Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ $2B$-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Досліджується задача вибору оптимального керування системою, що описується крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь з інтегральною нелокальною умовою і обмеженим внутрішнім, межовим та стартовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою функції Гріна загальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлено існування, єдиність та інтегральне зображення розв'язків нелокальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною умовою за часовою змінною. Знайдено оцінки розв'язку нелокальної крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах. Одержані результати використані для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку систем, що описуються параболічною крайовою задачею з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною. Розглянуто випадки обмежених внутрішніх, стартових та межових керувань.

Ключові слова і фрази: функція Гріна, стартове керування, межове керування, нелокальна задача, задача оптимізації, гельдерові простори, метод послідовних наближень, резольвента інтегрального рівняння.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Теорія оптимального керування системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фільтрації, дифузії, фізики тепла, теорії біологічних популяцій. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Важливі результати теорії оптимального керування системами у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримані, зокрема, у працях [2, 3, 4, 5, 6].

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

У роботах [7, 8, 9, 10] вивчаються задачі оптимального керування системами, що описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними. Зокрема, у праці [10] представлені аналітичні і чисельні розв'язки задачі оптимального керування для квазілінійних параболічних рівнянь. Доведено існування і єдиність розв'язку цієї задачі.

Задачам вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням присвячено праці [11, 12, 13]. Функціонали якості визначаються обмеженими інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системою, що описується крайовою задачею для $2b$-параболічного рівняння з інтегральною нелокальною умовою і обмеженим внутрішнім, межовим та стартовим керуванням. За допомогою функції Гріна загальної крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння доведено існування єдиного розв'язку параболічної задачі з інтегральною умовою за часовою змінною. Одержані результати використані для встановлення необхідних і достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується параболічною крайовою задачею з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною і обмеженим внутрішнім, стартовим та межовим керуванням. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай T, T_1, T_2, T_3 – фіксовані додатні числа, $T_\lambda \le T$, $\lambda \in \{1,2,3\}$. D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$. В області $Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u,q), $q = (q_1, q_2, q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F_1\left(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_1(x)\right)dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D F_2(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_2(x))dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} F_3(t,x;u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)),q_3(x))d_xS \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q_1 \in C^\alpha(D),\ q_2 \in C^{2b+\alpha}(D),\ q_3 \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma),\ \nu_{\lambda 1}(x) \le q_\lambda \le \nu_{\lambda 2}(x)$, із яких $u(t,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x)\partial_x^k\right] u = f_0(t,x;q_1(x)), \tag{2}$$

інтегральну умову за часовою змінною

$$u(0,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x)) + \int\limits_0^{T_3} a(\tau,x)u(\tau,x;q_1(x),q_2(x),q_3(x))d\tau = \varphi(x;q_2(x)), \tag{3}$$

а на межі області $\Gamma = [0,T] \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bu^{(\mu)} - f_\mu\right)(t,x) = \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|\le r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u - f_\mu(t,x;q_3(x))\right] = 0, \qquad (4)$$

$|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}$, $\mu = \{1,\ldots,b\}$, $r = \min\limits_\mu r_\mu$.

Будемо вважати виконаними такі умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x) \in C^{l+\alpha}(Q)$, $a(t,x) \in C^{2b+\alpha}(Q)$, $b_k^{(\mu)}(t,x) \in C^{2b+l-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha+l}$, $l = 4b+1-2\tau$ і задача

$$(Lu)(tx) = \tilde{f}_0(t,x), \quad u(0,x) = \tilde{\varphi}(x), \quad \lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bu^{(\mu)} - \tilde{f}_\mu\right) = 0$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського [14];

б) функції $\varphi(x;q_2(x)) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_0(t,x;q_1(x)) \in C^\alpha(Q)$, $f_\mu(t,x;q_3(x)) \in C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $\lim\limits_{x\to z\in\partial D}\left[f_\mu(0,x;q_3(x)) + \int\limits_0^{T_3} a(\tau)f_\mu(\tau,x;q_3(x))d\tau - B^\mu\varphi(x,q_2(x))\right]$, $x \in \partial D$;

в) $f_0(t,x;q_1(x)) \equiv d_0(t)g_0(x;q_1(x))$, $f_\mu(t,x;q_3(x)) = d_\mu(t)g_\mu(x;q_3(x))$, $F_1(t,x;u;q_1(x))$, $F_2(t,x;u;q_2(x))$, $F_3(t,x;u;q_3(x))$, $\varphi(x;q_2(x))$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;q_1;q_2;q_3)$, які належать, як функції змінних (t,x), x відповідно просторам $C^\alpha(Q)$, $C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)$, $C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{1j} \in C^\alpha(Q)$, $\nu_{2j} \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{3j} \in C^{2b-r+\alpha}(\Gamma)$, $j \in \{1,2\}$.

За умов, накладених на коефіцієнти рівняння (2), крайових умов (4), існує функція Гріна $(G_0, G_1, \ldots, G_b)$ крайової задачі ([14], теорема 1)

$$(Lv)(t,x) = f_0(t,x;q_1(x)), \quad v(0,x) = \varphi(x;q_2(x)), \quad \lim_{x\to z\in\partial D}\left(Bv^{(\mu)} - f_\mu\right)(t,x) = 0, \qquad (5)$$

за допомогою якої розв'язок задачі (5) визначається формулою

$$v(t,x;q) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi + \int\limits_D G_0(t,x;0;\xi)\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{\mu=0}^b \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S. \qquad (6)$$

При виконані умов а), б) згідно з теоремою 1 [14] існує єдиний розв'язок задачі (5) в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ при довільних $q \in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|v\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \sum_{\mu=1}^b \|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (7)$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а), б),* $\int\limits_0^{T_3}|a(\tau)|d\tau\int\limits_D|G_0(t,x,0,\xi)|d\xi \le d < 1$. *Тоді існує функція Гріна* $\left(\vec{G},\vec{E}\right) = (G_0, G_1, \dots, G_b; E_0, E_1, \dots, E_b;)$ *задачі (2)–(4) єдиний її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi + \int\limits_D G_0(t,x;0;\xi)\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{\mu=1}^b\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D}G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S + \int\limits_0^{T_3}d\tau\int\limits_D E_0(T_3;t,x;\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_D E_0(T_3;t,x;0;\xi)\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi + \sum_{\mu=1}^b\int\limits_0^{T_3}d\tau\int\limits_{\partial D}E_\mu(T_3;t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S$$

і для нього правильна оцінка

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \sum_{\mu=1}^b\|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)}\right). \tag{8}$$

Доведення. Розв'язок задачі (2)–(4) шукаємо у вигляді

$$u(t,x;q) = \int\limits_D G_0(t,x,0,\xi)u(0,\xi;q)d\xi + v(t,x;q), \tag{9}$$

де $v(t,x;q)$ – розв'язок крайової задачі (5).

Задовольнивши інтегральну умову (3), матимемо

$$u(0,x;q) + \int\limits_0^{T_3}a(t)\left(\int\limits_D G_0(t,x;0,\xi)u(0,\xi;q)d\xi\right)dt = -\int\limits_0^{T_3}a(t)v(t,x;q)dt \equiv F(x;q). \tag{10}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (10) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи нерівність $d < 1$, одержуємо розв'язок інтегрального рівняння (10), для якого правильна нерівність

$$|u(0,x;q)| \le \frac{c}{1-d}\left(\|f_0\|_{C(Q)} + \|\varphi\|_{C(D)} + \sum_{\mu=1}^b\|f_\mu\|_{C(\Gamma)}\right).$$

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (10) у вигляді

$$u(0,x;q) = F(x,q) + \int\limits_D R(x,y)F(y;q)dy, \tag{11}$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi)=\int\limits_0^{T_2} a(t)G_0(t,x,0,\xi)dt-\int\limits_D R(x,y)dy\int\limits_0^{T_3} a(t)G_0(t,y,0,\xi)dt,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int\limits_D R(x,\xi)d\xi\right|\leq \frac{d}{1-d}.$$

Підставляючи у рівність (10) замість $F(x,q)$ значення

$$F(x,q)=-\int\limits_0^{T_2} a(t)\left[\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1(\xi))d\xi+\int\limits_D G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi))d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3(\xi))d_\xi S\right]dt$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$u(0,x;q)=\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_D \Gamma_0(T_3,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int\limits_D \Gamma_0(T_3,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_{\partial D}\Gamma_\mu(T_2,x;\tau;\xi)f_\mu(\tau,\xi;q_3)d_\xi S,$$

де

$$\Gamma_0(T_3,x,\tau,\xi)=-\int\limits_\tau^{T_3} a(t)G_0(t,x,\tau,\xi)dt-\int\limits_\tau^{T_3} dt\int\limits_D a(t)R(x,y)G_0(t,y,\tau,\xi)dy,$$

$$\Gamma_\mu(T_3,x,\tau,\xi)=-\int\limits_\tau^{T_3} a(t)G_\mu(t,x,\tau,\xi)dt-\int\limits_\tau^{T_3} dt\int\limits_D a(t)R(x,y)G_\mu(t,y,\tau,\xi)dy.$$

Підставляючи значення $u(0,x;q)$ у рівність (9) та змінюючи порядок інтегрування, отримаємо для розв'язку задачі (2)–(4) зображення

$$u(t,x,q)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q)d\xi+\int\limits_D G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G_\mu(t,x;\tau;\xi)f_\mu d_\xi S+\int\limits_0^{T_3} d\tau\int\limits_D E_0(T_3,t,x,\tau,y)f_0(\tau,y;q)dy+$$

$$+\int\limits_D E_0(T_3,t,x,0,y)\varphi(y;q_2)dy+\sum_{\mu=1}^{b}\int\limits_0^{T_3}d\tau\int\limits_{\partial D}E_\mu(T_3,t,x;\tau;y)f_\mu d_yS, \qquad (12)$$

де

$$E_\mu(T_3,t,x,\tau,y)=\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)\Gamma_\mu(T_3,\xi,\tau,y)d\xi.$$

Знайдемо оцінку норми $\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}$.

Враховуючи оцінки компонент функції Гріна задачі (5) із [14] і рівняння (10), маємо

$$\|u(0,x;q)\|_{C^{2b+\alpha}(D)}\le c\left(\|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)}+\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (13)$$

На підставі теореми 1 із [13], враховуючи властивості функції $G_0(t,x,0,\xi)$ і формулу (9), знаходимо

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}\le c\left(\|u(0,x,q)\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\|v\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}\right). \qquad (14)$$

Підставляючи (7), (13) в (14), одержимо оцінку норми $\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}$. □

2 Задача оптимального керування

В області Q розглянемо задачу (1)–(4). Будемо вважати, що виконані умови а)-в).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d_0(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)dx+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{T_3}d_0(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}\times$$

$$\times E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)dx+\int\limits_0^{T_1}dt\int\limits_0^t d_0(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1}dt\int\limits_0^{T_3}d_0(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u}E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2}dt\int\limits_0^t d_0(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D}\frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}G_0(t,x,\tau,\xi)d_xS+$$

$$+\int\limits_0^{T_2}dt\int\limits_0^{T_3}d_0(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D}\frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u}E_0(T_3,t,x,\tau,\xi)d_xS.$$

$$\lambda_2(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u}\left[G_0(t,x,0,\xi)+E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right]dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} \left[G_0(t,x,0,\xi) + E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right] dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u} \left[G_0(t,x,0,\xi) + E_0(T_3,t,x,0,\xi)\right] dx,$$

$$P_\mu(\xi) = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u} G_\mu(t,x,\tau,\xi) dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u,q_1)}{\partial u} \times$$

$$\times E_\mu(T_3,t,x,\tau,\xi) dx + \int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_0^t d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} G_\mu(t,x,0,\xi) dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(t,x;u,q_2)}{\partial u} E_\mu(T_3,t,x,0,\xi) dx+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_0^t d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u} G_\mu(t,x,\tau,\xi) d_x S+$$

$$+\int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_0^{T_3} d_\mu(\tau) d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u,q_3)}{\partial u} E_\mu(T_3,t,x,\tau,\xi) d_x S,$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1) = \lambda_1(\xi) f_0(\xi;q_1(\xi)) + \int\limits_0^T F_1(t,\xi;u,q_1) dt,$$

$$H_2(\xi,u,\lambda_2,q_2) = \lambda_2(\xi) \varphi(\xi;q_2(\xi)) + \int\limits_0^{T_1} F_2(t,\xi;u,q_2) dt,$$

$$H_3(\xi,u,P,q_3) = \sum_{\mu=1}^{b} P_\mu(\xi) g_\mu(\xi,q_3(\xi)) + \int\limits_0^{T_2} F_3(t,\xi;u,q_3) d\xi,$$

$q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(t,x;q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(4).

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1 і умова в). Тоді*

1) якщо $D_{q_l} H_l > 0$, $l \in \{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{31})$;

2) якщо $D_{q_l} H_l > 0$, $l \in \{1,2\}$, $D_{q_3} H_3 < 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{32})$;

3) якщо $D_{q_1} H_1 > 0$, $D_{q_2} H_2 < 0$, $D_{q_3} H_3 < 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{22}, \nu_{32})$;

4) якщо $D_{q_l} H_l < 0$, $l \in \{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{22}, \nu_{32})$;

5) якщо $D_{q_1} H_1 < 0$, $D_{q_2} H_2 > 0$, $D_{q_3} H_3 > 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{31})$.

Доведення. Розглянемо випадок 1). Нехай $\Delta q = (\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3)$ – допустимий приріст керування $q = (q_1, q_2, q_3)$. Через $\Delta u = \Delta_{q_1} u + \Delta_{q_2} u + \Delta_{q_3} u$ позначимо приріст функції $u(t, x; q_1, q_2, q_3)$. Тоді $\Delta_{q_k} u$ в області Q будуть розв'язками відповідних крайових задач

$$
\begin{gathered}
(L\Delta_{q_k} u)(t,x) = \delta_{k1} r_0(t) \Delta f_0(x, q_1),\\
B(\Delta_{q_k} u)(x) = \delta_{k2} \Delta\varphi(x, q_2), \qquad (15)\\
\left(B^{(\mu)} \Delta_{q_k} u\right)(t,x)\big|_{\Gamma} = \delta_{k3} \Delta f_\mu(x, q_3) r_\mu(t),
\end{gathered}
$$

де δ_{ki} – символ Кронекера, $i, k \in \{1, 2, 3\}$.

За теоремою 1 існує функція Гріна задачі (15) і прирости $\Delta_{q_k} u$ зображаються формулами

$$
\begin{gathered}
\Delta_{q_1} u = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_0(t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\xi, q_1(\xi)) r_0(\tau) d\xi +\\
+ \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_D E_0(T_3, t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\xi; q_1(\xi)) r_0(\tau) d\xi,\\
\Delta_{q_2} u = \int\limits_D \left[G_0(t, x, 0, \xi) + E_0(T_3, t, x, 0, \xi)\right] \Delta\varphi(\xi; q_2(\xi)) d\xi, \qquad (16)\\
\Delta_{q_3} u = \sum_{\mu=1}^{b} \left[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_\mu(t, x, \tau, \xi) \Delta f_\mu(\xi, q_3(\xi)) r_\mu(\tau) d_\xi S +\right.\\
\left. + \int\limits_0^{T_3} d\tau \int\limits_{\partial D} E_\mu(T_3, t, x, \tau, \xi) \Delta f_\mu(\xi, q_3(\xi)) r_\mu(\tau) d_\xi S\right].
\end{gathered}
$$

Розглянемо приріст функціоналу

$$
\Delta I(q) = \Delta_{q_1} I(g) + \Delta_{q_2} I(g) + \Delta_{q_3} I(g). \qquad (17)
$$

Скористаємось формулою Тейлора, тоді

$$
\begin{gathered}
\Delta_{q_k} I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \Delta q_1 + O\left(|\Delta q_1|^2\right)\right)\right] dx +\\
+ \int\limits_0^{T_1} dt \int\limits_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_2|^2\right)\right)\right] dx +\\
+ \int\limits_0^{T_2} dt \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_3}{\partial u} \Delta_{q_k} u + O\left(\|\Delta_{q_k} u\|^2\right) + \delta_{k3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_3} \Delta q_3 + O\left(|\Delta q_3|^2\right)\right)\right] d_x S. \qquad (18)
\end{gathered}
$$

Підставляючи (10), (18) у (17) і змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(q) = \int\limits_{D} \left[D_{q_1} H_1(\xi, u, \lambda_1, q_1) \Delta q_1 + \partial_{q_2} H_2(\xi, u, \lambda_2, q_2) \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[D_{q_3} H_3(\xi, u, \lambda_3, q_3) \Delta q_3 + O\left(\|\Delta_{q_3} u\|^2\right) \right] d_x S.$$

Якщо $q_k = \nu_{k1}(x)$ і $D_{q_k} H_k > 0$, то при досить малих Δq_k маємо $\Delta I(q) > 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Нехай $q^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q) > 0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 2. Якщо вирази $D_{q_1} H_1$, $D_{q_2} H_2$, $D_{q_3} H_3$ знакозмінні величини, тобто $D_{q_1} H_1 > 0$ в $D_1 \subset D$, $D_{q_2} H_2 > 0$ в $D_2 \subset D$, $D_{q_3} H_3 > 0$ в Γ_1 і $D_{q_1} H_1 < 0$ в $D \setminus D_1$, $D_{q_2} H_2 < 0$ в $D \setminus D_2$, $D_{q_3} H_3 < 0$ в $\partial D \setminus \Gamma_1$, то використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(q) = D_{q_1} H_1(x^+, u^+, \lambda_1^+, q_1^+) \int\limits_{D_1} \Delta q_1 dx - \left| D_{q_1} H_1(x^-, u^-, \lambda_1^-, q_1^-) \right| \int\limits_{D \setminus D_1} \Delta q_1 dx +$$

$$+ D_{q_2} H_2(x^+, u^+, \lambda_2^+, q_2^+) \int\limits_{D_2} \Delta q_2 dx - \left| D_{q_2} H_2(x^-, u^-, \lambda_2^-, q_2^-) \right| \int\limits_{D \setminus D_2} \Delta q_2 dx +$$

$$+ D_{q_3} H_3(x^+, u^+, \lambda_3^+, q_3^+) \int\limits_{\Gamma_1} \Delta q_3 d_x S - \left| D_{q_3} H_3(x^-, u^-, \lambda_3^-, q_3^-) \right| \int\limits_{\partial D \setminus \Gamma_1} \Delta q_3 d_x S +$$

$$+ \int\limits_{D} \left[O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) \right] dx + \int\limits_{\partial D} O\left(|\Delta_{q_3}|^2\right) d_x S.$$

При досить малих Δq_k знак ΔI визначається першими шістьма доданками суми. Різниця перших двох і наступних пар двох доданків змінює знак в залежності від величин $mes D_1$, $mes(D \setminus D_1)$, $mes D_2$, $mes(D \setminus D_2)$, $mes \Gamma_1$, $mes(\partial D \setminus \Gamma_1)$, Δq_k, $k \in \{1, 2, 3\}$. При досить малих величинах $mes D_1 < 0$, $mes D_2 < 0$, $mes \Gamma_1 < 0$ і $\Delta q_k > 0$ маємо $\Delta I(q) < 0$ і навпаки $\Delta I(q) > 0$, якщо малі величини $mes(D \setminus D_1)$, $mes(D \setminus D_2)$, $mes(\partial D \setminus \Gamma_1)$ і $\Delta q_k > 0$. Отже, функціонал $I(q)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $q^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $D_{q_k} H_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, доводяться аналогічно. □

Нехай умови теореми 2 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Для того, щоб керування* $q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right)$ *було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_l(\xi, u, \lambda_l, q_l)$, $l \in \{1, 2\}$, $H_3(\xi, u, p, q_3)$ *за аргументами* q_k, $k \in \{1, 2, 3\}$ *мають в точці* $q_k^{(0)}$ *мінімальні значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_k^{(1)}, l_k^{(2)}\right) \neq 0$ *виконується нерівність*

$$D_u^2 F_k\left(t, x; u, q_k^{(0)}\right) \left(l_k^{(1)}\right)^2 + 2 D_u D_{q_k} F_k\left(t, x; u, q_k^{(0)}\right) l_k^{(1)} l_k^{(2)} +$$

$$+D^2_{q_k} F_k \left(t, x; u, q_k^{(0)}\right) \left(l_k^{(2)}\right)^2 > 0, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Доведення теореми 3 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 із [15].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir. Moscow. 1972. 416. (in Russian)

[2] Zgurovsky M. Z., Melnik V.S., Novikov A. N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. Naukova dumka. Kiev. 2004. 588. (in Russian)

[3] Bermudez A. Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. 8. 195-218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields. 2015. 5(3). 377-399.

[5] Farrukh N. Dekhkonov. Boundary control problem associated with a pseudo-parabolic equation. Stochastic Modelling and Computational Sciences. 2023. 3(1). 119-130.

[6] Feiyue He, Leung A., Stojanovic S. Periodic optimal control for parabolic Volterra-Lotka type equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1995. 18. 127–146.

[7] Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. Optimal control of a Parabolic Equation with Dunamic Boundary Condition. Applied Mathematics and Optimization. 2013. 67(1). 3-31.

[8] Bintz J., Finotti H., Lenhart S. Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press. Singapure. 2013. 121–135.

[9] Farag M.H. Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation. Surveys in Mathematics and its Applications. 2009. 4. 139–153.

[10] Khater A.H., Shamardan A.B., Farag M.H., Abel-Hamid A.H. Analytical and numerical solutions of a quasilinear parabolic optimal control problem. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998. 95(1-2). 29-43.

[11] Pukalskyi I.D. Green function of a parabolic boundary value problem and the optimization problem. Ukrainian Mathematical Journal, 2000, 52(4), 567-571. (in Ukrainian)

[12] I.M. Isariuk, I.D. Pukal's'kyi. Internal and Startup Controls of the Solutions of Boundary-Value Problem for Parabolic Equations with Degenerations. Journal of Mathematical Sciences. 2023. 272(2). 14-29.

[13] I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan. Multipoint Boundary-Value Problem of Optimal Control for Parabolic Equations with Degeneration. Journal of Mathematical Sciences. 2023. 273(6). 901-924.

[14] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1968, 2-52. (in Russian)

[15] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 284 p. (in Ukrainian)

Надійшло 12.11.2024

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *Optimal control in a boundary value problem for 2b-parabolic equations with an integral nonlocal condition*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 200–210.

The theory of optimal control of systems described by equations with partial derivatives is rich in results and is actively developing nowadays. The popularity of this kind of research is connected with their active use in solving problems of natural science, in particular, hydro- and gas dynamics, filtration, diffusion, heat physics, theory of biological populations.

The problem of choosing the optimal system control described by the boundary value problem for $2b$-parabolic equations with an integral non-local condition and limited internal, boundary and starting control is investigated. The quality criterion is given by the sum of volume and surface integrals. Using Green's function of the general boundary value problem for the $2b$ parabolic equation, the existence, uniqueness, and integral image of the solutions of the nonlocal boundary value problem for the $2b$ parabolic equation with the integral condition on the time variable have been established. Estimates of the solution of the nonlocal boundary value problem and its derivatives in Hölder spaces are found. The obtained results are used to establish the necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal solution of systems described by a parabolic boundary value problem with a nonlocal integral condition for the time variable. The cases of limited internal, starting and boundary controls are considered.