Bukovinian Math. Journal. 2024, **12** (1) , 120–136 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 120–136

Петрина Г.О., Станжицький А.О.

АПРОКСИМАЦІЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ СТОХАСТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ

У даній роботі запропоновано схему апроксимації у середньому квадратичному розв'язків стохастичної системи диференціальних рівнянь із запізненням розв'язками системи стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення. Стохастичні диференціальні рівняння із запізненням відіграють важливу роль у моделюванні реальних процесів з пам'яттю, але їх дослідження ускладнюється нескінченновимірністю фазового простору. Для подолання цих труднощів ми розвиваємо підхід, заснований на апроксимації системи із запізненням системою звичайних диференціальних рівнянь збільшеної розмірності. Основний результат полягає у доведенні того, що за певних умов розв'язки апроксимуючої системи збігаються у середньому квадратичному до розв'язків вихідної системи із запізненням. Цей підхід дозволяє ефективно аналізувати та моделювати стохастичні системи із запізненням за допомогою скінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення.

Ключові слова і фрази: стохастичні диференціальні рівняння із запізненням, апроксимація, збіжність у середньому квадратичному, стохастичні диференціальні рівняння без запізнення.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
e-mail: *grpetryna@gmail.com, a.stanzhytskyi@imath.kiev.ua*

Вступ

Диференціальні рівняння із запізненням відіграють надзвичайно важливу роль при моделюванні поведінки реальних процесів із пам'яттю, тобто еволюція яких залежить від минулих станів. Численні приклади таких моделей можна знайти, наприклад, у [3]. Оскільки в ролі початкових даних тут виступають (неперервні чи інтегровні) функції, то фазовий простір таких рівнянь нескінченновимірний, що значно ускладнює дослідження. Одним із можливих варіантів вивчення тут може виступати розвинута в

УДК 517.925
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E05.
Дослідження Андрія Станжицького частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України ЗМ-2024 "Якісний аналіз і керування у нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями", державний реєстраційний номер 0124U002140

роботах І.М. Черевка та його учнів [10, 11, 12] схема апроксимації початкової задачі для системи рівнянь із запізненням задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Із зростанням розмірності таких систем її розв'язки наближаються до розв'язку вихідної початкової задачі для системи із запізненням. Дана схема базується на давній ідеї М.М. Красовського, пов'язаної із розкладом системи з запізненням за формулою Тейлора. Подібний метод застосовано в [4] до задачі оптимального керування системами із нескінченним запізненням.

Щодо інших підходів, то відзначимо роботу [1], де напівгрупа, породжена лінійною частиною рівняння, апроксимується напівгрупою скінченновимірних операторів, що у свою чергу приводить до заміни вихідної функціонально-диференціальної системи її скінченновимірними апроксимаціями. У роботі [5] до лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь застосовано метод асимптотичної еквівалентності, згідно з яким асимптотична поведінка ($t \to \infty$) розв'язків вихідної задачі аналогічна поведінці розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь.

Ще один підхід вивчення асимптотичної поведінки розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь шляхом зведення до поведінки розв'язків систем звичайних рівнянь розвинуто в [9]. Там побудовано глобальний атрактор, що складається із розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь, до якого притягуються всі розв'язки функціонально-диференціальної системи.

Потрібно також згадати тонкий результат А.М. Самойленка [6], де дослідження існування глобальних розв'язків системи із запізненням зведено до побудови системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої є розв'язками вихідної системи рівнянь із запізненням.

Щодо подібних питань для систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, то відзначимо роботи [7], де для дослідження асимптотики застосовано підхід з [9], та [8], де подібні питання вивчаються шляхом методу асимптотичної еквівалентності.

У даній роботі побудовано схему апроксимації у середньому квадратичному системи стохастичних диференціальних рівнянь системою стохастичних рівнянь без запізнення з використанням підходу робіт [10, 11, 12].

1 Постановка задачі, формулювання основного результату

В просторі $\mathbb{R}^d$ розглядається наступна початкова задача для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-h))\, dt + \sigma(t, x(t), x(t-h))\, dW(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

Тут функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за сукупністю змінних, та задовільняють наступні умови:

Існує стала $L > 0$, що виконано:

1) Лінійний ріст:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \le L(1 + |x|^2 + |y|^2) \tag{2}$$

для довільних $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$;

2) умова Ліпшиця:

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|^2 + |\sigma(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)|^2 \leq L(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2). \quad (3)$$

Вважаємо також, що задано повний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, потік σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, з яким узгоджено процес Вінера $W(t)$. Не втрачаючи загальності, але спрощуючи викладку, будемо вважати, що він одновимірний. Стала $h > 0$ характеризує інтервал запізнення $[-h, 0]$, на якому задана початкова, неперервна детермінована функція $\varphi(t)$. Через $C = ([-h, 0]); \mathbb{R}^2)$- позначимо клас неперервних d-вимірних векторфункцій $\varphi(t) : [-h, 0] \to \mathbb{R}^d$ із супремумною нормною

$$|||\varphi||| = \sup_{t\in[-h,0]} |\varphi(t)|.$$

Тут $|\cdot|$- звичайна евклідова норма вектора в просторі $\mathbb{R}^d$. Розв'язок рівняння (1) будемо розуміти в стандартному сенсі [2]

Означення 1. *Скажемо, що $\mathcal{F}_t$-вимірний випадковий процес із неперервними траєкторіями є сильним розв'язком початкової задачі на $[0, T]$ якщо*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

та

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s - h))\, ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), x(s - h))\, dW(s)$$

при $t \in [0, T]$ з ймовірністю 1.

Добре відомо, що умови (2) та (3) забезпечують існування та єдиність сильного розв'язку задачі (1) на $[0, T]$, при цьому $\mathbb{E}|x(t)|^2$- обмежений.

За системою (1) побудуємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення, яку назвемо апроксимуючою. А саме, зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $\frac{h}{m}j$, $j = \overline{0, m}$ на m частин. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$, як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0 = f(t, z_0(t), z_m(t))\, dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t))\, dW(t), & \\ dz_j(t) = \frac{m}{h}\left(z_{j-1}(t) - z_j(t)\right), & t \in [0, T], \\ z_j(0) = \varphi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (4)$$

Означення 2. *Система* (4) *називається апроксимуючою для системи* (1) *у середньому квадратичному, якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|x(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)|^2 \to 0,\ m \to \infty,\ j = \overline{0, m}$$

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *За виконання умов* (2) *та* (3) *система* (4) *є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі* (1) *рівномірно по* $j = \overline{0,m}$, *тобто*

$$\sup_{j=\overline{0,m}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|x(t-\frac{h}{m}j) - z_j(t)|^2 \to 0,\ m \to 0. \tag{5}$$

Для подальших міркувань важливою є лема, яка у середньому квадратичному оцінює модуль неперервності розв'язку початкової задачі на $[-h,T]$.

Лема 1 (Про модуль неперервності)**.** *За виконання умов* (2) *та* (3) *для розв'язку початкової задачі справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1\in[-h,T]} \mathbb{E} \sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]} |x(t_2)-x(t_1)|^2 \le C(T,||\varphi||,l) \to 0,\ l\to 0$$

Доведення. Оскільки розв'язок початкової задачі $x(t)$ існує на $[0,T]$ і має там обмежений другий момент, то в силу умови лінійного росту, матимемо

$$\begin{aligned}|x(t)|^2 \le 3|\varphi(0)|^2 &+ 3\int_0^t |f(s,x(s),x(s-h))|^2\,ds\\ &+ 3\int_0^t |\sigma(s,x(s),x(s-h))|^2\,dW(s).\end{aligned}$$

Звідси, в силу нерівності Коші-Буняковського, матимемо

$$\begin{aligned}|x(t)|^2 &\le 3|\varphi(0)|^2 + 3T\int_0^t L(1+|x(s)|^2+|x(s-h)|^2)\,ds\\ &\quad + 3\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^t |\sigma(\tau,x(\tau),x(\tau-h))|\,dW(\tau)\right)^2\\ &\le 3|\varphi(0)|^2 + 3T\int_0^t L\left(1+\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2+\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau-h)|^2\right)\,ds\\ &\quad + 3\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^s |\sigma(\tau,x(\tau),x(\tau-h))|\,dW(\tau)\right)^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s\in[0,t]}|x(s-h)|^2 \le ||\varphi||^2 + \sup_{s\in[0,t]}|x(s)|^2 \tag{7}$$

Враховуючи (7) та максимальну мартингальну нерівність для стохастичного інтеграла, із (6) отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|^2 \le 3|\varphi(0)|^2 + 3T^2L||\varphi||^2 + 3T^2L \\ + 6T\int_0^t L\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\,d\tau \\ + 12\int_0^t L\left(1+||\varphi||^2+2\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\right)d\tau \\ \le C_1(T,||\varphi||)+C_2(T,||\varphi||)\int_0^t L\mathbb{E}\sup_{\tau\in[0,s]}|x(\tau)|^2\,d\tau.\end{aligned}$$

Звідси в силу нерівності Гронуолла, матимемо оцінку

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|x(s)|^2 \le C_1e^{C_2T}=C_3(T,||\varphi||).$$

Якщо $t\ge t_0$ то отримуємо

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,x(t),x(t-h))\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sigma(t,x(t),x(t-h))\,dW(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2 \le 2\Bigg(l\int_{t_1}^{t_1+l}L\left(1+\mathbb{E}|x(t)|^2+\mathbb{E}|x(t-h)|^2\right)dt \\ +\mathbb{E}\sup_{t\in[t_1,t_1+l]}\left|\int_{t_1}^{t}\sigma(s,x(s),x(s-h))\,dW(s)\right|^2\Bigg).\end{aligned}$$

Далі в силу останньої нерівності матимемо:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2 \le 2\left(l^2LC_3(T,\|\varphi\|)+\int_{t_1}^{t_1+l}L\cdot 2C_3(T,\|\varphi\|)\,dt\right) \\ = C(T,\|\varphi\|,l)\to 0,\quad l\to 0.\end{aligned}$$

Якщо t_1 та $t_1+l\in[-h,0]$ то тоді, в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E}\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|x(t_2)-x(t_1)|^2=\sup_{t_2\in[t_1,t_1+l]}|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|^2\to 0,\quad l\to 0,$$

В силу рівномірності неперервності на $[-h,0]$ функції φ. Якщо ж $t\in[-h,0]$,а $t_2>0$,то

$$|x(t_2)-x(t_1)|\le|x(t_2)-\varphi(0)|+|\varphi(t_1)-\varphi(0)|.$$

Очевидно, що $t_1\to 0$ і $t_2\to 0$, якщо $l\to 0$. Тоді, за доведеним вище

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t_1+l]}|x(t_2)-\varphi(0)|^2\to 0,\quad l\to 0$$

Останнє і доводить Лему. □

2 Доведення основного результату

Оскільки випадковий процес $x(t)$ має недиференційовні траєкторії (а лише неперервні з ймовірністю 1) то введемо наступний згладжений випадковий процес $x_\mu(t)$, побудований для кожного малого $\mu > 0$ наступним чином:

$$x_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{t+\mu} x(s)ds, \quad t \in [-h, T].$$

При цьому для $t \geq T$ процес $x(s)$ продовжимо як сталу випадкову величину за неперервністю. Очевидно, що процес $x_\mu(t)$ має гладкі траєкторії і

$$\dot{x}_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\left[x(t+\mu) - x(t)\right].$$

Оцінимо різницю в середньому квадратичному між $x(t)$ і $x_\mu(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x_\mu(t)|^2 = \sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x(\theta)|^2. \tag{8}$$

При отриманні (8) використана теорема про середнє значення інтегралу, тут $\theta = \theta(\omega)$ випадкова величина і $\theta \in [t, t+\mu]$. Тому

$$\sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E}|x(t) - x(\theta)|^2 \leq \sup_{t\in[-h,T]} \mathbb{E} \sup_{s\in[t,t+\mu]} |x(t) - x(s)|^2 \leq C(T, ||\varphi||, \mu) \to 0, \quad \mu \to 0, \tag{9}$$

В силу леми про модуль неперервності. Отже

$$\sup_{t\in[-h,0]} \mathbb{E}|x(t) - x_\mu(t)| \leq C(T, ||\varphi||, \mu) \to 0, \quad \mu \to 0$$

Для структурності читання далі опишему схему доведення. Позначимо $y_j(t) = x(t - \frac{hj}{m})$ та введемо різниці $N_j(t) = \mathbb{E}|y_j(t) - z_j(t)|^2$, $j = \overline{0, m}$, де $z_j(t)$ розв'язки системи (4). Зазначимо, що в силу класичних теорем існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем стохастичних рівнянь, за виконання умов (2), (3) система (4) для кожного натурального m має єдиний сильний розв'язок, визначений на $[0, T]$. Розглянемо систему (4), починаючи з другого рівняння.Далі доведення розбивається на кілька кроків.

Крок 1. Використовуючи лінійність системи (4) (починаючи з другого рівняння) розіб'ємо її на дві системи і представимо $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$ де відповідно $z_j^{(1)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{z}_1^{(1)} = x(t) - z_1^{(1)} \\ \dfrac{h}{m}\dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\dfrac{hj}{m}). \end{cases} \tag{10}$$

а $z_j^{(2)}$ розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x) \\ \dfrac{h}{m}\dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j = \overline{1,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left| x\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t)\right|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y_j(t) - z_j(t)\right|^2 \\ \leq 2\left(\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right|^2 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|z_j^{(2)}(t)\right|^2\right). \tag{12}$$

<u>**Крок 2**</u>. На цьому кроці проводимо оцінку першого доданку в (12). Для цього $x(t)$ подаємо у вигляді $x(t) = x_\mu(t) + (x(t) - x_\mu(t)) = x_\mu(t) - x_1(t)$, а $y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t)$. Тут $y_j^{(1)}(t) = x_\mu(t - \frac{hj}{m})$, а $y_j^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{hj}{m})$. Тоді система (10) розпадається на дві системи $z_j^{(1)}(t) = u_j(t) + v_j(t)$ де відповідне $u_j(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{u}_1 = -u_1 + x_\mu \\ \dfrac{h}{m}\dot{u}_j = u_{j-1} - u_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ u_j(0) = y_j^{(1)}(0) = x_\mu(-\dfrac{hj}{m}), \end{cases} \tag{13}$$

а $v_j(t)$ є розв'язком задачі Коші для системи

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{v}_1 = -v_1 + x_1 \\ \dfrac{h}{m}\dot{v}_j = v_{j-1} - v_j, \quad j = \overline{2,m}, \\ v_j(0) = y_j^{(2)}(0) = x_1(-\dfrac{hj}{m}) - x_\mu(-\dfrac{hj}{m}). \end{cases} \tag{14}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\ \left|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\right|^2} \leq \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) - (u_j(t) + v_j(t))\right|^2} \\ \leq 3\left(\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(1)}(t) - u_j(t)\right|^2}\right. \\ \left. + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2}\right). \tag{15}$$

Оцінюючи кожнен доданок в (15) окремо, прийдемо до оцінки першого доданку в (12).

<u>**Крок 3**</u>. Використовуючи систему (11), оцінюємо другий доданок в (12).

Крок 4. Використовуючи оцінки кожного із доданків в (12), отримані на попередніх кроках, з нерівності (12) приходимо до оцінки (5), що і доведе теорему.

Подальше доведення теореми відбувається у послідовній реалізації кожного із кроків.

Реалізація. Оцінимо перший доданок в (15). Приведемо оцінки при $j = 1$. Позначимо $\varepsilon_1(t) = u_1(t) - y_1^{(1)}(t)$, при цьому $\varepsilon_1(0) = 0$.Тоді

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{u}_1 - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= \frac{m}{h}(x_\mu - u_1) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= \frac{m}{h}(-u_1 + y_1^{(1)}) + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t).
\end{aligned}$$

Таким чином, для $\varepsilon_1(t)$ отримується система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\dfrac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t) \\ \varepsilon_1(0) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Для оцінки $\psi(t)$ маємо

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \frac{m}{h}\left(x_\mu(t) - y_1^{(1)}(t)\right) - \dot{y}_1^{(1)}(t) \\
&= \frac{m}{h}\left(x_\mu(t) - x_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right)\right) - \dot{x}_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right) \\
&= \dot{x}_\mu(\theta) - \dot{x}_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right),
\end{aligned}$$

тут $\theta(\omega) \in [t - \frac{h}{m}, t]$. Із визначення процесу $x_\mu(t)$ отримуємо

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu}[x(\theta + \mu) - x(\theta)] - \frac{1}{\mu}[x(t - \frac{h}{m} + \mu) - x(t - \frac{h}{m})].$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\psi(t)|^2}\le\frac{1}{\mu}\left[\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x(\theta+\mu)-x\left(t-\frac{h}{m}+\mu\right)\right|^2}\right.$$
$$\left.+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x(\theta)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|^2}\right]$$
$$\le\frac{1}{\mu}\left[\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{s\in\left[t-\frac{h}{m}+\mu,t+\mu\right]}\left|x(s)-x\left(t-\frac{h}{m}+\mu\right)\right|^2}\right.$$
$$\left.+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{s\in\left[t-\frac{h}{m}+\mu,t+\mu\right]}\left|x(s)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|^2}\right]$$
$$\le\sqrt{\frac{4}{\mu^2}C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right)}\to 0,\quad m\to\infty.$$

Остання оцінка отрималась із використанням леми про модуль неперервності. З (16), та формули варіації довільної сталої маємо

$$\varepsilon_1(t)=\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\psi(s)ds.$$

Отже, з використанням нерівності Коші-Буняковського, звідси отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\psi(s)\,ds\right|^2\le\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\,ds\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\mathbb{E}|\psi(s)|^2\,ds\right)$$
$$\le\frac{h}{m}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\,ds\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|\psi(t)|^2 \tag{17}$$
$$\le\left(\frac{h}{m}\right)^2\frac{4}{\mu^2}C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right).$$

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_1(t)|^2}\le\frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right)} \tag{18}$$

Далі оцінимо $y_1^{(2)}(t)=x_1(t-\frac{h}{m})=x_\mu(t-\frac{h}{m})-x(t-\frac{h}{m})$.З (9) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_1^{(2)}(t)|^2}=\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|x_\mu\left(t-\frac{h}{m}\right)-x\left(t-\frac{h}{m}\right)\right|}\le\sqrt{C(T,||\varphi||,\mu)}.$$

Оцінимо тепер $v_1(t)$ у системі (14). З формули варіації для лінійного рівняння маємо

$$v_1(t)=e^{-\frac{m}{h}t}v_1(0)+\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)ds$$

Отже

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2} \le \sqrt{\mathbb{E}|v_1(0)|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)\,ds\right|^2\left(\frac{m}{h}\right)^2}. \tag{19}$$

Але $v_1(0) = x_1(-\frac{h}{m})$. Тоді з (9) отримуємо

$$\mathbb{E}|v_1(0)|^2 \le C(T, ||\varphi||, \mu), \tag{20}$$

а тому

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}x_1(s)\,ds\right|^2\left(\frac{m}{h}\right)^2} \le \left(\frac{h}{m}\right)^2 C(T, ||\varphi||, \mu)\left(\frac{m}{h}\right)^2. \tag{21}$$

Оцінка інтеграла в (21) проводиться аналогічною оцінці (17) з використанням нерівності Коші–Буняковського. Отже, з (19)-(21) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2} \le 2\left(\sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)} + \sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)}\right) = 2\sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)}. \tag{22}$$

Значить з (15), (18) і (22) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_1(t) - z_1^{(1)}(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} + 2\sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)}.$$

Приведемо тепер оцінку для $j = 2$.Аналогічно випадку $j = 1$ потрібно оцінити

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2(t) - z_2^{(1)}(t)\right|^2} \le& \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2^{(1)}(t) - u_2(t)\right|^2}\\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_2^{(2)}(t)\right|^2}\\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|v_2(t)\right|^2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Позначимо $\varepsilon_2(t) = u_2(t) - y_2^{(1)}(t)$. Друга система в (10) знову в силу лінійності розпадеться на дві системи. А саме, представимо $u_2(t) = u_2^{(1)}(t) + u_2^{(2)}(t)$.Тоді маємо

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_2^{(1)} = -u_2^{(1)} + y_1^{(1)}\\ \qquad u_2^{(1)}(0) = y_2^{(1)}(0).\end{cases}$$

та

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_2^{(2)} = -u_2^{(2)} + \varepsilon_1\\ \qquad u_2^{(2)}(0) = 0.\end{cases} \tag{24}$$

Тепер

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2} \le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(1)}(t) - y_2^{(1)}(t)|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2}. \tag{25}$$

Позначимо $\varepsilon_2^{(2)} = u_2^{(1)} - y_2^{(1)}$, очевидно, що $\varepsilon_2(0) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2^{(2)} &= \dot{u}_2^{(1)} - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}\left(-u_2^{(1)} + y_1^{(1)}\right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \frac{m}{h}\left(y_1^{(1)} - y_2^{(1)}\right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t).\end{aligned}$$

Таким чином отримуємо наступну систему

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_2^{(2)} = -\dfrac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t) \\ \quad \varepsilon_2^{(2)}(0) = 0.\end{cases}$$

Аналогічно поередньому, звідси маємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m} \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2} \tag{26}$$

Також аналогічно оцінці виразу $\psi(t)$, для процесу $\psi_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2} \le \frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{27}$$

Тоді з (26) та (27) маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{28}$$

Оцінимо тепер $u_2^{(2)}(t)$. З системи (24) отримуємо

$$u_2^{(2)} = \frac{m}{h}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}\varepsilon_1(s)ds$$

Із останнього представлення тепер приходимо до оцінки

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{m}{h} \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_1(t)|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})}, \tag{29}$$

при цьому врахована нерівність (18).

З (25), (28) та (29) отримується нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2(t) - y_2^{(1)}(t)|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2} \le \frac{h}{m}\sqrt{C(T, ||\varphi||, \frac{h}{m})} \tag{30}$$

Оцінимо тепер $y_2(t)$. Маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2^{(2)}(t)|^2} = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|x_1(t - \frac{h2}{m})|^2} \le \sqrt{C(T, ||\varphi||, \mu)} \tag{31}$$

як випливає із (9).

Залишилося оцінити останній доданок в (23). Для цього проведемо у системі (14) оцінки відразу для всіх $j = \overline{1, m}$. Розглянемо цб систему покоординатно. Отримаємо

$$\begin{cases} \dot{v}_{j,i} = -\frac{m}{h} v_{j,i} + \frac{m}{h} v_{j-1,i} \\ \quad v_{j,i}(0) = x_{1,i}(-\frac{hj}{m}), \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, d} \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\mathbb{E} v_{j,i}^2(0) \leq C(T, ||\varphi||, \mu).$$

Далі також маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{j,i}^2 &= 2 v_{j,i} \dot{v}_{j,i} \\ &= 2 v_{j,i} \left(-\frac{m}{h} v_{j,i} + \frac{m}{h} v_{j-1,i} \right) \\ &= -2 \frac{m}{h} v_{j,i}^2 + \frac{m}{h} 2 v_{j,i} v_{j-1,i} \\ &\leq -2 \frac{m}{h} v_{j,i}^2 + \frac{m}{h} v_{j,i}^2 + \frac{m}{h} v_{j-1,i}^2. \end{aligned}$$

Отже

$$\frac{d}{dy} v_{j,i}^2 \leq -\frac{m}{h} v_{j,i}^2 + \frac{m}{h} v_{j-1,i}^2, \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, d} \tag{32}$$

У нерівностях (32) проведемо заміни.

$$v_{j,i}^2(t) = e^{-\frac{m}{h} t} a_{j,i}(t), \quad a_{j,i}(t) = e^{\frac{m}{h} t} v_{j,i}^2(t) \tag{33}$$

При цьому $v_{j,i}^2(0) = a_{j,i}(0)$, а тому

$$\mathbb{E} a_{j,i}(0) \leq C(T, ||\varphi||, \mu).$$

Тоді із (32) врахувавши заміну (33) матимемо

$$\frac{d}{dt} a_{j,i} \leq \frac{m}{h} a_{j-1,i}, \quad j = \overline{2, m} \tag{34}$$

Але

$$\mathbb{E} a_{1,i}(t) = e^{\frac{m}{h} t} \mathbb{E} v_{1,i}^2(t) \leq 4 C(T, ||\varphi||, \mu) e^{\frac{m}{h} t}$$

в силу (22). Тоді із (34) отримуємо

$$a_{2,i}(t) \leq a_{2,i}(0) + \frac{m}{h} \int_0^t a_{1,i}(s) ds$$

Отже

$$\begin{aligned} \mathbb{E} a_{2,i}(t) &\leq \mathbb{E} a_{2,i}(0) + \frac{m}{h} \int_0^t \mathbb{E} a_{1,i}(s) \, ds \\ &\leq C(T, ||\varphi||, \mu) + 4 \frac{m}{h} C(T, ||\varphi||, \mu) \int_0^t e^{\frac{m}{h} s} \, ds \\ &= C(T, ||\varphi||, \mu) + 4 C(T, ||\varphi||, \mu) \left(e^{\frac{m}{h} t} - 1 \right) \\ &\leq 4 C(T, ||\varphi||, \mu) e^{\frac{m}{h} t}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}a_{3,i}(t) &\le \mathbb{E}a_{3,i}(0) + \frac{m}{h}\int_0^t \mathbb{E}a_{2,i}(s)\,ds\\ &\le C(T,||\varphi||,\mu) + 4\frac{m}{h}C(T,||\varphi||,\mu)\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\,ds\\ &= C(T,||\varphi||,\mu) + 4C(T,||\varphi||,\mu)\left(e^{\frac{m}{h}t}-1\right)\\ &\le 4C(T,||\varphi||,\mu)e^{\frac{m}{h}t}.\end{aligned}$$

Тому для всіх $j=\overline{1,m}$ маємо оцінку

$$\mathbb{E}a_{j,i}(t) \le 4C(T,||\varphi||,\mu)e^{\frac{m}{h}t}$$

Отже із врахуванням заміни (33) отримаємо

$$\mathbb{E}v_{j,i}^2(t) = \mathbb{E}e^{-\frac{m}{h}t}a_{j,i}(t) \le 4C(T,||\varphi||,\mu),$$

а тому

$$\sqrt{\mathbb{E}|v_j(t)|^2} \le \sqrt{d4C(T,||\varphi||,\mu)}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{35}$$

де d- розмірність простору. Тоді з (23), (30) та (31) отримуємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|y_2(t)-z_2^{(1)}(t)|^2} \le \frac{4}{\mu}\frac{h}{m}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} + 3\sqrt{dC(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}$$

Тепер неважко побачити, що для кожного $j=\overline{2,m}$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2} &\le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|u_j(t)-y_j^{(1)}(t)\right|^2}\\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2}\\ &+ \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2}.\end{aligned}$$

де $z_j^{(1)} = u_j + v_j$, $y_j = y_j(1) + y_j(2)$. Із введенням, аналогічно вище викладеного позначення $\varepsilon_j(t) = u_j(t) - y_j^2(t)$, остання нерівність набуває вигляду

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|v_j(t)\right|^2} \tag{36}$$

Аналогічно випадку $j=2$, представимо $u_j(t) = u_j^{(1)}(t) + u_j^{(2)}(t)$, де $u_j^{(1)}$ та $u_j^{(2)}$ розв'язки наступних задач Коші відповідно

$$\begin{cases}\dfrac{h}{m}\dot{u}_j^{(1)} = -u_j^{(1)} + y_{j-1}^{(1)}\\ \qquad u_j^{(1)}(0) = y_j^{(1)}(0).\end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{h}{m}\dot{u}_j^{(2)} = -u_j^{(2)} + \varepsilon_{j-1} \\ u_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Позначимо $e_j^{\zeta} = u_j^{(1)} - y_j^{(1)}, e_j^{\zeta}(0) = 0$. Тоді аналогічно випадку $j = 2$, для e_j^{ζ} отримаємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j^{(\zeta)}(t)\right|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}$$

Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j^{(\zeta)}(t)\right|^2} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|u_j^{(2)}(t)\right|^2}$$

Аналогічно випадку $j = 2$, для $u_j^{(2)}$ отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|u_j^{(2)}(t)\right|^2} \le \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_{j-1}(t)\right|^2}$$

Отже

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} + \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_{j-1}(t)\right|^2}$$

Остання нерівність із введенням позначеня $b_j = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_j(t)|^2}$ набирає вигляду

$$b_j \le \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} + b_{j-1}$$

Звідси, індукцією по j легко отримати, що

$$b_j \le b_1 + j\frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})},$$

а отже для всіх $j = \overline{2,m}$ маємо оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|\varepsilon_j(t)\right|^2} \le \frac{2h}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} + \frac{h}{m}\frac{2}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} \tag{37}$$

в силу (18). Величини $y_j^{(2)}(t)$ оцінюється аналогічно випадку $j = 2$, використанням універсальної оцінки (9), а саме

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|y_j^{(2)}(t)\right|^2} \le \sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} \tag{38}$$

Аналогічно для $v_j(t)$ також маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\mathbb{E}\left|v_j^{(2)}(t)\right|^2} \le 2\sqrt{dC(T,||\varphi||,\frac{h}{m})} \tag{39}$$

Отже з (35), (37)-(39) отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2}\le\frac{2h}{\mu}\sqrt{C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})}+3\sqrt{dC(T,||\varphi||,\mu)} \tag{40}$$

Візьмемо в останній нерівності $\mu=C^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m})$. Очевидно, що $\mu\to 0$, якщо $m\to\infty$. Тоді

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left|y_j(t)-z_j^{(1)}(t)\right|^2}\le 2hC^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m})+3\sqrt{dC(T,||\varphi||,C^{\frac{1}{4}}(T,||\varphi||,\frac{h}{m}))}$$
$$=\alpha(T,||\varphi||,\frac{h}{m})\to 0,\quad m\to\infty.$$

Проведемо оцінки для системи (11). Ми мали $N_0(t)=\mathbb{E}|z_0(t)-x(t)|^2$. Для першого рівняння в (11) отримуємо.

$$z_1^{(2)}(t)=\frac{m}{h}\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)}(z_0(s)-x(s))ds,$$

а тому

$$\mathbb{E}z_1^{(2)}(t)\le\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|z_0(t)-x(t)|^2=\mathbb{E}N_0(t)$$

Для інших рівнянь в (11) проведемо міркування аналогічні до оцінок $v_j(t)$, а саме розпишемо їх покоординатно. Маємо

$$\begin{cases}\dot z_{j,i}^{(2)}=-\frac{m}{h}z_{j,i}^{(2)}+\frac{m}{h}z_{j-1,i}^{(2)}\\ z_{j,i}^{(2)}(0)=0,\quad j=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,d}\end{cases}$$

Тоді для $(z_{j,i}^{(2)})^2$ отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt}(z_{j,i}^{(2)})^2\le-\frac{m}{h}(z_{j,i}^{(2)})^2+\frac{m}{h}(z_{j-1,i}^{(2)})^2 \tag{41}$$

З якої за допомогою заміни $(z_{j,i}^{(2)})^2=e^{-\frac{m}{h}-t}b_{j,i},\quad b_{j,i}(0)=0$, прийдемо до нерівності

$$\frac{d}{dt}b_{j,i}(t)\le\frac{m}{h}b_{j-1,i}(t),$$

інтегруючи яку на $[0,t]$, з урахуванням початкової умови $b_{j,i}(0)=0$, матимемо

$$b_{j,i}(t)\le\frac{m}{h}\int_0^t b_{j-1,i}(s)ds,$$

при цьому

$$b_{1,i}(t)=e^{\frac{m}{h}t}(z_{j,i}^{(2)})^2=e^{\frac{m}{h}t}N_0(t).$$

Отже

$$\mathbb{E}b_{2,i}(t)\le\frac{m}{h}\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\mathbb{E}N_0(s)ds\le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

Далі

$$\mathbb{E}b_{3,i}(t) \le \frac{m}{h}\int_0^t \mathbb{E}b_{2,i}(s)ds \le \frac{m}{h}\int_0^t e^{\frac{m}{h}s}\mathbb{E}N_0(s)ds \le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

Продовжуючи дану процедуру, у загальному випадку матимемо

$$\mathbb{E}b_{j,i}(t) \le e^{\frac{m}{h}t}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

А отже із урахуванням заміни (41), отримаємо

$$\mathbb{E}(z_{j,i}^{(2)})^2 \le \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t).$$

А отже

$$\mathbb{E}(z_j^{(2)})^2 \le \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}N_0(t). \tag{42}$$

Тому, в результаті для $j=\overline{1,m}$ отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|x(t-\frac{hj}{m})-z_j(t)|^2} \le \sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|x(t-\frac{hj}{m})-z_j^{(1)}(t)|^2}+\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}|z_j^{(2)}(t)|^2}$$

що із урахуванням позначення $N_j(t)$, оцінок (40) та (42) приводять до нерівності

$$\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{N_j(t)} \le \alpha(T,||\varphi||,\frac{h}{m})+\sqrt{\sup_{t\in[0,T]}N_0(t)}. \tag{43}$$

Тоді для оцінки $z_0(t)-x(t)$ маємо

$$\begin{aligned} z_0(t)-x(t) &= \int_0^t \left(f(s,z_0(s),z_m(s))-f(s,x(s),x(s-h))\right)ds \\ &\quad+\int_0^t \left(\sigma(s,z_0(s),z_m(s))-\sigma(s,x(s),x(s-h))\right)dW(s). \end{aligned}$$

звідки, з урахуванням умови (3) теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} N_0(t) &\le 2(T+1)\int_0^t L\left(\mathbb{E}|z_0(s)-x(s)|^2+\mathbb{E}|z_m(s)-x(s-h)|^2\right)ds \\ &\le 2(T+1)\int_0^t 4L\sup_{s\in[0,s]}N_0(s)\,ds+2\alpha^2 C\left(T,||\varphi||,\frac{h}{m}\right). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням леми Гроноулла матимемо

$$\sup_{t\in[0,T]}N_0(t) \le 2\alpha^2 C(T,||\varphi||,\frac{h}{m})e^{8(T+1)LT}\to 0, \quad m\to 0.$$

Остання оцінка, з урахуванням (43) і доводить теорему.

Список літератури

[1] Banks H.T. *Approximation of delay systems with applications to control and identification.* Journal of Optimization Theory and Applications 1979, **29** (-), 383–408. https://doi.org/10.1007/BFb0064311

[2] Carkov Ye.F. Random Perturbations of Functional Differential Equations. Zinatne, Riga, 1989. p.61

[3] Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York, 1977.

[4] Tobias K. S. Ritschel *Numerical optimal control for distributed delay differential equations: A simultaneous approach based on linearization of the delayed variables.* arXiv:2410.15083 2024

[5] Pituk M. *The Hartman–Wintner Theorem for Functional Differential Equations.* Journal of Differential Equations 1999, **155** (1), 1–16. https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3573

[6] Samoilenko A.M. *On the problem of studying global solutions of linear differential equations with deviating argument.* Ukrainian Mathematical Journal 2003, **55** (5), 631–640. https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010255.55263.c1

[7] Stanzhytskyi O.M., Petryna G.O., Denysenko N.L. *Asymptotic Behavior of the Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations.* Journal of Mathematical Sciences 2024, **278** (6), 1102–1112. 10.1007/s10958-024-06980-x

[8] Stanzhytskyi O.M., Petryna G.O., Hrysenko M.V. *On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations.* Journal of Optimization Differential Equations and their Applications 2023, **31** (1), 125–142. 10.15421/142307

[9] Valeev K.G., Kulesko N.A. *Family of solutions with a finite number of parameters of a system of differential equations with deviating argument.* Ukrainian Mathematical Journal 1968, **20** (6), 739–749. https://doi.org/10.1007/BF01085232

[10] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On the approximation of delayed systems and their stability.* Nonlinear Oscillations 2004, **7** (2), 208–216. (in Ukrainian)

[11] Matviy O.V., Cherevko I.M. *On approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations.* Nonlinear Oscillations 2007, **10** (3), 328–335. (in Ukrainian)

[12] Ilika S.A., Matviy O.V., Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Scheme of approximation of differential-functional equations and their application.* Bukovinian Mathematical Journal 2014, **2** (2-3), 107–111. (in Ukrainian)

Надійшло 21.09.2024

Petryna G.O., Stanzhytskyi A.O. *Approximation of Stochastic Delay Differential Systems by a Stochastic System Without Delay*, Bukovinian Math. Journal. **12** (1) (2024), 120–136.

In this paper, we propose a scheme for approximating the solutions of stochastic differential equations with delay by solutions of stochastic differential equations without delay. Stochastic delay differential equations play a crucial role in modeling real-world processes where the evolution depends on past states, introducing complexities due to their infinite-dimensional phase space. To overcome these difficulties, we develop an approach based on approximating the delay system by an ordinary differential equation system of increased dimension. Our main result is to prove that, under certain conditions, the solutions of the approximating system converge in the mean square sense to the solutions of the original delay system. This approach allows for effective analysis and modeling of stochastic systems with delay using finite-dimensional stochastic differential equations without delay.