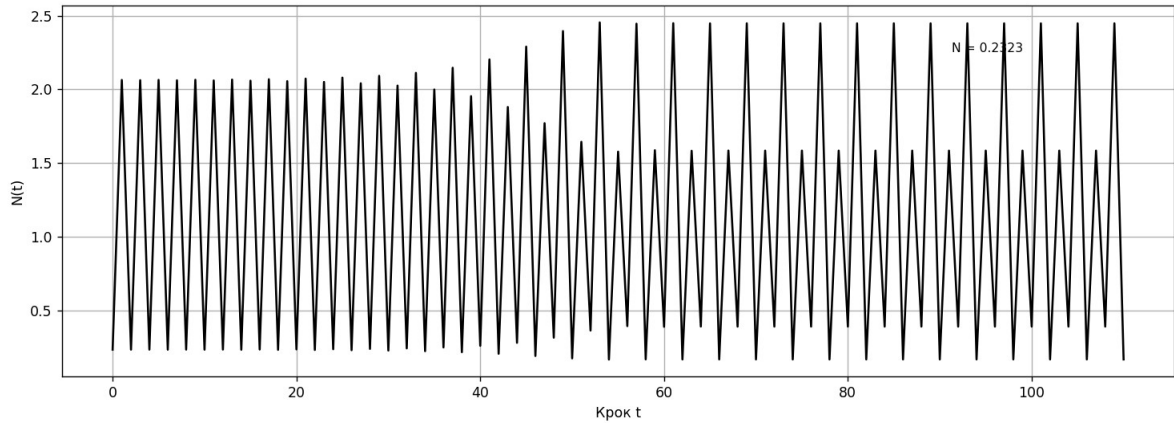


Рис. 14. Існування та стійкість періодичного розв'язку з періодом  $T = 4$ . ( $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0$ )  $N_1^* = 0.3886$ ,  $N_2^* = 1.5842$ ,  $N_3^* = 0.1656$ ,  $N_4^* = 2.4488$

Розв'язки рівняння (13) з періодом  $T = 3$  шукали з рівняння

$$x = \psi(\psi(\psi(x))),$$

яке аналізувалось теж графічним методом (рис. 15).

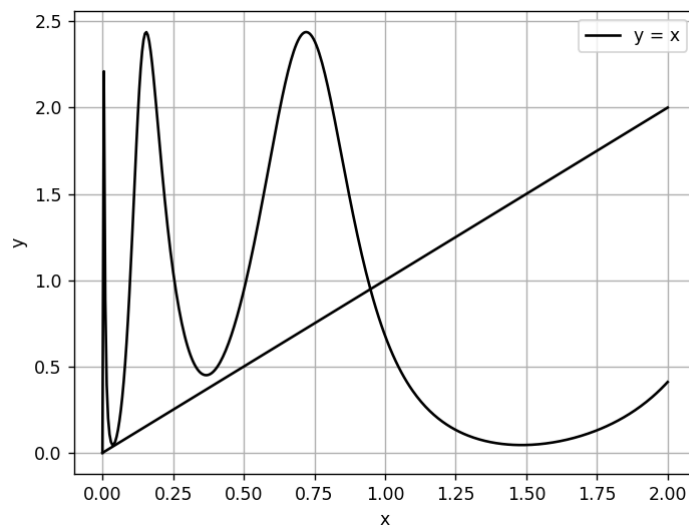


Рис. 15. Графічне розв'язування рівняння  $N = \psi(\psi(\psi(N)))$  при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ . Маємо єдиний розв'язок  $N^* = 0.94815$

У результаті комп'ютерних експериментів не знайдено таких значень  $a$ ,  $b$ ,  $k$ , щоб рівняння (13) мало періодичний розв'язок із періодом  $T = 3$ .

Зауважимо, що в експериментах отримано розв'язки рівняння (13), які мають хаотичну поведінку, зокрема при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ ,  $N_0 = 0.3$  (рис. 16).

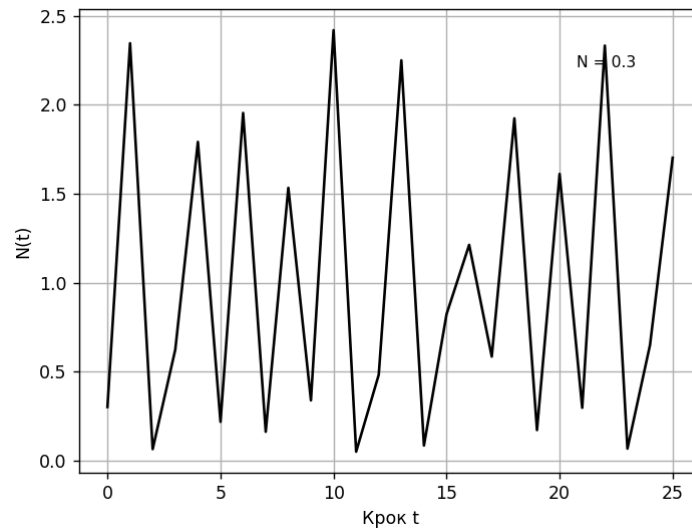


Рис. 16. Хаотична поведінка розв'язків рівняння (13) при  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $k = 0.05$ ,  $N_0 = 0.3$

Як висновок правомірно констатувати, що узагальнення моделі Скеллама (4), (13) мають широкий спектр поведінки розв'язків – від стаціонарних до періодичних із різним періодом. Вони можуть бути як стійкими, так і нестійкими. При втраті стійкості розв'язків з періодом  $T = 2^m$ , з'являються стійкі періодичні розв'язки з періодом  $T = 2^{m+1}$ ,  $m \geq 1$ . У цих рівняннях можливі хаотичні поведінки розв'язків. Характерно те, що при експлуатації популяцій може втрачатися стійкість розв'язків, яка мала місце в моделях без збору врожаю. Такі моделі дозволяють кількісно оцінити допустимий рівень навантаження на біологічні популяції, щоб зберегти їх існування.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Маценко В.Г. *Моделювання процесів збору врожаю для популяцій із неперекривними поколіннями*. Буковинський матем. журнал. **10**(2). 2022. 165-175.
- [2] Маценко В.Г. *Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю*. Буковинський матем. журнал. **12**(1). 2024. 74-83.
- [3] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations*. Bukovinian Math. Journal. **10**(2). 2022. 165–175. (in Ukrainian)
- [2] Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*. Bukovinian Math. Journal. **12**(1). 2024. 74-83. (in Ukrainian)
- [3] Skellam J.G. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 1951. **38**. 196-218.

Надійшло 01.11.2024

Matsenko V.G. *Analysis of Skellam-type models with periodic regimes*, Bukovinian Math. Journal. **12** (2) (2024), 128–142.

Difference equations are used in order to model the dynamics of population with non-overlapping generations. In the simplest case such equations have the form  $N_{t+1} = f(N_t) N_t$ , where  $N_t > 0$  is the population size at a moment of time  $t$ ,  $f(N_t) = \frac{N_{t+1}}{N_t}$  is a coefficient of natural reproduction.

In Skellam's model this coefficient has the form of a decreasing hyperbolic function:  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t}$ ,  $a, b > 0$ . Parameter  $a$  here plays the role of the largest value of the reproduction coefficient, and  $b$  describes the influence of self-regulating mechanisms on population dynamics.

For the Skellam's model, both without harvesting and with harvesting, only regimes with monotonic stabilization of the population size are observed. At the same time, as in other discrete models, there are periodic and even chaotic solutions.

In this work, the following generalization of the Skellam model is proposed, which allows the existence of periodic regimes.

Namely, a function is taken for  $f(N_t) = \frac{a}{b + N_t^3}$ . This shows that at certain values of  $a$  and  $b$  there are stable stationary states, that later lose stability, whereas with a corresponding change in  $a$  and  $b$ , cycles of lengths 2, then 4, 8 appear. That is, there is a bifurcation of the doubling of the cycle.

Periodic solutions with period 3 were not found, although the existence of chaotic solutions was established. It has been established that stable periodic regimes during harvesting can lose their stability.