Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 43–62 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 43–62

Дронь В.С.[1], Growth Мединський І.П.[1,2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З БЛОЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

Дослідження присвячене ультрапараболічним рівнянням, які виникають в задачах, що описують азійські опціони на фінансових ринках. Клас таких рівнянь за певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова. Раніше для рівнянь з цього класу було побудовано так званий фундаментальний L-розв'язок, досліджено його властивості та коректну розв'язність задачі Коші.

У цій праці сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти таких рівнянь, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах, а також інтегральні зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші.

Отримані результати можна використати у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також при вивченні марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь, що розглядалися.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, коректна розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення класичних розв'язків, інтеграли Пуассона, азійські опціони, спеціальні умови Гельдера.

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
[2] Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
e-mail: *vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua*

Вступ

Клас рівнянь, який вивчається у цій праці, є узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [1]. Це рівняння та його різноманітні узагальнення вивчалися багатьма авторами. Лінійні й нелінійні ультрапараболічні рівняння виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів,

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки.

На фінансових ринках облігації та акції, зазвичай, називаються первинними фінансовими активами. На ринку вторинних цінних паперів (деривативів) платіжні зобов'язання – це інструменти з певним фіксованим часом виконання, за якими виплачується певна винагорода [2, с. 356]. Європейське платіжне зобов'язання (європейський опціон) залежить лише від основних цін в момент часу виконання (кінцевий момент часу).

На відміну від європейського опціону, виплата за азійським деривативом залежить від усієї траєкторії значення ціни, а не лише від кінцевого значення. Одним із методів дослідження варіантів азійських опціонів є включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, до простору станів. Це вперше було зроблено в працях [3, 4]. Розширення простору станів за рахунок включення змінних, що залежать від траєкторії ціни, приводить до вироджених рівнянь з частинними похідними, які не є рівномірно параболічними.

У загальному випадку математичні моделі опціонів зводяться до фінансової моделі марковського типу, динаміка в якій визначається стохастичним диференціальним рівнянням в N-вимірному просторі станів

$$dX_t = (BX_t + b(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{1}$$

де W_t – d-вимірний стандартний вінерівський процес, $d \le N$, $\sigma = \sigma(t, x)$ – матриця розміру $N \times d$, $B = (b_{ij})$ – стала матриця розміру $N \times N$, вектор $b = (b_1, ..., b_N)$ – такий, що $b_{d+1} = ... = b_N = 0$.

За певних припущень на матриці σ, B, b в праці [5] доведено існування та єдиність слабкого розв'язку рівняння (1), а в [6] доведено, що густина ймовірностей переходу цього розв'язку є фундаментальним розв'язком задачі Коші (далі – ФРЗК) для рівняння

$$L_1 u := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(t,x) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}x_j\partial_{x_i}u(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\partial_{x_i}u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0, \tag{2}$$

де елементи матриці $(a_{ij}(t,x))_{i,j=1}^{d}$ визначаються через елементи матриці $\sigma(t,x)$. Зауважимо, що при цьому на елементи матриці σ та вектора b, зокрема, ставилися умови обмеженості і неперервності за Гельдером, а накладені на матрицю B умови еквівалентні тому, що для оператора L_1 з фіксованими в кожній точці (t,x) коефіцієнтами виконується умова гіпоеліптичності Л. Хермандера.

У даній праці вивчається коректна розв'язність задачі Коші для рівнянь, подібних до (2), з певною вимогою щодо вигляду матриці B. Сформульовано умови на коефіцієнти рівняння, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші, а також інтегральне зображення класичного розв'язку у вигляді інтеграла Пуссона від функції або узагальненої міри, якими задається початкова умова.

1 Формулювання задачі, припущення й означення

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$(S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

де n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1+n_2+n_3$; $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x)|\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$\begin{aligned} S_B &:= \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} b^1_{ij}x_{1i}\right)\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_2} b^2_{ij}x_{2i}\right)\partial_{x_{3j}}, \\ A(t,x,\partial_{x_1}) &:= \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} + \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t,x)\partial_{x_{1i}} + a_0(t,x). \end{aligned} \tag{4}$$

Перший диференціальний вираз з (4) у матричній формі має вигляд

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x),$$

де B – матриця розміру $n \times n$, яка має структуру

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \tag{5}$$

B^1 , B^2 – матриці, складені відповідно з дійсних чисел b^1_{ij}, $i \in \{1,...,n_1\}$, $j \in \{1,...,n_2\}$, b^2_{ij}, $i \in \{1,...,n_2\}$, $j \in \{1,...,n_3\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}},...,\partial_{x_{1n_1}},\partial_{x_{21}},...,\partial_{x_{2n_2}},\partial_{x_{31}},...,\partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо такі умови:

$\mathbf{A}_1$. Для матриці (5), в якій блоки B^1 і B^2, записані відповідно у вигляді $\binom{B^1_1}{B^1_2}$ і $\binom{B^2_1}{B^2_2}$, де B^1_1, B^1_2, B^2_1 і B^2_2 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1-n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2-n_3) \times n_3$ справджуються умови: $\det B^i_1 \ne 0$, $i \in \{1,2\}$;

$\mathbf{A}_2$. Існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ виконується оцінка

$$\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t,x)\sigma_{1i}\sigma_{1j} \ge \delta\sum_{i=1}^{n_1}\sigma^2_{1i}.$$

Клас рівнянь (3) при виконанні умов $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{A}_2$ часто (див., наприклад, [7]) позначається символом $\mathbf{E}^B_{22}$. Він узагальнює клас ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова $\mathbf{E}_{22}$, запроваджений у монографії [8]. Рівняння типу (3) з'являються в моделях дифузії з інерцією, а також при дослідженні математичних моделей азійських опціонів, коли змінні, що залежать від траєкторії ціни, включають до простору станів.

Позначимо: $M := \sum\limits_{i=1}^{3}(i-1/2)n_i$, $M_k := \sum\limits_{i=1}^{3}(2(i-1)+1)|k_i|/2$ при $k \in \mathbb{Z}^n_+$, $k := (k_1,k_2,k_3)$, $k_i := (k_{i1},...,k_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$;
$x_t := (t^{-1/2}x_1, t^{-3/2}x_2, t^{-5/2}x_3)$, $x := (x_1,x_2,x_3)$, $x_i := (x_{i1},...,x_{in_i})$, $i \in \{1,2,3\}$;

$E_c(t,x;\tau,\xi):=\exp\Big\{-c\sum\limits_{i=1}^{3}(t-\tau)^{1-2i}|X_i(t-\tau)-\xi_i|^2\Big\}$, $t>\tau$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$,
де $X(h):=(X_1(h),X_2(h),X_3(h))$, $X_i(h):=(X_{i1}(h),...,X_{in_i}(h))$, $i\in\{1,2,3\}$,
$X_{1j}(h):=x_{1j}$, $j\in\{1,...,n_1\}$, $X_{2j}(h):=x_{2j}+h\sum\limits_{i=1}^{n_1}b^1_{ij}x_{1i}$, $j\in\{1,...,n_2\}$,
$X_{3j}(h):=x_{3j}+h\sum\limits_{i=1}^{n_2}b^2_{ij}x_{2i}+\frac{h^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\sum\limits_{s=1}^{n_2}b^2_{sj}b^1_{is}x_{1i}$, $j\in\{1,...,n_3\}$, $h\in\mathbb{R}$, $c>0$ – деяка стала;
$d(x,\xi):=\sum\limits_{i=1}^{3}|x_i-\xi_i|^{1/(2(i-1)+1)}$, $\Delta^{\xi}_{x}f(\cdot,x):=f(\cdot,x)-f(\cdot,\xi)$,
$\Delta^{\xi_1}_{x_1}f(\cdot,x):=f(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-f(\cdot,(\xi_1,x_2,x_3))$,
$\Delta^{\xi_2}_{x_2}f(\cdot,x):=f(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-f(\cdot,(x_1,\xi_2,x_3))$,
$\Delta^{\xi_3}_{x_3}f(\cdot,x):=f(\cdot,(x_1,x_2,x_3))-f(\cdot,(x_1,x_2,\xi_3))$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, f – деяка функція.

Ставитимо на коефіцієнти рівняння (3) ще такі умови:

A$_3$. Коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ (тобто функції a_{ij}, a_i, a_0) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0,T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:
$\exists H_1>0,\ \exists\alpha_1\in(0,1]\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_1\in\mathbb{R}^{n_1}:\ \ \big|\Delta^{z_1}_{x_1}a(t,x)\big|\le H_1|x_1-z_1|^{\alpha_1}$;
$\exists H_2>0,\ \exists H_3>0,\ \exists\alpha_2\in(1/3,2/3]\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,2\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\big|\Delta^{z_2}_{x_2}a(t,x)\big|\le H_2(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}),$$

$$\big|\Delta^{z_1}_{x_1}\Delta^{z_2}_{x_2}a(t,x)\big|\le H_3|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2});$$

$\exists H_4>0,\ \exists H_5>0,\ \exists\alpha_3\in(3/5,4/5]\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,3\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\big|\Delta^{z_3}_{x_3}a(t,x)\big|\le H_4(h^{5\alpha_3/2}+|X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}),$$

$$\big|\Delta^{z_1}_{x_1}\Delta^{z_3}_{x_3}a(t,x)\big|\le H_5|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{5\alpha_3/2}+|X_3(h)-z_3|^{\alpha_3}).$$

A$_4$. В $\Pi_{[0,T]}$ існують обмежені похідні $\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}a_{ij}$ і $\partial_{x_{1i}}a_i$, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі **A**$_3$.

У [9] було доведено, що якщо для коефіцієнтів рівняння (3) виконуються умови **A**$_1$–**A**$_3$, то для нього існує класичний ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки

$$|\partial^k_x Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad |k_1|/2+|k_2|+|k_3|\le 1,$$

$$k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^n_+,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{6}$$

$$|S_BZ(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

з деякими сталими $C>0$ і $c>0$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (3) виконуються умови **A**$_1$–**A**$_4$, то для спряженого рівняння вигляду

$$S^*_Bv(\tau,\xi)-A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1})=0,\quad(\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)},$$

де

$$S^*_B:=-\partial_\tau+\sum_{i=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1}b^1_{ji}\xi_{1j}\right)\partial_{\xi_{2i}}+\sum_{i=1}^{n_3}\left(\sum_{j=1}^{n_2}b^2_{ji}\xi_{2j}\right)\partial_{\xi_{3i}},$$

$$A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) := \sum_{i,j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}\partial_{\xi_{1j}}(a_{ij}(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) + \sum_{i=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1i}}(a_i(\tau,\xi)v(\tau,\xi)) - a_0(\tau,\xi)v(\tau,\xi),$$

існує класичний ФРЗК Z^*, який пов'язаний з ФРЗК Z рівністю

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = Z(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

і для Z справджується формула згортки

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \quad 0 \le \tau < \lambda < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо набори функцій $\mathbf{k}(t,\mathbf{a})$ і $\mathbf{s}(t)$, $t \in [0,T]$, які означимо таким способом:

$$\mathbf{k}(t,\mathbf{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)),\ \mathbf{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$k_i(t,a_i) := c_0 a_i (c_0 - a_i t^{2(i-1)+1})^{-1},\ i \in \{1,2,3\};$$

$$s_1(t) := k_1(t,a_1) + 2t^2\|B^1\|^2 k_2(t,a_2) + 2t^4(\|B^1\|\,\|B^2\|)^2 k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2\|B^2\|^2 k_3(t,a_3), \quad s_3(t) := 4k_3(t,a_3),$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (6), $\mathbf{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{i\in\{1,2,3\}} (c_0/a_i)^{1/(2(i-1)+1)}$, $\|B^1\|$ і $\|B^2\|$ – норми матриць B^1 і B^2 відповідно. Запровадимо ще таке позначення:

$$[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),\xi)] := \sum_{i=1}^{3} k_i(t,a_i)|\xi_i|^2,\ t > 0,\ \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ i \in \{1,2,3\}.$$

Зауважимо, що правильними є співвідношення

$$\mathbf{k}(0,\mathbf{a}) = \mathbf{a},\ k_i(t,a_i) \ge a_i,\ k_{ij}(t,a_{ij}) \ge a_{ij}, \quad t \in [0,T],\ j \in \{1,...,n_i\},\ i \in \{1,2,3\};$$

$$k_1(t-\tau, k_1(\tau,a_1)) = k_1(t,a_1),\ k_{1j}(t-\tau, k_{1j}(\tau,a_{1j})) = k_{1j}(t,a_{1j}), \quad j \in \{1,...,n_1\};$$

$$k_i(t-\tau, k_i(\tau,a_i)) \le k_i(t,a_i),\ k_{ij}(t-\tau, k_{ij}(\tau,a_{ij})) \le k_{ij}(t,a_{ij}),\ j \in \{1,...,n_i\},\ i \in \{2,3\}, \tag{8}$$

і справджується нерівність

$$-c_0 \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t) - \xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi] \le [\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)], \quad t \in (0,T],\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна для будь-якого $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \|u(t,x)\exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t,0)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} := \|u(t,x)\exp\{-[\mathbf{s}(t),x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо також простори:

$L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ – простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}), x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ – повна варіація μ;

$L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} := \|\psi(x) \exp\{-[\mathbf{s}(T), x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \infty$ маємо $|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\} \to 0$. Норму в $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ означимо формулою

$$\|\psi\|_\infty^{-\mathbf{s}(T)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\}).$$

Враховуючи означення точок $X_i(t), i \in \{1,2,3\}$, та нерівності (1.3.9), (1.3.10) з [8], маємо такі нерівності:

$$|X_2(t)|^2 = \left|x_2 + t((B^1)' x_1')'\right|^2 \le 2\left(|x_2|^2 + t^2|((B^1)'x_1')'|^2\right) \le 2\left(|x_2|^2 + t^2\|B^1\|^2|x_1|^2\right),$$

$$|X_3(t)|^2 = \left|x_3 + t((B^2)'x_2')' + \frac{1}{2}t^2((B^2)'(B^1)'x_1')'\right|^2 \le 4\Bigg(|x_3|^2 + t^2|((B^2)'x_2')'|^2) +$$

$$+ \left|\frac{1}{2}t^2((B^2)'(B^1)'x_1')'\right|^2\Bigg) \le 4\left(|x_3|^2 + t^2\|B^2\|^2|x_2|^2 + \frac{1}{4}t^4\|B^1\|^2\|B^2\|^2|x_1|^2\right) \tag{10}$$

та аналогічно

$$|X_{2j}(t)|^2 \le 2\left(|x_{2j}|^2 + t^2\|B^1\|^2|x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1,...,n_2\};$$

$$|X_{3j}(t)|^2 \le 4\left(|x_{3j}|^2 + t^2\|B^2\|^2|x_{2j}|^2 + \frac{1}{4}t^4\|B^1\|^2\|B^2\|^2|x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1,...,n_3\}.$$

Із цих нерівностей випливає нерівність

$$\exp\{-[\mathbf{s}(t), x]\} \le \exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), x]\},$$

і тому

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}, \quad t \in [0,T],\ p \in [1,\infty]. \tag{11}$$

Оскільки за означенням $\mathbf{s}(t) \ge \mathbf{k}(0,\mathbf{a})$, $t \in [0,T]$, то для $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t \in [0,T],\ p \in [1,\infty]. \tag{12}$$

2 Формулювання основних результатів

Основні результати статті містяться у теоремах 1, 2.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (3) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* $p \in [1, \infty]$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (3);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0, T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

для $p \in [1, \infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} = 0$, *а для* $p = \infty$ – *граничні співвідношення* $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx;$$

2) для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (3);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0, T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

справджується граничне співвідношення $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 1.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* u – *розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння* (3), *який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \; t \in (0,T], \tag{15}$$

з деякими $C > 0$ *і* $p \in [1, \infty]$. *Тоді для* $p \in (1, \infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,a)}$, *а для* $p = 1$ – *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (13) *або* (14).

Нехай U_p, $p \in [1, \infty]$, – класи усіх розв'язків однорідного рівняння (3), які при кожному $t \in (0, T]$ належать до просторів $L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$ як функції x і для яких виконується умова (15). Із теорем 1 і 2 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. *Множинами початкових значень розв'язків із класів U_p, $p \in (1, \infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ та $M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ і тільки вони.*

Наслідок 2. *Класи U_p, $p \in (1, \infty]$, і U_1 є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами* (13) *і* (14) *на просторах відповідно $L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ і $M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, причому ці оператори є ізоморфізмами.*

Для отримання результатів, сформульованих у теоремах 1 і 2, використовується методика, подібна до праці [8].

3 Властивості інтегралів Пуассона

Припускатимемо, що виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$.

Лема 1. *Якщо $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1, \infty]$, то для інтеграла Пуассона* (13) *справджується оцінка*

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \leq C \|\varphi\|_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t \in (0, T]. \tag{16}$$

Доведення. Досить безпосередньо перевірити виконання нерівності (16) за різних значень p. Для цього необхідно оцінити $|u(t, x)|$, $(t, x) \in \Pi_{(0,T]}$, використовуючи нерівності (6), (8) та рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_\delta(t, x; 0, \xi) d\xi = C, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \delta > 0. \tag{17}$$

При $p \in (1, \infty)$, крім того, використовується нерівність Гельдера:

$$|u(t, x)| \leq C t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(|\varphi(\xi)| \exp\{-[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi]\} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t, x; 0, \xi) \big) \times$$

$$\times \exp\big\{ -\frac{c + c_0}{2} \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi] \big\} d\xi \leq$$

$$\leq C t^{-M} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi]\} E_{p((c-c_0)/2)}(t, x; 0, \xi) d\xi \bigg)^{1/p} \times$$

$$\times \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\big\{ -p'((c + c_0)/2) \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 + p'[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi] \big\} d\xi \bigg)^{1/p'} \leq$$

$$\leq C \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi]\} E_{p((c-c_0)/2)}(t, x; 0, \xi) t^{-M} d\xi \bigg)^{1/p} \times$$

$$\times \exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), X(t)]\}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)t^{-M}d\xi\Big)^{1/p'}, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

де число p' таке, що $1/p+1/p'=1$. Отже, при $p\in(1,\infty)$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)|^p\exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)t^{-M}d\xi\Big)dx\Big)^{1/p} =$$

$$= C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}t^{-M}E_{p((c-c_0)/2)}(t,x;0,\xi)dx\Big)d\xi\Big)^{1/p} =$$

$$= C\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t\in(0,T].\square$$

Наступна лема показує, в якому сенсі інтеграл Пуассона (13) задовольняє початкову умову.

Лема 2. *Якщо* $\varphi\in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p\in[1,\infty]$, *то для інтеграла Пуассона* (13) *при* $p\in[1,\infty)$ *виконується рівність*

$$\lim_{t\to 0}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)}=0, \tag{18}$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\varphi$ *слабко, тобто для довільних* $\psi\in L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ *справджується співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx. \tag{19}$$

Доведення. Встановимо співвідношення (18) при $p\in[1,\infty)$. За означенням границі треба довести, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta\in(0,T)$, що для всіх $t\in(0,\delta)$ виконується нерівність

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot\,;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi-\varphi(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}<\varepsilon. \tag{20}$$

Візьмемо $R>0$ та означимо функцію $\varphi^{(R)}$ так, що $\varphi^{(R)}(x)=\varphi(x),\ x\in B_R$ і $\varphi^{(R)}(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R$, де $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,0)\le R\}$. Маємо

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot\,;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi-\varphi(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}\le\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot\,;0,\xi)(\varphi(\xi)-\varphi^{(R)}(\xi))d\xi\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}+$$

$$+\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot\,;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi^{(R)}(\cdot)\Big\|_p^{\mathbf{s}(t)}+\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)}:=I_1+I_2+I_3, \quad t\in(0,T].$$

На підставі леми 1 маємо

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,\cdot\,;0,\xi)(\varphi(\xi)-\varphi^{(R)}(\xi))d\xi\Big\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}\le\|\varphi(\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},$$

що разом з (11) дає

$$I_1 \le C\|\varphi(\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t \in (0, T].$$

Із (12) випливає, що

$$I_3 \le \|\varphi(\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{a}}, \quad t \in (0, T].$$

При певному $\varphi > 0$ виберемо $R > 0$ так, щоб

$$\|\varphi(\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |\varphi(x)|^p \exp\{-p[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}), x]\}\})dx\Big)^{1/p} < \varepsilon/(2(C+1)).$$

Тоді $I_1 + I_3 < \varepsilon/2$.

Оскільки

$$I_2 \le C\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, \cdot; 0, \xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(\cdot)\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =: I^{1/p},$$

то для доведення (20) залишилося довести існування такого $\delta \in (0, T)$, щоб для всіх $t \in (0, \delta)$ виконувалася нерівність $I^{1/p} < \varepsilon/2$. Для цього I розбиваємо на два доданки

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} \Big|\int\limits_{B_R} Z(t, x; 0, \xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi\Big|^p dx + \int\limits_{B_{2R}} \Big|\int\limits_{B_R} Z(t, x; 0, \xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(x)\Big|^p dx =: J_1 + J_2,$$

кожен з яких оцінюємо окремо.

Зауважимо, що існує число $\delta_0 \in (0, 1)$ таке, що

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t) - \xi_i|^2 > t^{-1}(R/2)^2, \quad t \in (0, \delta_0),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R},\ \xi \in B_R. \tag{21}$$

Для оцінки J_1 при $p = 1$ використовуються нерівності (6), (21) та рівність (17). При $p > 1$, крім того, як і при доведенні леми 1, потрібно ще використати нерівність Гельдера. Отримаємо, що

$$J_1 \le C\|\varphi^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}(\exp\{-(c - c_0)t^{-1}(R/2)^2\} + \exp\{-(p(c - c_0)/2)t^{-1}(R/2)^2\}),\ t \in (0, \delta_0).$$

Звідси випливає існування такого $\delta_1 > 0$, що для всіх $t \in (0, \delta_1)$ виконується нерівність $J_1 < (1/2)(\varepsilon/2)^p$.

Для оцінки J_2 використаємо $\varphi_h^{(R)}$ – середню функцію для $\varphi^{(R)}$:

$$J_2^{1/p} \le \Big(\int\limits_{B_{2R}} \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)(\varphi^{(R)}(\xi) - \varphi_h^{(R)}(\xi))d\xi\Big|^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ \Big(\int\limits_{B_{2R}} \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi_h^{(R)}(x))\Big|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_{B_{2R}} |\varphi_h^{(R)}(x) - \varphi_h^{(R)}(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Перший доданок оцінюється подібно до того, як це було зроблено при доведенні леми 1, тільки без вагової функції. Далі, використовуючи властивості середніх функцій, відповідно до яких

$$\|\varphi^{(R)} - \varphi_h^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

а при фіксованому $h > 0$ рівномірно щодо $x \in B_{2R}$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi_h^{(R)}(x))\Big|^p \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

отримуємо, що існує така стала $\delta_2 > 0$, що для всіх $t \in (0,\delta_2)$ виконується нерівність $J_2 < (1/2)(\varepsilon/2)^p$. З цієї оцінки та подібної оцінки для J_1 випливає потрібна оцінка $I^{1/p} < \varepsilon/2$ для всіх $t \in (0,\delta_2)$, де δ – найменше з чисел δ_1 і δ_2.

Доведемо використану вище нерівність (21). Позначимо

$$Y(t) := \Big(\underbrace{0,...,0}_{n_1}, -t\sum_{j=1}^{n_1} b_{j1}^1 x_{1j}, ..., -t\sum_{j=1}^{n_1} b_{jn_2}^1 x_{1j}, -t\sum_{l=1}^{n_2} b_{l1}^2 x_{2l} - 2^{-1}t^2\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} b_{l1}^2 b_{jl}^1 x_{1j},$$

$$..., -t\sum_{l=1}^{n_2} b_{ln_3}^2 x_{2l} - 2^{-1}t^2\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} b_{ln_3}^2 b_{jl}^1 x_{1j}\Big).$$

Для $t \in (0,1)$ маємо

$$|Y(t)| \le \bigg(t^2\sum_{s=1}^{n_2}\Big(\sum_{j=1}^{n_1}|b_{js}^1||x_{1j}|\Big)^2 + t^2\sum_{s=1}^{n_2}\Big(\sum_{l=1}^{n_2}|b_{ls}^2||x_{2l}|\Big)^2 +$$

$$+4^{-1}t^4\sum_{s=1}^{n_2}\Big(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2}|b_{ls}^2||b_{jl}^1||x_{1j}|\Big)^2\bigg)^{1/2} \le c_1 t|x|;$$

$$|X(t)| = |x - Y(t)| \ge \big||x| - |Y(t)|\big|.$$

Звідси маємо, що для числа $\delta_0 \in (0,1)$ такого, що $c_1\delta_0 \le 1/4$, для довільних $t \in (0,\delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ виконується нерівність $|X(t)| \ge (3/4)|x| \ge 3R/2$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t) - \xi_i|^2 \ge t^{-1}|X(t) - \xi|^2 \ge t^{-1}\big||X(t)| - |\xi|\big|^2 > t^{-1}(R/2)^2,$$

$$t \in (0,\delta_0),\ x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R},\ \xi \in B_R,$$

що і слід було довести.

Перейдемо до доведення співвідношення (19). Спочатку зауважимо, що інтеграли з (19) мають сенс при будь-яких $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $\psi \in L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ і $t \in (0,T]$, оскільки на підставі нерівності (11) і леми 1 норма $\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\mathbf{s}(t)}$ є скінченною для довільних $t \in (0,T]$, якщо $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$. Справді, на підставі того, що $a_i \le s_i(t) \le s_i(T)$ для довільних $t \in (0,T]$, $i \in \{1,2,3\}$, маємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\psi(x)|\exp\{[\mathbf{s}(T),x]\})(|u(t,x)|\exp\{-[\mathbf{s}(t),x]\})dx \le$$

$$\le \|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)}\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\mathbf{s}(t)} < \infty,$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\psi(x)|\exp\{[\mathbf{s}(T),x]\})(|\varphi(x)|\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),x]\})dx \le$$

$$\leq \|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} \|\varphi\|_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} < \infty.$$

Для доведення (19) досить встановити співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (v(t,\xi) - \psi(\xi))\varphi(\xi) d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

де

$$v(t,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\psi(x)dx.$$

Враховуючи, що $\varphi \in L_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і справджується нерівність

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v(t,\xi) - \psi(\xi))\varphi(\xi) d\xi \Big| \leq \|\varphi\|_\infty^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(t,\xi) - \psi(\xi)| \exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}) d\xi,$$

залишається тільки довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(t,\xi) - \psi(\xi)| \exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\} d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{22}$$

Оскільки $a_i < k_i(T,a_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, то існує таке $\gamma > 0$, що $s_i(T) \geq k_i(T,a_i) \geq g_i(t) := c_0 k_i(T,a_i)/(c_0 + k_i(T,a_i)t^{2i-1}) \geq a_i$, $i \in \{1,2,3\}$, для всіх $t \in [0,\gamma]$. Тому

$$\exp\{[\mathbf{g},\xi]\} \geq \exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}, \quad t \in [0,\gamma], \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

і для доведення (22) досить для будь якого $\varepsilon > 0$ довести існування такого $\delta \in (0,\gamma)$, що для всіх $t \in (0,\delta)$ виконується нерівність

$$\|v(t,\cdot) - \psi(\cdot)\|_1^{-\mathbf{g}(t)} := \|(v(t,\cdot) - \psi(\cdot)) \exp\{[\mathbf{g}(t),\cdot]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

де $\mathbf{g}(t) := (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$. Доведення цього проводиться аналогічно до доведення (20), тільки з використанням нерівності

$$[\mathbf{k}(T,\mathbf{a}), X(t)] \leq [\mathbf{s}(T), x], \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

яка справджується на підставі (10) та означення $\mathbf{s}(T)$, і нерівності

$$-c_0 \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 - [\mathbf{k}(T,\mathbf{a}), X(t)] \leq -[\mathbf{g}(t),\xi], \quad t \geq 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

яка обгрунтовується так само, як (9). □

Подібно до доведення лем 1 і 2 можна встановити наступну лему.

Лема 3. *Якщо* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *то для інтеграла Пуассона* (14) *виконується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \leq C\|\mu\|^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}, \quad t \in (0,T], \tag{23}$$

і $u(t,\cdot) \to \mu$ *при* $t \to 0$ *слабко, тобто для довільних* $\psi \in C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ *справджується співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(t,x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) d\mu(x). \tag{24}$$

4 Інтегральне зображння розв'язків задачі Коші

Сформулюємо твердження про зображення класичних розв'язків задачі Коші для рівняння (3) у вигляді інтегралів Пуассона. Припускатимемо, що виконуються умови $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$.

Лема 4. *Якщо* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1, \infty]$, *то класичний розв'язок* u *рівняння* (3), *який задовольняє умову*

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t)} \leq C, \quad t \in (0, T], \tag{25}$$

з деякою сталою $C > 0$, *умови* (18) *і* (19) *відповідно для* $p \in [1, \infty)$ *і* $p = \infty$, *зображується у вигляді* (13).

Доведення. Використаємо формулу Гріна-Остроградського

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{B_R} (vLu - uL^*v)(\theta, y)dy = \int\limits_{B_R} (vu)(\theta, y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R} \Big(\sum_{j=1}^{n_2} \Big(\sum_{l=1}^{n_1} b_{lj}^1 y_{1l} \Big) \mu_{2j} + \sum_{j=1}^{n_3} \Big(\sum_{l=1}^{n_2} b_{lj}^2 y_{2l} \Big) \mu_{3j} \Big) (vu)(\theta, y) dS_y+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v, u](\theta, y) \mu_{1j} dS_y, \tag{26}$$

де $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, B_R – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат, Γ_R – її межа, $(\mu_{11}, ..., \mu_{1n_1}, \mu_{21}, ..., \mu_{2n_2}, \mu_{31}, ..., \mu_{3n_3})$ – одинична зовнішня нормаль до Γ_R, $L := S_B - A(\theta, y, \partial_{y_1})$, $L^* := S_B^* - A^*(\theta, y, \partial_{y_1})$,

$$B^j[v, u] := -\sum_{l=1}^{n_1} (a_{jl} \partial_{y_{1l}} uv - u \partial_{y_{1l}} (a_{jl} v)) + a_j uv, \quad j \in \{1, ..., n_1\},$$

u і v – досить гладкі функції. Формула (26) є правильною для функцій u і v, які мають класичні похідні, що входять у рівняння (3).

Наведемо схему доведення леми. Нехай u – класичний розв'язок, для якого виконуються умови леми, і нехай $V_R := (0, T] \times B_R$; ζ – досить гладка на $[0, \infty)$ функція така, що $\zeta = 1$ на $[0, 1/2]$, $\zeta = 0$ на $[3/4, \infty)$ і $\zeta' \leq 0$; $\zeta_R(x) := \zeta(|x|/R)$; (t, x) – довільно фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – довільно взяте додатне число. Покладемо в формулі (23) замість t_1, t_2, θ, y, $u(\theta, y)$ і $v(\theta, y)$ відповідно h, $t - \varepsilon$, τ, ξ, $u(\tau, \xi)$ і $v(\tau, \xi) = Z^*(\tau, \xi; t, x)\zeta_R(\xi)$, де $R \geq R_0$, $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$. Використовуючи властивості функції ζ_R, рівність (7) для Z і те, що $Lu = 0$, одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; t - \varepsilon, \xi)\zeta_R(\xi) u(t - \varepsilon, \xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; h, \xi)\zeta_R(\xi) u(h, \xi) d\xi-$$

$$-\int\limits_{h}^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} (L^*(Z^*(\tau,\xi;,x)\zeta_R(\xi)))u(\tau,\xi)d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ приходимо до рівності

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{h}^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} (L^*(Z^*(\tau,\xi;,x)\zeta_R(\xi)))u(\tau,\xi)d\xi =: I_1^{(R)} + I_2^{(R)}. \tag{27}$$

У цій рівності переходимо до границі при $R \to \infty$. Доводиться, що при цьому перший доданок правої чатини $I_1^{(R)}$ прямує до інтеграла

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi,$$

а другий доданок $I_2^{(R)}$ прямує до 0. Для доведення того, що $I_1^{(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} I_1$, оцінюємо різницю $|I_1 - I_1^{(R)}|$ за допомогою таких нерівностей:

$$-c_0\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2 + [\mathbf{k}(h,\mathbf{a}),\Xi(h)] \le -c_0\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2+$$

$$+[\mathbf{s}(h),\xi] \le [\mathbf{k}(t-h,\mathbf{s}(h)),X(t-h)] \le c_1, \quad x\in B_{R_0/4},\ \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{28}$$

тут h – досить мале число таке, що $0 < t-h \le T < \min\limits_{i\in\{1,2,3\}} (c_0/s_i(h))^{1/(2i-1)}$;

$$\sum_{i=1}^{3} t^{1-2i}|X_i(t-h)-\xi_i|^2 \ge (t-h)^r(R/4)^2, \quad 0<t-h\le T,\ x\in B_{R_0/4},\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}, \tag{29}$$

де $c_1 > 0$, $r = -1$ при $0 < t-h \le 1$ і $r = -5$ при $t-h > 1$, R – досить велике число, R_0 – фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$.

Друга нерівність з (28) доводиться так само, як нерівність (9), а перша і третя – очевидні на підставі нерівностей (10) та означення функцій s_i, $i \in \{1,2,3\}$. Доведення нерівності (29) аналогічне до доведення нерівності (21).

Перейдемо у (24) до границі при $R \to \infty$, одержимо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi. \tag{30}$$

Тепер, якщо у рівності (30) перейти до границі при $h \to 0$ і використати рівність

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{31}$$

одержимо доведення леми.

Зауважимо, що для доведення рівності (31) використовується таке твердження: для довільних фіксованих $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ існують такі сталі $C' > 0$, $c' \in (c_0, c)$ (c – стала з оцінки (6)) і $h_0 > 0$, що для будь-яких $h \in (0, h_0)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ правильна оцінка

$$|Z(t,x;h,\xi)| \leq C' t^{-M} \exp\Big\{-c' \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2\Big\}. \tag{32}$$

Справді, на підставі оцінки (6) маємо

$$|Z(t,x;h,\xi)| \leq C t^{-M} \exp\Big\{-c \sum_{i=1}^{3} t^{1-2i} |X_i(t-h) - \xi_i|^2\Big\}.$$

Оскільки для $c > 0$ існують сталі $C' > 0$ і $c' \in (c_0, c)$ такі, що для довільних $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$, $|v| \leq 1$, виконується нерівність

$$\exp\{-c|u-v|^2\} \leq C' \exp\{-c'|u|^2\},$$

то

$$\exp\{-ct^{-3}|X_2(t-h) - \xi_2|^2\} = \exp\{-c|t^{-3/2}(X_2(t) - \xi_2) - t^{-3/2} h (B^1)' x_1'|^2\} \leq$$
$$\leq C' \exp\{-c' t^{-3} |X_2(t) - \xi_2|^2\},$$

якщо h брати таким, що $ht^{-3/2}\|B^1\|\,|x_1| \leq 1$, і

$$\exp\{-ct^{-5}|X_3(t-h) - \xi_3|^2\} = \exp\{-c|t^{-5/2}(X_3(t) - \xi_3) - t^{-5/2}(B^2)'(hx_2' + ht(B^1)'x_1' -$$
$$-h^2 (B^1)' x_1'/2)|^2\} \leq C' \exp\{-c' t^{-5} |X_3(t) - \xi_3|^2\},$$

якщо h брати таким, що $t^{-5/2}\|B^2\|\big(h(t\|B^1\|\,|x_1| + |x_2|) + h^2\|B^1\|\,|x_1|/2\big) \leq 1$. □

Лема 5. *Якщо* $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, *то класичний розв'язок рівняння* (3), *який задовольняє умову* (25) *з* $p = 1$ *і співвідношення* (24), *зображується у вигляді* (14).

Доведення. Для доведення цієї леми так само, як в лемі 4, в рівності (30) переходимо до границі при $h \to 0$. □

5 Доведення теорем

Доведення теореми 1. Оскільки ФРЗК Z є класичним розв'язком рівняння (3), то на підставі оцінок (6) маємо, що при $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in [1,\infty]$, $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ інтеграли Пуассона (13) і (14) також є класичними розв'язками рівняння (3). Із лем 4 і 5 випливає єдиність цих розв'язків. Інші твердження теореми 1 є наслідками з лем 1–3. □

Доведення теореми 2. Нехай $p \in (1,\infty]$. З умови (15) випливає, що послідовність за параметром $\nu \in \mathbb{N}$ функцій

$$\{u(1/\nu, x)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu, \mathbf{a}), X(1/\nu)]\},\ x \in \mathbb{R}^n : \nu \in \mathbb{N}\} \tag{33}$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$. Простір $L_p(\mathbb{R}^n)$ ізометричний простору, спряженому до $L'_p(\mathbb{R}^n)$, $p' := p/(p-1)$. Скористаємося теоремою про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі. Одержимо, що послідовність (33) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому існує її підпослідовність

$$\{u(1/\nu(r),x)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),X(1/\nu(r))]\},\ x\in\mathbb{R}^n : r\in\mathbb{N}\},\quad \lim_{r\to\infty}\nu(r)=\infty, \tag{34}$$

і функція $\chi\in L_p(\mathbb{R}^n)$ такі, що для довільної $\psi\in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\chi(\xi)d\xi. \tag{35}$$

Покладемо $\varphi(\xi) := \chi(\xi)\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Тоді $\varphi\in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і співвідношення (35) записуються у вигляді

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\varphi(\xi)d\xi. \tag{36}$$

Нехай (t,x) – фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$ і

$$\psi(\xi) := Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\},\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{37}$$

Із оцінки

$$|\psi(\xi)|\le Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\},\quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{38}$$

яка одержується за допомогою нерівностей (6) і (9), випливає, що $\psi\in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Тому на підставі рівності (36) маємо

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{39}$$

Припустимо, що $1/\nu(r)\le t/2$, $r\ge1$. Згідно з формулою (30)

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;1/\nu(r),\xi)u(1/\nu(r),\xi)d\xi. \tag{40}$$

На підставі цієї рівності маємо

$$u(t,x)-\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(Z(t,x;1/\nu(r),\xi)-Z(t,x;0,\xi))u(1/\nu(r),\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(1-\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi+$$

$$+\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big)=: K_1^{(r)}+K_2^{(r)}+K_3^{(r)},\quad r\geq 1. \tag{41}$$

Щоб одержати зображення (13), досить довести, що

$$\lim_{r\to\infty} K_i^{(r)}=0,\quad i\in\{1,2,3\}. \tag{42}$$

Те, що $\lim\limits_{r\to\infty} K_1^{(r)}=0$, доводиться з використанням оцінки (32), як при доведенні (31) в лемі 4. Із (39) випливає, що $K_3^{(r)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$. Залишилося довести, що $K_2^{(r)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$.

За допомогою нерівності Гельдера та умови (15) маємо

$$|K_2^{(r)}|\leq\|u(1/\nu(r),\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a})}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi\Big)^{1/p'}\leq C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi\Big)^{1/p'}, \tag{43}$$

де

$$F_r(\xi):=|Z(t,x;0,\xi)|^{p'}\Big|\exp\{[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}-\exp\{[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\Big|^{p'},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ r\geq 1.$$

З оцінок (6) і (9) випливають нерівності

$$(F_r(\Xi))^{1/p'}\leq Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\Big(\exp\{-c_0\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+$$

$$+[\mathbf{s}(1/\nu(r)),\xi]\}+\exp\{-c_0\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}\Big)\leq Ct^{-M}\times$$

$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\Big(\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{s}(1/\nu(r))),X(t)]\}+\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\Big).$$

Тут $r\geq r_0$, де r_0 взято так, щоб $t<H(1/\nu(r_0))$. Оскільки для довільних $r\geq r_0$

$$k_i(t,s_i(1/\nu(r)))\leq k_i(t,s_i(1/\nu(r_0))),\quad i\in\{1,2,3\},$$

то

$$(F_r(\Xi))^{1/p'}\leq Ct^{-M}\exp\{-(c-c_0)\sum_{i=1}^{3}t^{1-2i}|X_i(t)-\xi_i|^2\}\times$$

$$\times\Big(\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{s}(1/\nu(r_0))),X(t)]\}+\exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\Big),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ r\ge r_0,$$

звідки випливає, що послідовність $\{F_r, r\ge r_0\}$ має інтегровну мажоранту. Оскільки для кожного $\xi\in\mathbb{R}^n$ $F_r(\xi)\xrightarrow[r\to\infty]{}0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}F_r(\xi)d\xi=0.$$

Звідси з урахуванням (43) одержуємо (42) для $i=2$.

Розглянемо випадок $p=1$. Із умови (15) випливає, що послідовність (33) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, але він вкладається у простір $M(\mathbb{R}^n)$ всіх узагальнених мір $\mu:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$, які мають скінченну повну варіацію $|\mu|(\mathbb{R}^n)$. Якщо для μ ввести норму за формулою $\|\mu\|:=|\mu|(\mathbb{R}^n)$, то $M(\mathbb{R}^n)$ стає банаховим простором. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ усіх комплекснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$, які прямують до нуля на нескінченності, з рівномірною нормою. Із обмеженості в $L_1(\mathbb{R}^n)$ послідовності (33) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір в $M(\mathbb{R}^n)$ і, звідси, слабка компактність останньої. Тому існують такі послідовність (34) та узагальнена міра $\mu\in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, що для довільної функції $\psi\in C_0(\mathbb{R}^n)$ справджується рівність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}d\mu(\xi). \tag{44}$$

Із оцінки (38) випливає, що функція (37) належить до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ для будь-якої фіксованої точки $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$. Тому на підставі (44) одержуємо, що

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi). \tag{45}$$

Далі діємо так само, як при $p>1$. За допомогою формули (40) записуємо рівність

$$u(t,x)-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)=K_1^{(r)}+K_2^{(r)}+K_4^{(r)},\quad r\ge1, \tag{46}$$

де $K_1^{(r)}$ і $K_2^{(r)}$ – ті самі, що і в (41), а

$$K_4^{(r)}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\exp\{-[\mathbf{k}(1/\nu(r),\mathbf{a}),\Xi(1/\nu(r))]+[\mathbf{k}(0,\mathbf{a}),\xi]\}u(1/\nu(r),\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi).$$

На підставі (42) $K_4^{(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$. Враховуючи також рівності (42) для $i \in \{1,2\}$ і (46), отримуємо потрібне ображення (14).

Таким чином доведено існування функції $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $p \in (1,\infty]$, і узагальненої міри $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ при $p = 1$, таких, що заданий розв'язок u, який задовольняє умову (15), є інтегралом Пуассона відповідно функції φ або узагальненої міри μ. Єдиність φ і μ випливає з теореми 1. $\square$

Висновки

У роботі розглянуто ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова з блочною структурою, які узагальнюють відоме рівняння дифузії з інерцією. Такі рівняння виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів. Клас таких рівнянь за певних умов на вигляд його блочної структури позначено через $\mathbf{E}_{22}^{B}$.

У статті сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^{B}$, за яких отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах, а також отримано інтегральне зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші. При цьому одержано оцінки в спеціальних вагових нормах інтегралів Пуассона, породжених ФРЗК, та досліджена їх гранична поведінка.

Наведені результати є досить точними. З них, зокрема, випливає повна характеризація розглянутих класів розв'язків. Цим самим для таких розв'язків розв'язана задача, яка є важливою класичною задачею теорії аналітичних та гармонічних функцій. Вона полягає у відшуканні умов на розв'язки рівнянь, визначених в області, які гарантують існування їхніх граничних значень на межі області. Зауважимо, що подібні результати для так званих L-розв'язків задачі Коші для рівняння (3) отримано в [7].

Отримані результати є реалізацією відомого підходу Ейдельмана–Івасишена [8]. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^{B}$.

Список літератури

[1] Kolmogoroff A. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*. Ann.Math. 1934, **35**, No.1, 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123

[2] Mishura Yu.S., Ralchenko K.V., Sakhno M.L., Shevchenko G.M. Stochastic processes: theory, statistics, application: textbook. 2nd Edition. Kyiv University, Kyiv, 2023 (in Ukrainian).

[3] Stanton R. Path Dependent Payoffs and Contingent Claim Valuation: Single Premium Deferred Annuities. Graduate School of Business, Stanford University 1989.

[4] Barraquand J., Pudet T. *Pricing of American path-dependent contingent claims.* Math. Finance 1996, **6**, 17–51.

[5] Pascucci A. *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options.* Finance and Stoch. 2008, **12**, 21–41. doi: 10.1007/s00780-007-0051-7

[6] Di Francesco, Pascucci A. *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type.* AMRX Appl. Math. Res. Exprass 2005, **3**, 77–116.

[7] Ivasyshen S.D., Layuk V.V. *Cauchy problem for some degenerated parabolic equations of Kolmogorov type.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 56–65 (in Ukrainian).

[8] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[9] Dron V.S., Medynskyi I.P. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultra-parabolic equations in the Asian options models.* Math. Modeling and Computing 2024, **11** (2), 593–606. https://doi.org/10.23939/mmc2024.02.593

Надійшло 04.05.2024

Dron V.S.[1], Medynskyi I.P.[1,2] *Cauchy problem for ultra-parabolic equations of Kolmogorov type with block structure*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 43–62.

The investigation is devoted to ultra-parabolic equations which appear in Asian options problems. Unlike the European option, the payout of Asian derivative depends on the entire trajectory of the price value, not the final value only.

Among methods of researching of the Asian options, the one is to include dependent on the price trajectory variables in the state space. The expansion of the state space by including of dependent on the price trajectory variables transforms the path-dependent problem for the Asian option into an equivalent path-independent Markov problem. However, the increasing of the dimension usually leads to partial differential equations which are not uniformly parabolic. The class of these equations under some conditions is a generalization of the well-known degenerate parabolic A.N.Kolmogorov's equation of diffusion with inertia.

Mathematical models of the options have been studied in many works. It has been constructed so called L-type fundamental solutions for considered equations previously, some their properties have been established, the Cauchy problem has been researched.

In current work, for the given equations we study the classical solutions of the Cauchy problem. For the coefficients of the equations we apply special Hölder conditions with respect to spatial variables. Under these conditions, we prove the well-posedness of the Cauchy problem in special weighed spaces, obtained integral presentation of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations. Classes of well-posedness of the Cauchy problem were described.

The results obtained in the work are realization of well-known Eidelman–Ivasyshen approach. Ones can be used to advanced studying of the Cauchy problem and boundary value problems for linear and quasi-linear degenerated parabolic equations, as well as in the theory of stochastic processes when studying Markov processes, the transition probability density of which is the fundamental solution of the Cauchy problem for these equations.