УДК 517.9+531.19+530.145

©2015 р. І.В. Гап'як, В.І. Герасименко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Інститут математики НАН України, Київ

РІВНЯННЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА З ПОЧАТКОВИМИ КОРЕЛЯЦІЯМИ В КІНЕТИЧНІЙ ТЕОРІЇ ЗІТКНЕНЬ

Розглянуто проблему опису кінетичної еволюції виділеної частинки в оточенні нескінченної кількості частинок, взаємодіючих як тверді кулі з пружним зіткненням за наявності початкових кореляцій. Встановлено, що еволюція стану виділеної твердої кулі описується узагальненим кінетичним рівнянням Фоккера – Планка з початковими кореляціями. За допомогою нескінченної послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку побудованого кінетичного рівняння описано процеси поширення початкових кореляцій і народження кореляцій в системі.

The problem of the description of the kinetic evolution of a multi-particle system composed of a tracer hard sphere and an environment of finitely many hard spheres in the presence of initial correlations is considered. We prove that the evolution of a state of a tracer hard sphere is described within the framework of the generalized Fokker – Planck kinetic equation with initial correlations. The processes of the propagation of initial correlations and the creation of correlations in a system described by means of an infinite sequence of the explicitly defined functionals with respect to a solution of the constructed kinetic equation are described.

1. Вступ

Однією з відкритих проблем теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок статистичної механіки залишається проблема опису кінетичної еволюції за наявності кореляцій початкових станів [1], [2], [3], зокрема, математичне обґрунтування виведення кінетичних рівнянь типу рівняння Фоккера – Планка для виділеної частинки, яка взаємодіє із системою нескінченної кількості частинок у випадку початкових станів з кореляціями, які, наприклад, характеризують системи в конденсованих станах.

Один з підходів до виведення кінетичного рівняння Фоккера – Планка [4], [5] для системи твердих куль, який ґрунтується на методах теорії збурень, бере свої витоки з праці М.М. Боголюбова [6]. В сучасних працях [7], [8], [9] основний підхід до дослідження зазначеної проблеми ґрунтується на побудові скейлінгової границі [10], наприклад, дифузійної границі, розв'язку еволюційних рівнянь для стану виділеної частинки в оточенні багатьох частинок, які знаходяться в рівноважному стані (термостат), зокрема, границі розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) [11] такої системи, побудованого методами теорії збурень. Зауважимо, що відомими строгими результатами в цьому напрямку є також результати з обґрунтування в скейлінговій границі Больцмана – Ґреда нелінійного рівняння Больцмана в кінетичній теорії зіткнень [11], [12], [13].

Мета цієї роботи полягає в математичному описі еволюції стану системи твердих куль з пружним зіткненням, яка складається з виділеної частинки і оточення довільної кількості твердих куль, за допомогою кінетичного рівняння з початковими кореляціями. Вирішення цієї проблеми, зокрема, дало б можливість строго описати процес поширення початкових кореляцій у відкритих системах [14], [15], а також пояснити природу стохастичної поведінки таких систем [6], [16].

Використовуючи розвинутий в статті [17] підхід до обґрунтування рівняння Фоккера – Планка, в роботі встановлено еквівалентність опису еволюції зазначеної системи твердих куль в термінах маргінальних спостережуваних, які є розв'язком двоїстої ієрархії рівнянь ББҐКІ, і в термінах щільності функції розподілу виділеної частинки, яка є розв'язком узагальнення кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями. Зауважимо, що сформульовані раніше кінетичні рівняння типу рівняння Фоккера – Планка описують асимптотичну поведінку розв'язку узагальненого рівняння Фоккера – Планка у відповідних скейлінгових наближеннях у випадку початкових станів за відсутності кореляцій.

2. Кореляції початкових станів та методи опису їх еволюції

Розглянемо систему багатьох частинок, яка складається із виділеної частинки і оточення, а саме, системи не фіксованої (довільної) кількості частинок. Будемо вважати, що частинки взаємодіють між собою як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$.

Нехай виділена тверда куля з масою M (важка частинка) характеризується фазовими змінними $(q,p) \equiv x \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, а тверді кулі із оточення мають однакову масу m (легкі частинки) і характеризуються фазовими координатами $(q_i,p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для такої системи частинок множина конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n} \equiv \big\{(q,q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^{3(1+n)} \big| |q_i - q_j| < \sigma$ хоча б для однієї пари $(i,j) : i \neq j \in (1,\ldots,n)$ та $|q-q_j| < \sigma$, якщо $j \in (1,\ldots,n)\big\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Надалі будемо розглядати початкові стани, які описуються послідовністю $F^{(c)} = (F^{(c)}_{1+0}, F^{(c)}_{1+1}, \ldots, F^{(c)}_{1+s}, \ldots)$ таких маргінальних функцій розподілу:

$$
\begin{aligned}
&F^{(c)}_{1+0} = F^0_{1+0}(x), \qquad (1)\\
&F^{(c)}_{1+s} = F^{(c)}_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_s) =\\
&\ F^0_{1+0}(x)F^0_{0+s}(x_1,\ldots,x_s)g_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_s),\\
&s \geq 1,
\end{aligned}
$$

де обмежені симетричні відносно перестановок аргументів $x_1,\ldots,x_s$ функції g_{1+s}, $s \geq 1$, які дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_{1+s}$, описують початкові кореляції системи $1+s$ твердих куль та функції F^0_{1+0} і F^0_{0+s} належать відповідним просторам $L^1_{1+n} \equiv L^1(\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}))$ інтегровних функцій f_{1+n} визначених на фазовому просторі $1+n$ частинок, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1,\ldots,x_n$ і несиметричними відносно перестановок аргументу x та аргументів $x_1,\ldots,x_n$, дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n}$, з такою нормою

$$
\|f_{1+n}\| = \int |f_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)|dxdx_1\ldots dx_n.
$$

Підпростору $L^1_{1+n,0} \subset L^1_{1+n}$ належать неперервно диференційовні функції з компактними носіями.

Зауважимо, що у випадку початкових станів, які розглядались в роботі [17], послідовність (1) маргінальних функцій розподілу мала вигляд

$$
\begin{aligned}
F^{(c)} = \big(&F^0_{1+0}, F^0_{1+0}F^0_1\mathcal{X}_{\mathbb{W}_{1+1}}, \ldots,\\
&F^0_{1+0}F^0_{0+s}\mathcal{X}_{\mathbb{W}_{1+n}}, \ldots\big),
\end{aligned}
$$

де $\mathcal{X}_{\mathbb{W}_{1+n}}$ – функція Хевісайда дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^{1+n} \setminus \mathbb{W}_{1+n}$ системи $1+n$ твердих куль, тобто початковий стан системи статистично незалежної виділеної твердої кулі від оточенням довільної кількості твердих куль.

Еволюція системи в початковому стані (1) може бути описана за допомогою розв'язку для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних (двоїста ієрархії рівнянь ББҐКІ) [17], тобто в еквівалентний спосіб до опису еволюції станів за допомогою розв'язку для ієрархії рівнянь ББҐКІ [11].

Нехай C_γ – простір послідовностей $b = (b_{1+0}, b_{1+1}, \ldots, b_{1+n}, \ldots)$ вимірних обмежених функцій визначених на відповідних фазових просторах $b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)$, які є симетричними відносно перестановок аргументів $x_1,\ldots,x_n$, і несиметричними відносно перестановок аргументів $x_1,\ldots,x_n$ та x, з нормою

$$
\|b\|_{C_\gamma} = \max_{n\geq 0}\frac{\gamma^n}{n!}\|b_{1+n}\|_{C_{1+n}} \equiv
$$

$$\max_{n\geq 0}\frac{\gamma^n}{n!}\max_{x,x_1,\ldots,x_n}\big|b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)\big|,$$

де $\gamma<1$ – параметр.

Для початкових станів (1) середні значення (математичне сподівання) послідовності маргінальних спостережуваних $B(t)=(B_{1+0}(t,x),B_{1+1}(t,x,x_1),\ldots,B_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s),\ldots)\in C_\gamma$ визначаються за допомогою такого функціоналу

$$\big(B(t),F^{(c)}\big)= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{s+1}}dxdx_1\ldots dx_s\,B_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s)F^0_{1+0}(x)F^0_{0+s}(x_1,\ldots,x_s)g_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_s). \tag{2}$$

Для початкових даних з простору C_γ функціонал (2) існує.

Якщо $B(0)=(B^0_{1+0}(x),B^0_{1+1}(x,x_1),\ldots,B^0_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_s),\ldots)\in C_\gamma$ – послідовність початкових маргінальних спостережуваних величин системи, яка розглядається, тоді еволюція спостережуваних описується непертурбативним розв'язком $B(t)=(B_{1+0}(t,x),B_{1+1}(t,x,x_1),\ldots,B_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s),\ldots)$ задачі Коші для двоїстої ієрархії рівнянь ББҐКІ системи твердих куль з пружними зіткненнями [17]:

$$B_{1+s}(t)=\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\},Z)\,B^0_{1+s-n},\quad s\geq 0, \tag{3}$$

де функція $B^0_{1+s-n}\equiv B^0_{1+s-n}(x,x_1,\ldots,x_{j_1-1},x_{j_1+1},\ldots,x_{j_n-1},x_{j_n+1},\ldots,x_s)$, твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ з розкладу (3) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку груп операторів систем твердих куль, який визначається формулою

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\},Z)\doteq \sum_{\mathrm{P}}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{Z_i\subset\mathrm{P}}S_{|\theta(Z_i)|}(t,\theta(Z_i)), \tag{4}$$

та відповідними символами позначено множини індексів: $Y\equiv(1,\ldots,s)$, $Z\equiv(j_1,\ldots,j_n)\subset Y$; множина $\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\}$ складається з одного елементу $\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z=(\mathfrak{t},1,\ldots,j_1-1,j_1+1,\ldots,j_n-1,j_n+1,\ldots,s)$, символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума за всіма можливими розбиттям P множини $(\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\},Z)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $Z_i\in(\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\},Z)$, які взаємно не перетинаються, та відображення $\theta(\cdot)$ є оператором декластеризації елементів множини: $\theta(\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus Z\},Z)=\mathfrak{t}\cup Y$. Група операторів системи $1+n$ твердих куль визначена на функціях $b_{1+n}\in C_{1+n}$ згідно формули

$$S_{1+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n)b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)\doteq \begin{cases} b_{1+n}\big(X(t),X_1(t),\ldots,X_n(t)\big), & (x,x_1,\ldots,x_n)\in\Gamma_{1+n},\\ 0, & (q,q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{W}_{1+n},\end{cases} \tag{5}$$

де $\Gamma_{1+n}\equiv\mathbb{R}^{3(1+n)}\times(\mathbb{R}^{3(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n})$, функція $X_i(t)\equiv X_i(t,x,x_1,\ldots,x_n)$ – фазова траєкторія i-ї твердої кулі з оточення і $X(t)\equiv X(t,x,x_1,\ldots,x_n)$, – фазова траєкторія виділеної твердої кулі [11]. Зауважимо, що фазові траєкторії системи твердих куль визначено не для всіх початкових даних (множина $\mathcal{M}^0_{1+n}$ [11]), а майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^{3(1+n)}\times(\mathbb{R}^{3(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n})$.

Наведемо приклади кумулянтів (4) груп операторів систем твердих куль

$$\mathfrak{A}_{1+0}(t,\{\mathfrak{t}\cup Y\})=S_{s+1}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s),$$
$$\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{\mathfrak{t}\cup Y\setminus j\},j)=S_{s+1}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,s)-S_s(t,\mathfrak{t},Y\setminus j)S_1(t,j).$$

Група операторів (5) визначена на просторі C_{1+n}. Вона є ізометричною w*-неперервною групою. Інфінітезімальний генератор $\mathcal{L}_{1+n}$ групи операторів (5) співпадає з оператором Ліувілля системи твердих куль, який має таку структуру:

$$\mathcal{L}_{1+n}=\mathcal{L}(\mathfrak{t})+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}(j)+\sigma^2\sum_{j_1=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},j_1)+\sigma^2\sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2),$$

і на підпросторі $C^0_{1+n}\subset C_{1+n}$ неперервно диференційовних функцій з компактними носіями визначається операторами Ліувілля вільної еволюції:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{t})b_{1+n} \doteq -\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q}\rangle b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}(j)b_{1+n} \doteq -\langle \frac{p_j}{m}, \frac{\partial}{\partial q_j}\rangle b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n),$$

$$n \geq 0,$$

та операторами взаємодії $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)$ і $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},j_1)$, які на просторі C_{1+n} визначаються для $t>0$ в сенсі w*-слабкої збіжності відповідно такими формулами:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)b_{1+n} \doteq \int\limits_{\mathbb{S}^2_+} d\eta\,\langle\eta,(\frac{p_{j_1}}{m}-\frac{p_{j_2}}{m})\rangle \times \quad (7)$$

$$\big(b_{1+n}(x,x_1,\ldots,q_{j_1},p^\star_{j_1},\ldots,q_{j_2},p^\star_{j_2},\ldots, x_n)-b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)\big)\delta(q_{j_1}-q_{j_2}+\sigma\eta),$$

$$n\geq 1,$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},j_1)b_{1+n} \doteq \int\limits_{\mathbb{S}^2_{0,+}} d\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{s+1}}{m})\rangle \times$$

$$\big(b_{1+n}(q,p^*,x_1,\ldots,q_{j_1},p^*_{j_1},\ldots,x_n)- b_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n)\big)\delta(q-q_{j_1}+\sigma\eta),$$

$$n\geq 0,$$

де символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено скалярний добуток, введено множини: $\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3\big|\,|\eta|=1,\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle>0\}$, $\mathbb{S}^2_{0,+} \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3\big|\,|\eta|=1,\langle\eta,(mp-Mp_{j_1})\rangle>0\}$, і значення імпульсів після зіткнення $p^\star_{j_1},p^\star_{j_2}$ та $p^*,p^*_{j_1}$ визначаються відповідним виразом:

$$\begin{aligned} p^\star_{j_1} &\doteq p_{j_1}-\eta\,\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle, \qquad (8)\\ p^\star_{j_2} &\doteq p_{j_2}+\eta\,\langle\eta,(p_{j_1}-p_{j_2})\rangle;\\ p^* &\doteq p-\frac{2Mm}{M+m}\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{j_1}}{m})\rangle,\\ p^*_{j_1} &\doteq p_{j_1}+\frac{2Mm}{M+m}\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{j_1}}{m})\rangle. \end{aligned}$$

Якщо $t<0$, тоді інфінітезімальний генератор групи (5) визначається відповідним оператором [17].

Найпростіші приклади маргінальних спостережуваних (3) зображуються такими розкладами:

$$B_1(t,x)=\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t})B^0_1(x),$$
$$B_2(t,x,x_1)=\mathfrak{A}_1(t,\{\mathfrak{t},1\})B^0_2(x,x_1)+ \mathfrak{A}_2(t,\mathfrak{t},1)(B^0_1(x)+B^0_1(x_1)).$$

Оскільки за умови $\gamma<e^{-1}$ для функцій (3) справедлива така оцінка [17]

$$\|B(t)\|_{\mathcal{C}_\gamma}\leq e^2(1-\gamma e)^{-1}\|B(0)\|_{\mathcal{C}_\gamma},$$

функціонал середніх значень (2) для непертурбативного розв'язку задачі Коші для двоїстої ієрархії рівнянь ББҐКІ системи твердих куль існує.

3. Процеси поширення початкових кореляцій і народження кореляцій

Сформулюємо основний результат.

Твердження 1. *Якщо початкові стани задовольняють умову (1), для функціоналу (2) справедливе таке зображення*

$$\big(B(t),F^{(c)}\big)=\big(B(0),F(t\mid F_{1+0}(t))\big), \quad (9)$$

де послідовність $F(t\mid F_{1+0}(t))=(F_{1+0}(t), F_{1+1}(t\mid F_{1+0}(t)),\ldots,F_{1+s}(t\mid F_{1+0}(t)),\ldots)$ *визначається маргінальними функціоналами стану* $F_{1+s}(t\mid F_{1+0}(t))=F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s\mid F_{1+0}(t))$, *які є функціоналами відносно одночастинкової функції розподілу виділеної твердої кулі*

$$F_{1+0}(t,x)= \quad (10)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1\ldots dx_n\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\mathfrak{t},1, \ldots,n)F^0_{1+0}(x)F^0_{0+n}(x_1,\ldots,x_n)g_{1+n}(x, x_1,\ldots,x_n).$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ розкладу в ряд (10) є кумулянтом $(n+1)$-го порядку груп операторів $\{S^*_{1+n}(t)\}_{n\geq0}$ спряжених в сенсі функціоналу (2) до груп операторів (5) $(S^*_{1+n}(t)=S_{1+n}(-t))$, який визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n)= \quad (11)$$
$$\sum_{\mathrm{P}}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}S^*_{|X_i|}(t,X_i),$$

де символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума за всіма можливими розбиттями P множини $(\mathfrak{t},1,\ldots,n)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in(\mathfrak{t},1,\ldots,n)$, які взаємно не перетинаються.

Маргінальні функціонали стану $F_{1+s}(t \mid F_{1+0}(t))$, $s \geq 1$, з послідовності $F(t \mid F_{1+0}(t))$ зображуються такими розкладами в ряд:

$$F_{1+s}\big(t, x, x_1, \dots, x_s \mid F_{1+0}(t)\big) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) F_{1+0}(t, x), \tag{12}$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються такими розкладами:

$$\mathfrak{V}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) \doteq$$
$$\doteq S_{s+1}(-t, \mathfrak{t}, 1, \dots, s) g_{1+s}(x, x_1, \dots, x_s) F^0_{0+s}(x_1, \dots, x_s) S_1(t, \mathfrak{t}) \prod_{i=1}^{s} S_1(t, i),$$
$$\mathfrak{V}_{1+1}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_{1+1}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) \sum_{i_1=1}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_{1+1}(t, \{\mathfrak{t}, i_1\}, s+1), \dots$$

За умови на густину частинок оточення $\frac{1}{v} < e^{-4}$, ряд (12) збігається за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^{3(1+s)} \times (\mathbb{R}^{3(1+s)} \setminus \mathbb{W}_{1+s}))$ [19].

З метою доведення основного результату встановимо справедливість рівності (9) у випадку спеціальних класів маргінальних спостережуваних.

Оскільки для маргінальних спостережуваних виділеної частинки $B^{(\mathfrak{t})}(0) = (b_{1+0}(x), 0, \dots)$ розклад (3) набуває такого вигляду

$$B^{(\mathfrak{t})}_{1+s}(t) = \mathfrak{A}_{1+s}(t, \mathfrak{t}, 1, \dots, s) b_{1+0}(x), \quad s \geq 0, \tag{13}$$

тоді для функціоналу (2) справедливе таке зображення

$$\big(B^{(\mathfrak{t})}(t), F^{(c)}\big) = \big(B^{(\mathfrak{t})}(0), F(t \mid F_{1+0}(t))\big) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx b_{1+0}(x) F_{1+0}(t, x),$$

де одночастинкова маргінальна функція розподілу виділеної кулі $F_{1+0}(t, x)$ визначається розкладом в ряд (10).

Для маргінальних спостережуваних $(1+s)$-арного типу, тобто $B^{(1+s)}(0) = (0, \dots, 0, b_{1+s}(x, x_1, \dots, x_s), 0, \dots)$, $s \geq 1$, справедлива така рівність

$$\big(B^{(1+s)}(t), F^{(c)}\big) = \big(B^{(1+s)}(0), F(t \mid F_{1+0}(t))\big) = \frac{1}{s!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{s+1}} dx dx_1 \dots dx_s \, b_{1+s}(x, x_1, \dots, x_s) F_{1+s}\big(t, x, x_1, \dots, x_s \mid F_1(t)\big),$$

де маргінальний функціонал стану $F_{1+s}(t \mid F_{1+0}(t))$ визначається розкладом в ряд (12).

Доведення цієї рівності ґрунтується на застосуванні кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи твердих куль (4), які є двоїстими до кінетичних кластерних розкладів кумулянтів груп операторів (11) введених у роботах [1], [2].

Маргінальні функціонали стану (12) описують усі можливі кореляції, які виникають в процесі еволюції виділеної твердої кулі з пружними зіткненнями з нескінченною кількістю твердих куль оточення.

4. Кінетичне рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями

Нехай $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+s} \in L^1(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s))$. Тоді при $t \geq 0$ функція розподілу (10), якою описується стан виділеної твердої кулі, задовольняє задачу Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1+0}(t, x) = -\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q} \rangle F_{1+0}(t, x) + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}} dp_1 d\eta \, \langle \eta, \big(\frac{p}{M} - \frac{p_1}{m}\big) \rangle \times \big(F_{1+1}(t, q, p^*, q - \sigma\eta, p_1^* \mid F_{1+0}(t, x)) - F_{1+1}(t, x, q + \sigma\eta, p_1 \mid F_{1+0}(t, x))\big), \tag{14}$$

$$F_{1+0}(t, x)|_{t=0} = F^0_{1+0}(x), \tag{15}$$

де використано позначення формул (7),(8) і функціонали, якими визначають інтеграл зіткнень зображуються розкладом в ряд (12) у випадку $s = 2$.

Для $t < 0$ кінетичне рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями має відповідний вигляд внаслідок врахування умов пружного зіткнення в цьому випадку [11].

Підкреслимо, що інтеграл зіткнень в кінетичному рівнянні (14) визначається початковими кореляціями системи (1).

Зауважимо, що у випадку відсутності початкових кореляцій та рівноважної початкової функції розподілу F^0_{0+1} частинок оточення, в результаті застосування рівняння Дюамеля до груп операторів, якими визначається твірний оператор $\mathfrak{V}_1(t, \{\mathfrak{t}, 1, 2\})$ з розкладу в ряд (12), перший член розкладу інтегралу зіткнень узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14) формально співпадає з інтегралом зіткнень кінетичного рівняння Фоккера – Планка, побудованого в роботі Боголюбова [6] за допомогою методів теорії збурень [17].

Нехай $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і початкові маргінальні функції розподілу твердих куль оточення належить класу інтегрованих функцій таких, що $\sup_{n\geq 0} \alpha^{-n} \|F^0_{0+n}\|_{L^1_n} < +\infty$, де $\alpha > 0$ – параметр (інтерпретується як густина системи). Тоді для непертурбативного розв'язку (10) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14),(15) у просторі $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо $\alpha < e^{-4}$, для $t \in \mathbb{R}$ розв'язок задачі Коші для рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14) визначається розкладом в ряд (10). Для початкових даних $F^0_{1+0} \in L^1_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+n} \in L^1_0(\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n))$ функцією (10) визначається сильний розв'язок, а для довільних початкових даних $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+n} \in L^1(\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus \mathbb{W}_n))$ – це слабкий розв'язок.*

Ідея доведення цього твердження аналогічна доведенню теореми про існування розв'язку у випадку узагальненого кінетичного рівняння Енскога [19].

5. Висновки

В роботі розвинуто підхід до опису кінетичної еволюції виділеної частинки, яка взаємодіє з системою багатьох частинок в результаті зіткнень, за допомогою еволюційних рівнянь для спостережуваних величин, що дало можливість сформулювати новий метод виведення кінетичного рівняння Фоккера – Планка для відкритих систем частинок в кінетичній теорії зіткнень.

Доведено еквівалентність опису еволюції системи твердих куль з пружними зіткненнями, яка складається з виділеної частинки і оточення, в термінах маргінальних спостережуваних (3) та послідовності явно визначених маргінальних функціоналів стану (12), які визначаються розв'язком (10) узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14). Іншими словами встановлено, що альтернативний метод опису еволюції станів виділеної частинки в системі багатьох частинок ґрунтується на немарковському кінетичному рівнянні Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14).

Маргінальні функціонали стану (12) описують процеси поширення початкових кореляцій і народження кореляцій у відкритих системах частинок.

За допомогою немарковського кінетичного рівняння Фоккера – Планка з початковими кореляціями (14) в скейлінгових границях [10] можна обґрунтувати кінетичні рівняння марковського типу. Зокрема зауважимо, що в марковському наближенні узагальнений фоккер-планковський інтеграл зіткнень в просторово однорідному випадку має більш загальну структуру ніж канонічний інтеграл зіткнень рівняння Фоккера – Планка [20].

Зауважимо, що стани частинок з оточення, які характеризуються інтегрованими функціями, описують системи скінченої середньої кількості частинок. Для опису еволюції станів виділеної частинки в оточенні системи нескінченної кількості частинок розв'язок (10) узагальненого кінетичного рівняння Фоккера – Планка (14) має бути обґрунтований для початкових даних частинок оточення, які належать до більш загальних банахових просторів, наприклад, простору обмежених функцій, якому належать, зокрема, рівноважні стани [11]. В цьому випадку кожний член розкладу для розв'язку (10) і для маргінальних функціоналів стану (12) містить розбіжні інтеграли [11]. Встановлена кумулянтна (11) структура розв'язку узагальненого рівняння Фоккера – Планка і твірних еволюційних операторів маргінальних функціоналів стану (12) дозволяють в цьому випадку регуляризувати відповідні розбіжні вирази.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gerasimenko V.I., Tsvir Zh.A.* On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states // Physica A: Stat. Mech. Appl. – 2012. – **391**, No.24. – P. 6362 – 6366.
2. *Gapyak I.V.* The kinetic equations of a hard sphere system with initial correlations // Proc. Inst. Math. NASU. – 2014.. –**11**, No.17. – P. 166 – 177.
3. *Gerasimenko V.I.* New approach to derivation of quantum kinetic equations with initial correlations // Carpathian Math. Publ. – 2015. – **7**, No.1. – P. 38 – 48.
4. *Fokker A.D.* Die mittlere energie rotierender elektrischer dipole im strahlungsfeld // Ann. Phys.. – 1914. – **43**. – P. 810 — 820.
5. *Planck M.* Ueber einen satz der statistichen dynamik und eine erweiterung in der quantumtheorie // Sitzungberichte der Preussischen Akadademie der Wissenschaften. – 1917. – P. 324 – 341.
6. *Боголюбов Н.Н.* О стохастических процессах в динамических системах // Физика елементарных частиц и атомного ядра. – 1978. – **9**, вып.4. – С. 501 – 579.
7. *Erdös L.* Classical and quantum Brownian motion // Annales Henri Poincaré. – 2007. – **8**. – P. 621 – 685.
8. *Figari R., Teta A.* Quantum Dynamics of a Particle in a Tracking Chamber. – Springer. Berlin Heidelberg, 2014.
9. *Dell'Antonio G., Figari R., Teta A.* A time dependent perturbative analysis for a quantum particle in a cloud chamber // Annales Henri Poincaré. – 2010. – **11**, No.3. – P. 539 – 564.
10. *Spohn H.* Large Scale Dynamics of Interacting Particles. – Berlin: Springer-Verlag, 1991.
11. *Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. – Springer Science & Business Media, 2012.
12. *Gallagher I., Saint-Raymond L., Texier B.* From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-range Potentials. – EMS Publ. House: Zürich Lectures in Advanced Mathematics, 2014.
13. *Gerasimenko V.I.* On the approaches to the derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. – 2013. – **10**, No.2. – P. 71 – 95.
14. *Attal S., Joye A., Pillet C.-A. (Eds.)* Open Quantum Systems. II: The Markovian Approach // Lecture Notes in Mathematics. – **1880**. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.
15. *Kapral R.* Quantum dynamics in open quantum-classical systems // J. Phys.: Condens. Matter. – 2015. – **27**. – 073201. – (22pp).
16. *Chandrasekhar S.* Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Mod. Phys. – 1943. – **15**. – P. 1 — 89.
17. *Гап'як І.В., Герасименко В.І.* Немарковське кінетичне рівняння Фоккера – Планка для системи твердих куль // Доповіді НАН України. – 2014. – №12. – С. 29 – 35.
18. *Gerasimenko V.I., Polishchuk D.O.* A nonperturbative solution of the nonlinear BBGKY hierarchy for marginal correlation operators // Math. Meth. Appl. Sci. – 2013. – **36**, No.17. – P. 2311 – 2328.
19. *Гап'як І.В., Герасименко В.І.* Hard sphere dynamics and the Enskog equation // Kinet. Relat. Models. – 2012. – **5**, No.3. – P. 459 – 484.
20. *Risken H.* The Fokker – Planck Equation: Methods of Solutions and Applications. – Springer; 3rd ed., 1996.