Гутік О.В., Щипель М.Р.

НАПІВГРУПА СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВИХ ПОРЯДКОВИХ ІЗОМОРФІЗМІВ ОБМЕЖЕНОГО РАНГУ НЕСКІНЧЕННОЇ ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ

Ми вивчаємо алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{OI}_n(L)$ скінченних часткових порядкових ізоморфізмів рангу $\leq n$ нескінченної лінійно впорядкованої множини $(L, \leqslant)$. Зокрема описано її ідемпотенти, природний частковий порядок та відношення Ґріна на $\mathscr{OI}_n(L)$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{OI}_n(L)$ стійка та містить щільний ряд ідеалів, а також, що всі конґруенції на напівгрупі $\mathscr{OI}_n(L)$ є конґруенціями Ріса.

Ключові слова і фрази: Інверсна напівгрупа, часткове перетворення, частковий порядковий ізоморфізм, конґруенція, відношення Ґріна, стійка напівгрупа.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Університецька 1, Львів, 79000, Україна (Гутік О.В.)
Львівський національний університет ім. Івана Франка, Університецька 1, Львів, 79000, Україна (Щипель М.Р.)
e-mail: *oleg.gutik@lnu.edu.ua (Гутік О.В.), maksym.shchypel@lnu.edu.ua (Щипель М.Р.)*

У цій праці ми користуємося термінологією з монографій [3, 4, 10, 12].

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Також через $\operatorname{rank}\alpha$ будемо позначати ранг часткового відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$, тобто $\operatorname{rank}\alpha = |\operatorname{dom}\alpha|$.

Якщо S — напівгрупа, то визначатимемо відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ на S так:

$$\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L}\cap\mathscr{R}.
\end{aligned}$$

УДК 512.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M15, 20M50, 18B40.

(див. означення в [3, §2.1] або [6]).

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конґруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують наступні конґруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s, s) \colon s \in S\}$. Такі конґруенції називаються *тривіальними*. Кожен двобічний ідеал I напівгрупи S породжує на ній конґруенцію Ріса: $\mathfrak{K}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$.

Надалі через $E(S)$ позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S. Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою*, а комутативна напівгрупа ідемпотентів — *напівґраткою*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $s \in S$ існує єдиний елемент $s^{-1} \in S$ такий, що $ss^{-1}s = s$ і $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$ [2]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент s^{-1} називається *інверсним до s*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$, для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [2]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Через $\mathscr{I}(X)$ позначимо множину всіх часткових взаємнооднозначних перетворень множини X разом з такою напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{для} \quad \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Напівгрупа $\mathscr{I}(X)$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* або *симетричним інверсним моноїдом* над множиною X (див. [3]). Симетрична інверсна напівгрупа введена В. В. Вагнером у працях [1, 2] і вона відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Надалі, якщо для $\alpha, \beta \in \mathscr{I}(X)$ виконуються умови $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{dom}\beta$ і $(x)\beta = (x)\alpha$ для довільного $x \in \operatorname{dom}\alpha$. то будемо писати $\alpha \subseteq \beta$.

Надалі будемо вважати, що $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Для елементів $x, y \in L$ умову $x \leqslant y$ і $x \neq y$ записуватимемо так: $x < y$. Елемент $\alpha \in \mathscr{I}(L)$ називається *частковим порядковим ізоморфізмом*, якщо для довільних $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}\alpha$ з $x_1 \leqslant x_2$ випливає $(x_1)\alpha \leqslant (x_2)\alpha$. Позаяк $\leqslant$ — лінійний порядок на L, то для $\alpha \in \mathscr{I}(L)$ і для довільних $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}\alpha$ з $(x_1)\alpha \leqslant (x_2)\alpha$ випливає $x_1 \leqslant x_2$. Очевидно, що композиція часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(L, \leqslant)$ є частковим порядковим ізоморфізмом, і обернене часткове відображення до часткового порядкового ізоморфізму є знову частковим порядковим ізоморфізмом. Через $\mathscr{O\!I}(L)$ позначимо напівгрупу всіх часткових порядкових ізоморфізмів лінійно впорядкованої множини $(L, \leqslant)$. Очевидно, що $\mathscr{O\!I}(L)$ — інверсна напівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}(L)$ над множиною L.

Для довільного натурального числа n визначимо

$$\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L) = \{\alpha \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}(L) \colon |\operatorname{dom}\alpha| \leq n\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ — інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{O}\!\mathscr{I}(L)$ над множиною L. Надалі напівгрупу $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ будемо називати *напівгрупою скінченних часткових порядкових ізоморфізмів рангу* $\leq n$ *лінійно впорядкованої множини* $(L, \leqslant)$. Надалі якщо елемент α напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ відображає x_1 у y_1, …, x_k у y_k, де $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k \in L$, $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$, $k \leq n$, то записуватимемо так;

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}.$$

Порожнє часткове перетворення множини L будемо позначати символом $\mathbf{0}$. Очевидно, що $\mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$.

Однією з класичних задач теорії напівгруп перетворень є дослідження будови напівгрупи перетворень множини, які зберігають структуру множини (геометрію, частковий порядок, топологію), зокрема, коли ці перетворення є локальними, тобто частковими еквівалентностями (частковими ізометріями, частковими порядковими ізоморфізмами, частковими гомеоморфізмами, тощо) [5, 11]. У цій праці ми досліджуємо алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ скінченних часткових порядкових ізоморфізмів обмеженого рангу лінійно впорядкованої множини $(L, \leqslant)$. Зокрема описано її ідемпотенти, природний частковий порядок та відношення Ґріна на $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$. Доведено, що напівгрупа $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ стійка та містить щільний ряд ідеалів, а також, що всі конґруенції на напівгрупі $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ є конґруенціями Ріса.

Лема 1. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді для довільного натурального числа k і для довільних $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k \in L$ таких, що $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$ існує єдиний частковий порядковий ізоморфізм $\alpha\colon L \rightharpoonup L$ такий, що $\operatorname{dom}\alpha = \{x_1, \ldots x_k\}$, $\operatorname{ran}\alpha = \{y_1, \ldots y_k\}$. Більше того, частковий порядковий ізоморфізм $\alpha\colon L \rightharpoonup L$ визначається так: $(x_1)\alpha = y_1, \ldots, (x_k)\alpha = y_k$.*

Доведення. Позаяк $(L, \leqslant)$ — лінійно впорядкована множина, то кожна скінченна підмножина в $(L, \leqslant)$ має найменший елемент. За індукцією визначаємо частковий порядковий ізоморфізм $\alpha\colon L \rightharpoonup L$ так: $(x_1)\alpha = y_1, \ldots, (x_k)\alpha = y_k$. Позаяк множини $\{x_1, \ldots x_k\}$, $\{y_1, \ldots y_k\}$ скінченні, то такий частковий порядковий ізоморфізм α єдиний. □

Нагадаємо [9], що напівгрупа S називається *стійкою*, якщо

(1) $a, b \in S$ і з $Sa \subseteq Sab$ випливає, що $Sa = Sab$,

(2) $a, b \in S$ і з $aS \subseteq baS$ випливає, що $aS = baS$.

Теорема 1. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Тоді для довільного натурального числа n напівгрупа $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ є стійкою.*

Доведення. Припустимо, що для деяких елементів $\alpha,\beta\in\mathscr{O\!I}_n(L)$ виконується включення

$$\alpha\mathscr{O\!I}_n(L)\subseteq\beta\alpha\mathscr{O\!I}_n(L). \tag{1}$$

Позаяк $\mathscr{O\!I}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то за теоремою 1.17 з [3] маємо, що

$$\alpha\mathscr{O\!I}_n(L)=\alpha\alpha^{-1}\mathscr{O\!I}_n(L)\quad\text{і}\quad\beta\alpha\mathscr{O\!I}_n(L)=\beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\mathscr{O\!I}_n(L),$$

а отже,

$$\alpha\alpha^{-1}\mathscr{O\!I}_n(L)\subseteq\beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\mathscr{O\!I}_n(L). \tag{2}$$

З включення (2) випливає, що $\operatorname{dom}\alpha\subseteq\operatorname{dom}\beta$ і $\operatorname{dom}\alpha\subseteq\operatorname{ran}\beta$. З включення (1) маємо, що існує такий елемент $\gamma\in\mathscr{O\!I}_n(L)$, що

$$\alpha=\beta\alpha\gamma. \tag{3}$$

Нехай $\operatorname{rank}\alpha=k\leq n$ і $\operatorname{dom}\alpha=\{x_1,\ldots,x_k\}$, причому $x_1<\cdots<x_k$ в $(L,\leqslant)$. З рівності (3) випливає, що $(x_1)\beta^{-1}=x_1$, …, $(x_k)\beta^{-1}=x_k$, оскільки $(L,\leqslant)$ — лінійно впорядкована множина, $\alpha,\beta\in\mathscr{O\!I}_n(L)$ і $x_1<\cdots<x_k$ в $(L,\leqslant)$. Отже, отримуємо, що $(x_1)\beta=x_1$, …, $(x_k)=x_k$, звідки випливає рівність $\alpha=\beta\alpha$. Тоді, очевидно, що $\alpha\mathscr{O\!I}_n(L)=\beta\alpha\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Доведення твердження, що з включення $\mathscr{O\!I}_n(L)\alpha\subseteq\mathscr{O\!I}_n(L)\alpha\beta$ для $\alpha,\beta\in\mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає рівність $\mathscr{O\!I}_n(L)\alpha=\mathscr{O\!I}_n(L)\alpha\beta$, аналогічне з точністю до дуальності. □

Твердження 1. *(1) Ненульовий елемент α напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли α — тотожне часткове перетворення.*

(2) $\alpha\preccurlyeq\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha\subseteq\beta$.

(3) $\alpha\mathscr{R}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$.

(4) $\alpha\mathscr{L}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha=\operatorname{ran}\beta$.

(5) $\alpha\mathscr{H}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha=\beta$.

(6) $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$ тоді і лише тоді, коли $|\operatorname{dom}\alpha|=|\operatorname{dom}\beta|$.

(7) $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Доведення. Твердження (1) і (2) випливають з означення напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ та описання ідемпотентів симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}(L)$ і природного часткового часткового порядку на ньому (див. [10, підрозділи 1.1 і 3.2]).

Твердження (3) і (4) випливають з означень відношень Ґріна $\mathscr{R}$ і $\mathscr{L}$ на $\mathscr{I}(L)$ і твердження 3.2.11 з [10].

Твердження (5) випливає з тверджень (3), (4) і леми 1.

(6) Нехай $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Тоді існує частковий порядковий ізоморфізм $\gamma\in\mathscr{O\!I}_n(L)$ такий, що $\alpha\mathscr{R}\gamma$ і $\gamma\mathscr{L}\beta$. З тверджень (3) і (4) випливає, що $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\gamma$ і $\operatorname{ran}\gamma=\operatorname{ran}\beta$. Позаяк β і γ — часткові бієкції, то

$$|\operatorname{dom}\alpha|=|\operatorname{dom}\gamma|=|\operatorname{ran}\gamma|=|\operatorname{ran}\beta|=|\operatorname{dom}\beta|.$$

Припустимо, що $|\operatorname{dom}\alpha| = |\operatorname{dom}\beta|$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$, і нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \beta = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k \\ v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix},$$

для деяких $x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k, u_1, \ldots u_k, v_1, \ldots v_k \in L$, $x_1 < \cdots < x_k$, $y_1 < \cdots < y_k$, $u_1 < \cdots < u_k$, $v_1 < \cdots < v_k$, $k \leq n$. Приймемо

$$\gamma = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}.$$

З тверджень (3) і (4) випливає, що $\alpha\mathscr{L}\gamma$ і $\gamma\mathscr{R}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$, а отже, $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

(7) За теоремою 1 з [9] у стійких напівгрупах відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються. Далі скористаємося теоремою 1. $\square$

Нагадаємо [10], що інверсна напівгрупа S називається *комбінаторною*, якщо кожен її $\mathscr{H}$-клас є одноелементною множиною. З твердження 1(5) випливає

Наслідок 1. *$\mathscr{O\!I}_n(L)$ — комбінаторна інверсна напівгрупа.*

Також з висловлень (6) і (7) твердження 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай n — довільне натуральне число. Тоді сім'я*

$$\{I_k = \mathscr{O\!I}_k(L) \colon k = 0, 1, \ldots, n\}$$

містить усі двобічні ідеали напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Якщо $\alpha\mathfrak{C}\mathbf{0}$ для деякого $\alpha \in \mathscr{O\!I}_n(L)$, то $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для всіх $\beta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ таких, що $\operatorname{rank}\beta \leq \operatorname{rank}\alpha$.*

Доведення. Розглянемо можливі випадки:

(1) $\operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\alpha$;

(2) $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \preccurlyeq \alpha$;

(3) $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \not\preccurlyeq \alpha$.

(1) Якщо $\operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\alpha$, то $|\operatorname{dom}\beta| = |\operatorname{ran}\beta| = |\operatorname{ran}\alpha| = |\operatorname{dom}\alpha|$. За лемою 1 існують часткові порядкові ізоморфізми $\gamma, \delta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ такі, що $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\gamma$, $\operatorname{ran}\gamma = \operatorname{dom}\alpha$, $\operatorname{dom}\delta = \operatorname{ran}\alpha$ і $\operatorname{ran}\delta = \operatorname{ran}\beta$. Тоді маємо, що $\beta = \gamma\alpha\delta\mathfrak{C}\gamma\mathbf{0}\delta = \mathbf{0}$, а отже, $\beta\mathfrak{C}\mathbf{0}$ і $\beta\mathfrak{C}\alpha$.

(2) Якщо $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \preccurlyeq \alpha$, то за лемою 1.4.6 з [10] $\beta = \beta\beta^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}\mathbf{0}$, а отже, $\beta\mathfrak{C}\mathbf{0}$ і $\beta\mathfrak{C}\alpha$.

(3) Припустимо, що $\operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$ і $\beta \not\preccurlyeq \alpha$. Нехай A — підмножина в $\operatorname{dom}\alpha$ така, що $|A| = \operatorname{rank}\beta < \operatorname{rank}\alpha$. Позначимо через ε тотожне відображення на множині A. Тоді $\varepsilon\alpha \preccurlyeq \alpha$ і $\operatorname{rank}(\varepsilon\alpha) = \operatorname{rank}\beta$. З випадку (1) випливає, що $\varepsilon\alpha\mathfrak{C}\alpha\mathfrak{C}\mathbf{0}$, і за випадком (2) маємо, що $\varepsilon\alpha\mathfrak{C}\beta$, а отже, $\alpha\mathfrak{C}\beta$. $\square$

Лема 3. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ і $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких різних $\alpha, \beta \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ таких, що $\beta \preccurlyeq \alpha$. Тоді $\alpha\mathfrak{C}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ таких, що* $\operatorname{rank}\gamma \leq \operatorname{rank}\alpha$.

Доведення. Позаяк $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то з тверджень 2.3.4(1) і 1.4.7(4) монографії [10] випливає, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha\alpha^{-1} \preccurlyeq \beta\beta^{-1}$. Також, $\operatorname{rank}\alpha\alpha^{-1} = \operatorname{rank}\alpha$ і $\operatorname{rank}\beta\beta^{-1} = \operatorname{rank}\beta$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$.

Припустимо, що $\operatorname{rank}\alpha = k$ для деякого натурального числа $k \leq n$. Якщо $\operatorname{rank}\beta = 0$, то скористаємося лемою 2. Тому надалі будемо вважати, що $p = \operatorname{rank}\beta \neq 0$ і $p < k$.

Спочатку припустимо, що $p = k - 1$ і $\operatorname{dom}\alpha = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Позначимо $\beta_1 = \beta$. Позаяк L — лінійно впорядкована множина, то за лемою 1 існує частковий порядковий ізоморфізм $\iota_1 \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ такий, що $\operatorname{dom}\iota_1 = \operatorname{dom}\beta_1$ і $\operatorname{ran}\iota_1 = \operatorname{dom}\alpha \setminus \{y_1\}$, де $y_1 = \max\operatorname{dom}\beta_1$. Тоді $\iota_1\alpha\iota_1^{-1} = \beta_1$ і $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} \neq \beta_1$. Елемент $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1}$ є ідемпотентом, оскільки

$$\iota_1\beta_1\iota_1^{-1}\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\iota_1^{-1}\iota_1\beta_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}.$$

Також, позаяк $\operatorname{dom}\iota_1 = \operatorname{dom}\beta_1$, то $\beta_1\iota_1 = \iota_1$, звідки випливає, що $\beta_1\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}$, а отже, $\iota_1\beta_1\iota_1^{-1} \preccurlyeq \beta$. Оскільки $\alpha\mathfrak{C}\beta = \beta_1$, то $\beta_2 = \iota_1\beta_1\iota_1^{-1}\mathfrak{C}\iota_1\alpha\iota_1^{-1} = \beta_1$, а отже, $\beta_2\mathfrak{C}\beta_1\mathfrak{C}\alpha$. З визначення елемента $\beta_2 \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ випливає, що

$$\operatorname{rank}\beta_2 = \operatorname{rank}\beta_1 - 1 = k - 2.$$

Далі за індукцією для довільного $m = 2, \ldots, k$ побудуємо послідовності елементів $\iota_m \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ та ідемпотентів $\beta_{m+1} \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$, які задовольняють умови

(1) $\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m$ і $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \neq \beta_m$;

(2) $\beta_{m+1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\mathfrak{C}\alpha$;

(3) $\beta_{m+1} \preccurlyeq \beta_m$;

(4) $\operatorname{rank}\beta_{m+1} = k - m - 1$.

Оскільки L — лінійно впорядкована множина, то за лемою 1 існує частковий порядковий ізоморфізм $\iota_m \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ такий, що $\operatorname{dom}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_m$ і $\operatorname{ran}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_{m-1} \setminus \{y_m\}$, де $y_m = \max\operatorname{dom}\beta_m$. Тоді $\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m$ і $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \neq \beta_m$. Елемент $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1}$ є ідемпотентом, оскільки

$$\iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\iota_m^{-1}\iota_m\beta_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}.$$

Також, позаяк $\operatorname{dom}\iota_m = \operatorname{dom}\beta_m$, то $\beta_m\iota_m = \iota_m$, звідки випливає, що $\beta_m\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}$, а отже, $\iota_m\beta_m\iota_m^{-1} \preccurlyeq \beta_m$. Оскільки $\alpha\mathfrak{C}\cdots\mathfrak{C}\beta_{m-1}\mathfrak{C}\beta_m$, то

$$\beta_{m+1} = \iota_m\beta_m\iota_m^{-1}\mathfrak{C}\iota_m\beta_{m-1}\iota_m^{-1} = \beta_m,$$

а отже, $\beta_{m+1}\mathfrak{C}\beta_m\mathfrak{C}\cdots\mathfrak{C}\alpha$. З визначення елемента $\beta_{m+1} \in \mathscr{O}\!\mathscr{I}_n(L)$ випливає, що

$$\operatorname{rank}\beta_{m+1} = \operatorname{rank}\beta_m - 1 = k - m - 1.$$

За вище викладеною побудовою маємо, що $\operatorname{rank}\beta_k = 0$, а отже, $\beta_k = \mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Отже, отримали, що $\alpha\mathfrak{C}\mathbf{0}$. Далі скористаємося лемою 2.

Припустимо, що $p < k-1$. Тоді існує елемент $x \in L$ такий, що $x \in \operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}\beta$. Нехай ε — тотожне перетворення множини $\operatorname{dom}\alpha \setminus \{x\}$. Очевидно, що $\beta \preccurlyeq \varepsilon \preccurlyeq \alpha$ і $\operatorname{rank}\varepsilon = \operatorname{rank}\alpha - 1$. Тоді $\varepsilon = \varepsilon\alpha\mathfrak{C}\varepsilon\beta = \beta$, а отже, $\varepsilon\mathfrak{C}\beta$. Звідки випливає, що $\varepsilon\mathfrak{C}\alpha$. Далі скористаємося попередньо доведеним фактом. □

Лема 4. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ і $\alpha\mathfrak{C}\beta$ для деяких різних $\alpha, \beta \in \mathscr{O\!I}_n(L)$. Тоді $\alpha\mathfrak{C}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ таких, що $\operatorname{rank}\gamma \leq \max\{\operatorname{rank}\alpha, \operatorname{rank}\beta\}$.*

Доведення. Позаяк $\mathscr{O\!I}_n(L)$ — інверсна напівгрупа, то за твердженнями 2.3.4(1) і 1.4.7(4) з [10] маємо, що $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha\alpha^{-1} \preccurlyeq \beta\beta^{-1}$. Також, $\operatorname{rank}\alpha\alpha^{-1} = \operatorname{rank}\alpha$ і $\operatorname{rank}\beta\beta^{-1} = \operatorname{rank}\beta$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$.

Позаяк $\alpha = \alpha\alpha\mathfrak{C}\alpha\beta\mathfrak{C}\beta\beta = \beta$, то $\alpha\mathfrak{C}\alpha\beta\mathfrak{C}\beta$. З умови $\alpha \neq \beta$ випливає, що $\alpha\beta \preccurlyeq \alpha$ і $\alpha\beta \preccurlyeq \beta$. Далі скористаємося лемою 3. □

Теорема 2. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина. Для довільного натурального числа n кожна конґруенція на напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ є конґруенцією Ріса.*

Доведення. Нехай α — елемент напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\alpha = k \leq n$ такий, що виконуються умови:

(1) існує елемент $\beta \neq \alpha$ напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\beta \leq \operatorname{rank}\alpha$ такий, що $\alpha\mathfrak{C}\beta$;

(2) для довільного $\gamma \in \mathscr{O\!I}_n(L)$ з $\operatorname{rank}\gamma > k$ елемент γ $\mathfrak{C}$-еквівалентний лише γ у випадку, коли $k < n$.

За лемою 4 усі елементи ідеала $I_k = \mathscr{O\!I}_k(L)$ напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними, а отже, конґруенція $\mathfrak{C}$ породжена ідеалом I_k. Очевидно, що одинична та універсальна конґруєції є конґруенціями Ріса на $\mathscr{O\!I}_n(L)$, оскільки вони породжені ідеалами $I_0 = \mathbf{0}$ і $I_n = \mathscr{O\!I}_n(L)$, відповідно. □

Зауваження 1. *У праці [8] доведено, що на напівгрупі $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ усіх часткових порядково-опуклих ізоморфізмв лінійно впорядкованої множини $(\omega, \leq)$ рангу $\leqslant n$ відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ збігаються, і крім того, кожна конґруенція на $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є конґруенцією Ріса. Очевидно, що для довільного натурального числа n напівгрупа $\mathscr{I}_\omega^n(\overrightarrow{\mathrm{conv}})$ є піднапівгрупою в $\mathscr{O\!I}_n(\omega)$.*

Нагадаємо [7], що нескінченна підмножина D напівгрупи S називається *ω-нестійкою*, якщо $sB \cup Bs \nsubseteq D$ для довільних $s \in D$ і нескінченої підмножини B у D. Будемо говорити, що *напівгрупа S має щільний ряд ідеалів $J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_m$, $m \in \mathbb{N}$*, якщо J_0 — скінченний ідеал в S і $J_k \setminus J_{k-1}$ — ω-нестійка підмножина в S для довільного $k = 1, \ldots, m$.

Надалі через $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ позначатимемо ряд ілеалів, визначений у формулюванні наслідку 2. Очевидно, що $I_0 = \{\mathbf{0}\}$. Також з твердження 1 і наслідку 2 випливає, що нескінченна множина $I_k \setminus I_{k-1}$ є $\mathscr{D}$-класом напівгрупи $\mathscr{O\!I}_n(L)$, що складається з елементів рангу k. Отже, для довільного елемента $\alpha \in I_k \setminus I_{k-1}$ і довільної нескінченної множини $B \subseteq I_k \setminus I_{k-1}$ існує елемент $\beta \in I_k \setminus I_{k-1}$ такий, що $\operatorname{dom}\beta \neq \operatorname{ran}\alpha$ або $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{ran}\beta$. З вище наведених міркувань і визначення напівгрупової операції на $\mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що $\{\alpha\beta, \beta\alpha\} \nsubseteq I_k \setminus I_{k-1}$, а отже, $I_k \setminus I_{k-1}$ — ω-нестійка підмножина в напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$ для довільного $k = 1, \ldots, n$. Отож, ми довели таке твердження

Твердження 2. *$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ — щільний ряд ідеалів у $\mathscr{O\!I}_n(L)$ для довільного натурального числа n.*

Відомо, що напівгрупи зі щільними рядами ідеалів зберігаються скінченними прямими добутками та гомоморфізмами, для яких кожен елемент з образу має скінченний прообраз [7].

Теорема 3. *Нехай $(L, \leqslant)$ — нескінченна лінійно впорядкована множина, n — довільне натуральне число, S — напівгрупа та $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — неанулюючий гомоморфізм. Тоді гомоморфний образ $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ — напівгрупа зі щільними рядами ідеалів.*

Доведення. Твердження теореми очевидне у випадку, коли $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — ін'єктивний гомоморфізм. Позаяк $\mathfrak{h}\colon \mathscr{O\!I}_n(L) \to S$ — неанулюючий гомоморфізм і за теоремою 2 кожна конґруенція на напівгрупі є конґруенцією Ріса, то існує натуральне число $k \leq n$ таке, що виконуються такі умови:

(1) $(\alpha)\mathfrak{h} = (\beta)\mathfrak{h}$ для довільних $\alpha, \beta \in I_k$;

(2) $(\gamma)\mathfrak{h} \neq (\delta)\mathfrak{h}$ для довільних різних $\gamma, \delta \in \mathscr{O\!I}_n(L) \setminus I_k$.

Отож, отримуємо, що гомоморфний образ $(I_k)\mathfrak{h}$ — нуль напівгрупи $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$, а також, що звуження $\mathfrak{h}{\restriction}_{\mathscr{O\!I}_n(L)\setminus I_k}\colon \mathscr{O\!I}_n(L)\setminus I_k \to S$ гомоморфізму $\mathfrak{h}$ є ін'єктивним відображенням. З останньої умови випливає, що множина $(I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h}$ — ω-нестійка підмножина в напівгрупі $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ для довільного $m = k+1, \ldots, n$. Справді, для довільних елементів $a, b \in (I_m)\mathfrak{h}\setminus(I_{m-1})\mathfrak{h}$ $(m = k+1, \ldots, n)$, їхні повні прообрази $(a)\mathfrak{h}^{-1}$ і $(b)\mathfrak{h}^{-1}$ є одноелементними підмножинами в напівгрупі $\mathscr{O\!I}_n(L)$. Нехай $\alpha = (a)\mathfrak{h}^{-1}$ і $\beta = (b)\mathfrak{h}^{-1}$. Тоді $\alpha, \beta \in I_m \setminus I_{m-1}$, і з визначення напівгрупової операції на $\mathscr{O\!I}_n(L)$ випливає, що $\{\alpha\beta, \beta\alpha\} \nsubseteq I_m\setminus I_{m-1}$. Звідси, врахувавши умови (1) і (2), отримуємо, що виконується хоча б одна з умов або

$$ab = (\alpha)\mathfrak{h}(\beta)\mathfrak{h} = (\alpha\beta)\mathfrak{h} \notin (I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h},$$

або

$$ba = (\beta)\mathfrak{h}(\alpha)\mathfrak{h} = (\beta\alpha)\mathfrak{h} \notin (I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h},$$

тобто $(I_m)\mathfrak{h} \setminus (I_{m-1})\mathfrak{h}$ — ω-нестійка підмножина в $(\mathscr{O\!I}_n(L))\mathfrak{h}$ для $m = k+1, \ldots, n$. Отже, виконується твердження теореми. $\square$

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список літератури

[1] Wagner V.V. *To the theory of partial transformations.* DAN USSR, 1952, **84**, 653–656. (in Russian)

[2] Wagner V.V. *Generalized groups.* DAN USSR, 1952, **84**, 1119–1122. (in Russian)

[3] Clifford A.H., Preston G.B. *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.

[4] Clifford A.H., Preston G.B. *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.

[5] Gluskin L.M., Schein B.M., Shneperman L.B., Yaroker I.S. Addendum to "A survey of semigroups of continuous selfmaps". Semigroup Forum, 1977, **14**, 95–125. doi:10.1007/BF02194658

[6] Green J.A. *On the structure of semigroups.* Ann. Math. Ser. 2, 1951, **54** (1), 163–172. doi:10.2307/1969317

[7] Gutik O., Lawson J., Repovš D. *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups.* Semigroup Forum, 2009, **78** (2), 326–336. doi:10.1007/s00233-008-9112-2

[8] Gutik O.V., Popadiuk O.B. *On the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_n}$, which is generated by the family $\mathscr{F}_n$ of finite bounded intervals of ω*, Carpathian Math. Publ., 2023, **15** (2), 331–355. doi:10.15330/cmp.15.2.331-355

[9] Koch R.J., Wallace A.D. *Stability in semigroups*, Duke Math. J., 1957, **24** (2), 193–195. doi:10.1215/S0012-7094-57-02425-0

[10] Lawson M. Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. Singapore: World Scientific, 1998.

[11] Magill K.D., jun. *A survey of semigroups of continuous selfmaps.* Semigroup Forum, 1975/76, **11** 189–282. doi:10.1007/BF02195270

[12] Petrich M. *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Надійшло 04.11.2024

Gutik O.V., Shchypel M.R. *The semigroup of finite partial order isomorphisms of a bounded rank of an infinite linearly ordered set*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 60–68.

One of the classical problems of the theory of semigroups of transformations is the study of the structure of the semigroup of transformations of a set that preserve the structure of the set (geometry, partial order, topology), in particular, when these transformations are local, that is, partial equivalences (partial isometries, partial order isomorphisms, partial homeomorphisms, partial diffeomorphisms, etc.). We study algebraic properties of the semigroup $\mathscr{O\!I}_n(L)$ of finite partial order isomorphisms of the rank $\leq n$ of an infinite linearly ordered set $(L, \leqslant)$. In particular we describe its idempotents, the natural partial order and Green's relations on $\mathscr{O\!I}_n(L)$. It is proved that the semigroup $\mathscr{O\!I}_n(L)$ is stable and it contains tight ideal series. Moreover, we show that the semigroup $\mathscr{O\!I}_n(L)$ admits only Rees' congruences and every its homomorphic image is a semigroup with tight ideal series.