Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 63–73 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 63–73

Козловський М.Р.

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ОДНОТОЧКОВИХ РОЗРИВІВ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

В даній статті показано, що для цілком регуляних просторів $X_1, ..., X_n$ із x_{i0} – неізольована G_δ-точка у просторі X_i, якщо для деяких $1 \le i \ne j \le n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$, то існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$. Використовуючи цей факт показний основний результат, що для цілком регуляних просторів $X_1, ..., X_n$ існування нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із одноточковим розривом $(x_{10}, ..., x_{n0})$, де x_{i0} – це G_δ точка у X_i, рівносильне тому, що із n P-фільтрів хоча б два є майже когерентними.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, P-фільтри, одноточкові розриви, майже когерентні фільтри.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
e-mail: *kozlovskyi.mykola@chnu.edu.ua*

1 Вступ

Вивчення множини точок розриву нарізно неперервної функції (тобто функції двох і більше змінних, які неперервні відносно кожної змінної) беруть свій початок з дисертації Р.Бера [1]. Ці дослідження продовжились і розвивались багатьма математиками (див. [2] і вказану там літературу). Зауважимо, що повний опис множини точок розриву одержаний лише у наступних двох випадках: для нарізно неперервних функцій на добутку n метризовних просторів [3], і для нарізно неперервних функцій на добутку n просторів, кожен з яких є добутком сепарабельних метризовних просторів [4].

Окремий інтерес викликають дослідження нарізно неперервних функцій та їх аналогів з одноточковою множиною розривів. Ця тематика розвивалась у роботах [2], [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Зокрема, у [6] були одержані необхідні і достатні умови існування нарізно неперервної функцій з одноточковими розривами на добутку двох компактних просторів. У [7] цей результат був узагальнений на випадок функцій багатьох змінних.

З іншого боку, у [9] було виявлено, що існування нарізно неперервної функцій з даними одноточковими розривами типу G_δ тісно пов'язано з властивостями P-фільтрів,

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54C08, 54A35, 03E35,03E50, 03E65.

а відповідь на це питання не залежить ZFC-аксіом. В той же час у [10] було узагальнено даний результат на випадок сильно нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку цілком регуляних просторів і показано, що для довільної кількості відповідних просторів існування відповідної сильно нарізно неперервної функції також рівносильне тому, що довільні два P-фільтри із $\mathcal{F}$ є майже когерентними.

Сильно нарізно неперервна функція n змінних – це функція, яка неперервна відносно кожної сукупності $n-1$ змінних, тобто функція, як при фіксованому значенні однієї змінної є неперервною відносно решти змінних. Зрозуміло, що для функції двох змінних сильна нарізна неперервність збігається з нарізною неперервністю, а у загальному випадку кожна сильно нарізно неперервна функція n змінних є нарізно неперервною.

Оскільки існування сильно нарізно неперервної функції – це сильніша умова за існування нарізно неперервної функції, то виникає питання чи можна також послабити умову майже когерентності P-фільтрів. В дані роботі ми покажемо, що існування нарізно неперервної функції n змінних із одноточковим розривом рівносильне тому, що із довільних n P-фільтрів хоча б два є майже когерентними.

2 Майже когерентність P-фільтрів – необхідна умова

Непорожня система $\mathcal{A}$ непорожніх підмножин множини S називається фільтром на S, якщо виконуються наступні умови:
1) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ для довільних $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$;
2) якщо $A \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq S$, то $B \in \mathcal{A}$.

Фільтр $\mathcal{A}$ на множині S називається P-фільтром, якщо для довільної послідовності $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ множин $A_m \in \mathcal{A}$ існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що множина $A \setminus A_m$ скінчена для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Фільтри $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ на множині S називаються майже когерентними, якщо існує відображення $\varphi : S \to S$ таке, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$ і $\varphi(A) \cap \varphi(B) \neq \varnothing$ для довільних $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Позначимо через $\mathcal{F}$ сукупність усіх фільтрів x на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ таких, що для довільних $A, B \subseteq \mathbb{N}$ зі скінченою різницею $A \triangle B$ якщо $A \in x$, то $B \in x$. Зрозуміло, що фільтр x на множині $\mathbb{N}$ входить у $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq m\} \in x$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Для кожного $x \in \mathcal{F}$ через $\mathbb{N}_x$ будемо позначати простір $\mathbb{N} \cup \{x\}$, в якому всі точки $m \in \mathbb{N}$ є ізольованими, а множина $A \cup \{x\}$, де $A \subseteq \mathbb{N}$, є околом точки x в $\mathbb{N}_x$ тоді і тільки тоді, коли $A \in x$.

Для довільного $n \geq 2$ фільтри $x_1, ..., x_n$ на множині S називаються *майже когерентними*, якщо існує відображення $\varphi : S \to S$ таке, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$ і $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \neq \varnothing$ для довільної $A_i \in x_i$ для кожного $1 \leq i \leq n$.

Розглянемо твердження, яке дає зв'язок між майже когерентністю двох і n фільтрів.

Твердження 1. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – довільні фільтри на множині S такі, що існує пара фільтрів x_i, x_j, які не є майже когерентними. Тоді $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними.*

Доведення. Оскільки x_i, x_j не є майже когерентними, то для довільного відображення $\varphi : S \to S$ такого, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінчена для кожного $s \in S$, існують $A_i \in x_i$ і $A_j \in x_j$ такі, що $\varphi(A_i) \cap \varphi(A_j) = \varnothing$. Тоді і для довільних множин $B_k \in x_k$ для кожного $1 \leq k \leq n, k \notin \{i, j\}$ маємо

$$\varphi(A_i) \cap \varphi(A_j) \cap (\bigcap_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \notin \{i,j\}}} \varphi(B_k)) = \varnothing,$$

а, отже, $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними □

Твердження 2. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – P-фільтри із $\mathcal{F}$, які попарно не є майже когерентними, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ є сильно нарізно неперервною.*

Доведення. Доводимо методом математичної індукції. Очевидно, що при $n = 2$ твердження виконується. Припустимо, що воно вірне для $n - 1 \geq 2$ фільтрів і доведемо, що твердження вірне для n фільтрів.

Для довільного $1 \leq i \leq n$ зафіксуємо довільну точку $u_i \in X_i$ і розглянемо функцію $f_{u_i} : \prod\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} X_j \to \mathbb{R}$ означену наступним чином

$$f_{u_i}(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n) = f(u_1, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_n).$$

Оскільки f є нарізно неперервною, то функція f_{u_i} також є нарізно неперервною і згідно із припущенням індукції, вона буде сильно нарізно неперервною.

Оскільки фільтри $x_1, ..., x_n$ попарно не є майже когерентними, то згідно із лемою 1 фільтри $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$ не є майже когерентними. Враховуючи це і те, що f_{u_i} є сильно нарізно неперервною, згідно із теоремою 2 [10] маємо, що f_{u_i} є неперервною. Враховуючи довільність вибору точки u_i і довільність вибору індексу змінної, ми отримали, що функція f є сильно нарізно неперервною. □

Для функції f через $D(f)$ ми позначаємо множину точок розриву цієї функції.

Наступна теорема є основним результатом даного розділу. Вона показує, що майже когерентність хоча б двох P-фільтрів є необхідною умовою для існування нарізно неперервної функції з одноточковим розривом.

Теорема 1. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – P-фільтри із $\mathcal{F}$ та існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Тоді із P-фільтрів $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два, які є майже когерентними.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто фільтри $x_1, ..., x_n$ попарно не є майже когерентними. Тоді із леми 1 отримуємо, фільтри $x_1, ..., x_n$ не є майже когерентними. Також із леми 2 отримуємо, що функція f є сильно нарізно неперервною. Тоді згідно із теоремою 2 [10] функція f є неперервною, а це суперечить умові твердження. Отже, наше припущення не вірне і із P-фільтри $x_1, ..., x_n$ є хоча б два, які є майже когерентними. □

3 Нарізно неперервні функції на добутку n спеціальних просторів

У даному розділі ми продовжимо розгляд нарізно неперервних функцій на добутку n просторів N_{x_i} і одержимо повне розв'язання задачі про побудову нарізно неперервної функції з одноточковим розривом $\{(x_1, ..., x_n)\}$.

Спочатку розглянемо твердження, яке для просторів $\mathbb{N}_{x_i}$ показує можливість побудови нарізно неперервної функції n змінних, якщо існує нарізно неперервна функція $n-1$ змінних.

Твердження 3. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, та існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_{n-1})\}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $g : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$.*

Доведення. Для кожного $1 \leq i \leq n-1$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ покладемо $U_{i,k} = ([k, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_i\}$ і $W_k = \prod\limits_{i=1}^{n-1} U_{i,k}$. Виходячи із побудови маємо, що W_k є відкрито замкнена у $\prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $\{x_1, .., x_{n-1}\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} W_k$.

Для довільного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію $h_k : \prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$h_k(u_1, ..., u_{n-1}) = \begin{cases} f(x_1, ..., x_{n-1}) & , (u_1, ..., u_{n-1}) \in W_k, \\ f(u_1, ..., u_{n-1}) & , (u_1, ..., u_{n-1}) \notin W_k. \end{cases}$$

Із побудови функції h_k і того, що W_k відкрито-замкнена множина, випливає, що $D(h_k) \subseteq D(f) = \{(x_1, ..., x_{n-1})\}$. В той же час $(x_1, ..., x_{n-1}) \in W_k$. Враховуючи, що множина W_k є відкрито-замкненою і h_k дорівнює сталому значенню на W_k, маємо, що h_k неперервна в $(x_1, ..., x_{n-1})$. Отже, функція h_k неперервна для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо функцію $g : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$g(u_1, ..., u_n) = \begin{cases} h_{u_n}(u_1, ..., u_{n-1}) & , u_n \in \mathbb{N}, \\ f(u_1, ..., u_{n-1}) & , u_n = x_n. \end{cases}$$

Покажемо, що g є нарізно неперервна із $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Спочатку доведемо, що g неперервна відносно кожної змінної u_i, де $1 \leq i \leq n-1$. Для цього потрібно показати, що для кожного фіксованого $u_n \in X_n$ функція g_{u_n} є нарізно неперервною. Якщо $u_n \in \mathbb{N}$, то функція $g_{u_n} = h_{u_n}$ і тому g_{u_n} є неперервною. Якщо ж $u_n = x_n$, то $g_{u_n} = f$ і g_{u_n} є нарізно неперервною.

Тепер доведемо, що функція g є неперервною відносто n-тої змінної. Зафіксуємо точку $(u_1, ..., u_{n-1}) \in \prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i$ і розглянемо відповідну функцію $g_{(u_1,...,u_{n-1})} : X_n \to \mathbb{R}$ означену наступним чином

$$g_{(u_1,...,u_{n-1})}(u_n) = g(u_1, ..., u_{n-1}, u_n).$$

Оскільки кожна точка $u_n \in \mathbb{N}$ є ізольованою в X_n, то $g_{(u_1,...,u_{n-1})}$ непервна в даній точці. Тепер покажемо, що функція неперервна у точці x_n. Якщо $(u_1, ..., u_{n-1}) = (x_1, ..., x_{n-1})$, то $g_{(x_1,...,x_{n-1})}(u_n) = f(x_1, ..., x_{n-1})$ для довільного $u_n \in X_n$, тому ця функція є неперервною. Якщо $(u_1, ..., u_{n-1}) \neq (x_1, ..., x_{n-1})$, то покладемо $k = \min(\{u_1, .., u_{n-1}\} \cap \mathbb{N}) + 1$ і розглянемо окіл $U_n = ([k, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_n\}$ точки x_n. Тоді $(u_1, ..., u_{n-1}) \notin W_{u_n}$ для довільного $u_n \in U_n$ і тому $g_{(u_1,...,u_{n-1})}(u_n) = f(u_1, ..., u_{n-1})$. Отже, $g_{(u_1,...,u_{n-1})}$ є неперервною в x_n.

Таким чином, g є нарізно неперервною. Тепер покажемо, що $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Оскільки $D(f) = \{(x_1, .., x_{n-1})\}$ і $g_{x_n} = f$, то функція g розривна в точці $(x_1, ..., x_n)$.

Покажемо, що g є неперервною у кожній точці $(u_1, ..., u_n) \neq (x_1, ..., x_n)$. Оскільки $(u_1, ..., u_n) \neq (x_1, ..., x_n)$, то існує $1 \leq i \leq n$ таке, що $u_i \in \mathbb{N}$. Спочатку розглянемо випадок, коли $i = n$. Тоді $g(u_1, ..., u_n) = h_{u_n}(u_1, ..., u_{n-1})$. Оскільки u_n ізольована точка і функція h_{u_n} неперервна, то функція g неперервна в точці $(u_1, ..., u_n)$.

Тепер розглянемо випадок, коли $1 \leq i < n$. Без втрати загальності вважатимемо, що $i = 1$, тобто $u_1 \in \mathbb{N}$. Також будемо вважати, що $u_n = x_n$, оскільки випадок, коли це не так ми вже розглянули. Покладемо окіл $U_n = ([u_1 + 1, +\infty) \cap \mathbb{N}) \cup \{x_n\}$ точки u_n і розглянемо окіл $U = \{u_1\} \times \prod\limits_{j=1}^{n-1} X_j \times U_n$ точки $(u_1, ..., u_n)$. Тоді $(v_1, .., v_{n-1}) \notin W_{v_n}$ для довільної точки $(v_1, ..., v_n) \in U$ і тому $g(v_1, .., v_n) = f(v_1, .., v_{n-1})$. Оскільки $u_1 \in \mathbb{N}$, то функція f неперервна в точці $(u_1, .., u_{n-1})$. Отже, і функція g неперервна в точці $(u_1, .., u_n)$.

Таким чином, $D(g) = \{(x_1, ..., x_n)\}$ □

Із отриманого твердження за допомогою методу математичної індукції очевидно випливає наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, та для $1 \leq i \neq j \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_i, x_j)\}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$.*

Також розглянемо наступне допоміжне твердження.

Твердження 5. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$, такі, що не існує нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Тоді*

(a) $x_1, ...x_n$ є P-фільтрами;

(b) $x_1, .., x_n$ попарно не є майже когерентними.

Доведення. Припустимо, що умова (a) не виконується, тобто хоча б одне x_i не є P-фільтром. Тоді візьмемо довільний інший фільтр x_j. З теореми 5.3.1 [11] випливає, що існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$.

Якщо ж виконується умова (a), а умова (b) не виконується, тобто всі $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами, і ми можемо вибрати x_i, x_j такі, що x_i, x_j є майже когерентними. Тоді згідно із теоремою 5.3.1 [11] існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$.

Отже, в будь-якому випадку ми можемо обрати різні i та $_j$ такі, що існує нарізно неперервна функція $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ із $D(g) = \{(x_i, x_j)\}$. Тоді із твердження 4 отримуємо, що існує $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$. Отримали суперечність із умовою теореми, отже, умови (a) та (b) виконуються. $\square$

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на існування нарізно неперервної функції із одноточковою множиною розривів для просторів $\mathbb{N}_{x_i}$.

Теорема 2. *Нехай $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$, $X_i = \mathbb{N}_{x_i}$ для кожного $i \leq n$. Тоді наступні умови рівносильні:*
(i) існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$;
(ii) хоча б один з фільтрів $x_1, ..., x_n$ не є P-фільтром або існують два фільтри, які є майже когерентними.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що (ii) не виконується. Тоді, зокрема $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами. Тоді згідно із теоремою 1 із $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два фільтри, які є майже когерентними. Отримали суперечність із нашим припущенням, і, отже, умова (ii) виконується.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Припустимо, що (i) не виконується. Тоді згідно із твердженням 5 $x_1, ..., x_n$ є P-фільтрами, які не є майже когерентними. А це суперечить умові (ii). Отже, наше припущення невірне і умова (i) виконується. $\square$

4 Випадок цілком регулярних просторів

Як у попередньому розділі, спочатку розглянемо твердження, яке для цілком регулярних просторів показує можливість побудови нарізно неперервної функції n змінних, якщо існує нарізно неперервна функція $n - 1$ змінних.

Твердження 6. *Нехай $k \geq 2$, $X = \prod\limits_{i=1}^{k} X_i, Y$ – цілком регулярні простори, $x_0 = (x_{10}, ..., x_{k0})$ – G_δ-точка у просторі X, y_0 – неізольована G_δ-точка у просторі Y та існує нарізно неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$ така, що $D(g) = \{x_0\}$.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.

Доведення. Оскільки x_0, y_0 є G_δ-точками у відповідних цілком регулярних просторах, то згідно із твердженням 5.3.7 [11] існують неперервні функції $\varphi : X \to [0, 1], \psi : Y \to [0, 1]$ такі, що $\{x_0\} = \varphi^{-1}(0), \{y_0\} = \psi^{-1}(0)$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини $U_n = \varphi^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right), V_n = \varphi^{-1}\left([0, \frac{1}{n}]\right)$. Оскільки φ неперервна, то U_n – відкрита множина і V_n – замкнена множина для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Виходячи із того, що φ неперервна і того, як ми обирали U_n, V_n, легко побачити, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $\varphi_n : X \to [0, 1]$ така, що $\varphi_n(X \setminus U_n) = \{0\}$ і $\varphi_n(V_{n+1}) = \{1\}$. Тоді розглянемо функцію $g_n : X \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$g_n(x) = \varphi_n(x)g(x_0) + (1 - \varphi_n(x))g(x).$$

Тоді

$$g_n|_{V_{n+1}} = g(x_0), g_n|_{X \setminus U_n} = g(x).$$

Крім того, g_n неперервна на $X \setminus \{x_0\}$, як сума неперервних, і неперервна в точці x_0, оскільки є сталою на околі цієї точки.

Тепер для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини $G_n = \psi^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right), F_n = \psi^{-1}\left([0, \frac{1}{n}]\right)$, які відповідно є функціонально відкритими і функціонально замкненими у Y. Також для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $\alpha_n : Y \to [0, 1]$ така, що

$$\alpha_n|_{F_{n+1}} = 1, \alpha_n|_{Y \setminus G_n} = 0.$$

Також покладемо $G_0 = Y$ і $\alpha_0 : Y \to [0, 1]$: $\alpha_0(y) = 1$.

Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 - \alpha_n(y))g_n(x) + \alpha_n(y)g_{n+1}(x) & , y \in G_n \setminus G_{n+1}, \\ g(x) & , y = y_0. \end{cases}$$

Покажемо, що f шукана. Нехай $(x', y') \in X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Покажемо, що тоді f неперервна в точці (x', y').

Нехай $y' \neq y_0$. Тоді існує такий номер $n \geq 0$, що $y' \in G_n \setminus F_{n+2}$. Оскільки $\alpha_{n+1}(y) = 0$ для довільного $y \in G_n \setminus G_{n+1}$ і $\alpha_n(y) = 1$ для довільного $y \in G_{n+1} \setminus G_{n+2}$, то нескладно отримати, що

$$f(x, y) = (1 - \alpha_n(y))g_n(x) + (\alpha_n(y) - \alpha_{n+1}(y))g_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}(y)g_{n+2}(x)$$

для довільного $(x, y) \in X \times (G_n \setminus F_{n+2})$. Отримали, що f неперервна на відкритому околі $X \times (G_n \setminus F_{n+2})$ точки (x', y') як сума неперервних. Отже, в даному випадку f неперервна в точці (x', y').

Тепер нехай $y' = y_0$ і $x' \neq x_0$. Візьмемо найменший номер n такий, що $x' \in X \setminus V_n$, причому множина $X \setminus V_n$ відкрита і є околом точки x'. Для кожного $m \geq n$ і $x \in X \setminus V_n$ маємо, що $g_m(x) = g(x)$. Тоді $f(x, y) = g(x)$ для довільної точки $(x, y) \in (X \setminus V_n) \times G_n$. Оскільки $D(g) = \{x_0\}$, то f неперервна на околі $(X \setminus V_n) \times G_n$ точки (x', y') і тому f неперервна в (x', y').

Отже, f неперервна функція у кожній точці $(x', y') \in X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Покажемо, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$. Оскільки $D(g) = \{x_0\}$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного окола U точки x_0 існує точка x така, що $|g(x) - g(x_0)| > \varepsilon$. Існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in U_n$

і $g_n(x) = g(x)$. Нехай V – довільний окіл точки y_0. Візьмемо $y \in V \cup G_n$. Враховуючи вибір номера n маємо, що $f(x, y) = g(x)$ і тоді

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |g(x) - g(x_0)| > \varepsilon.$$

Отже, f розривна у точці (x_0, y_0).

Залишилось показати, що f нарізно неперервна. Достатньо перевірити, що f неперервна відносно кожної змінної в точці (x_0, y_0). Оскільки $f(x, y_0) = g(x)$ для кожної точки $x \in X$ і функція g нарізно неперервна, то функція f неперервна відносно кожної змінної x_i в точці (x_0, y_0). Крім того, $f(x_0, y) = g(x_0)$ для кожного $y \in Y$. Тому f неперервна відносно y в точці (x_0, y_0). □

Індукцією відносно кількості змінних одержуємо наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} – неізольована G_δ-точка у просторі X_i, та для $1 \leq k < m \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_k \times X_m \to \mathbb{R}$ така, що $D(g) = \{(x_{k0}, x_{m0})\}$.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Тепер розглянемо теорему, яка дає достатні умови на існування нарізно неперервної функції із одноточковою множиною розривів.

Теорема 3. *Нехай $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} неізольована G_δ-точка у просторі X_i для кожного $i \leq n$, і для довільних n P-фільтрів з $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентними.*

Тоді існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Доведення. Згідно із твердженням 5.3.7 [11] для кожного $i \leq n$ існує неперервна функція $\varphi_i : X_i \to [0, 1]$ така, що $\{x_{i0}\} = \varphi_i^{-1}(0)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли існує хоча б один номер i такий, що для довільного окілу U_i точки x_{i0} множина $\varphi_i(U_i)$ є околом 0 в $[0, 1]$. Візьмемо $j \neq i$ і розглянемо функцію $g : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$, визначену наступним чином

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{2\varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j)}{\varphi_i^2(x_i) + \varphi_j^2(x_j)} & , (x_i, x_j) \neq (x_{i0}, x_{j0}), \\ 0 & , (x_i, x_j) = (x_{i0}, x_{j0}). \end{cases}$$

Доволі легко зрозуміти, що g є нарізно неперервною функцією із $D(g) = \{(x_{i0}, x_{j0})\}$. Тоді згідно із твердженням 7 маємо, що існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Тепер розглянемо випадок, коли не існує такого i, що для довільного околу U_i точки x_{i0} множина $\varphi_i(U_i)$ є околом 0 в $[0, 1]$, тобто для кожного $1 \leq i \leq n$ існує відкритий окіл U_{i0} точки x_{i0} такий, що $\varphi_i(U_{i0})$ не є околом нуля в $[0, 1]$. Тоді згідно із лемою 5.3.9 [11] для кожного $1 \leq i \leq n$ існує спадна послідовність $(F_{im})_{m=1}^{\infty}$ відкрито-замкнених множин F_{im} в просторі U_{i0} така, що $F_{i1} = U_{i0}$ і $\{x_{i0}\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_{im}$ причому, оскільки x_{i0} не є ізольованою, то послідовність можна обрати строго спадною.

Тепер для кожного $1 \leq i \leq n$ розглянемо сюр'єктивне відображення $\psi_i : U_{i0} \setminus \{x_{i0}\} \to \mathbb{N}$, означене формулою: $\psi_i(F_{im} \setminus F_{i,m+1}) = \{m\}$. Також для кожного $1 \leq i \leq n$ розглянемо системи $u_i = \{\psi_i(U \setminus \{x_{i0}\}) : U-$ окіл точки $x_{i0}\}$, які утворюють фільтри із $\mathcal{F}$.

Для кожного $1 \leq i \leq n$ довизначимо відображення ψ_i наступним чином: $\psi_i(x_{i0}) = u_i$. Отримали відображення $\psi_i : U_{i0} \to \mathbb{N}_{u_i}$, яке за побудовою неперервне в точці x_{i0}. Крім того, оскільки $F_{im} \setminus F_{i,m+1}$ відкрито замкнені, то відображення ψ_i неперервне у всіх точках множини $U_{i0} \setminus \{x_{i0}\}$.

Згідно із умовою для довільних n P-фільтрів із $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентні. Тому згідно із теоремою 2 існує нарізно неперервна функція $s : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{u_i} \to \mathbb{R}$ така, що $D(s) = \{(u_1, ..., u_n)\}$.

Розглянемо функцію $\varphi_0 : \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0} \to [0,1]$, означену наступним чином

$$\varphi_0(x_1, ..., x_n) = s(\psi_1(x_1), ..., \psi_n(x_n)).$$

Оскільки функція s є нарізно неперервною, то φ_0 також є нарізно неперервною. Крім того, φ_0 неперервна в кожній точці множини $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}\right) \setminus \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$ як композиція неперервних функцій.

Разом із тим, для кожного $1 \leq i \leq n$ для довільного околу U_i точки x_{i0} множина $\psi_i(U_i)$ є околом точки u_i в просторі $\mathbb{N}_{u_i}$. Звідси маємо, що

$$\omega_{\varphi_0}\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right) = \omega_s\left(\prod_{i=1}^{n} \psi_i(U_i)\right) \geq \omega_s(u_1, ..., u_n)$$

.

Тому φ_0 розривна в точці $(x_{10}, ..., x_{n0})$ і $D(\varphi_0) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$.

Використовуючи цілковиту регулярність простору $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, виберемо неперервну функцію $\theta : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to [0,1]$ таку, що $\theta(x_{10}, ..., x_{n0}) = 1$ і $\theta(x_1, ..., x_n) = 0$, якщо $(x_1, ..., x_n) \notin \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}$.

Тепер розглянемо функцію $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \theta(x_1, ..., x_n)\varphi_0(x_1, ..., x_n) & , (x_1, ..., x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}, \\ 0 & , (x_1, ..., x_n) \notin \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}. \end{cases}$$

Згідно із твердженням 5.3.10 [11] $D(f) = D(\varphi_0) \cap \prod\limits_{i=1}^{n} U_{i0}$, а, отже, функція f є нарізно неперервною і $D(f) = \{(x_{i0}, ..., x_{n0})\}$. Тобто f шукана функція. □

Із теорем 2 і 3 отримуємо теорему, яка є основним результатом.

Теорема 4. *Для кожного натурального $n \geq 2$ наступні умови рівносильні:*
(i) для довільних цілком регулярних просторів $X_1, ..., X_n$ з неізольованими G_δ-точками x_{i0} у відповідних просторах X_i існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$;
(ii) для довільних n P-фільтрів з $\mathcal{F}$ існують два, які є майже когерентними.

Список літератури

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. 1899, ser. 3. (3), 105-126.
2. Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*, General topology in Banach spaces. 2001, 147-169.
3. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V *Characterization of sets of discontinuity points of separately continuous functions of several variables on products of metrizable spaces*, . Ukrainian Math. J. 2000, **52** (6), 740-747. doi:10.1007/BF02591779 (In Ukrainian).
4. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Separately continuous functions of many variables on product spaces which are products of metrizable multipliers*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2004, **1**, 77-84. doi:10.48550/arXiv.1512.08606 (In Ukrainian).
5. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Inverse problems in the theory of separately continuous images* Ukrainian Math. J. 1992, **44** (9), 1209-1220. doi:10.1007/BF01058371 (In Ukrainian).
6. Mykhaylyuk V.V. *One-point discontinuities of separately continuous functions on the product of two compact spaces*, Ukrainian Math. J. 2005, **57** (1), 94-101. (In Ukrainian)
7. Kozlovskyi, M. *One-point discontinuity of separately continuous functions of several variables on a product of compact spaces*, Proceedings of the International Geometry Center 2023, **16** (2), 105-115. doi:10.15673/pigc.v16i2.2451 (In Ukrainian).
8. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. Investigations on separately continuous mapppings. Proc. of the Intern. Sci. Conf Dedicated to Hans Hahn memory, Chernivtsi, Ukraine, Ruta Chernivtsi, 1995, 192-246. (In Ukrainian)
9. T. O. Banakh. O. V. Maslyuchenko. V. V. Mykhaylyuk. *Discontinuous Separately Continuous Functions and Near Coherence of P-Filters.* Real Anal. Exchange 2007, **32** (2) 335 - 348.
10. Kozlovskyi, M. *Discontinuous strongly separately continuous function of several variable and near coherence of two P-filters*, Carpathian Mathematical Publications (Accepted to publish)
11. Mykhaylyuk V.V. Set of discontinuity points of separately continuous functions for two variables: monograph, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021, 156 c. (In Ukrainian).

Надійшло 06.09.2024

Kozlovskyi M.R. *Characterization of one-point set of discontinuous of separately continuous functions of several variable*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 63–73.

Investigations of the discontinuity points set of separately continuous functions of two or many variables (i.e. functions that are continuous with respect to each variable) were started in Rene Baire's dissertation [1] and these investigations have been continued and developed by many mathematicians. Investigations of separately continuous functions and their analogs with one-point set of points of discontinuity are of particular interest. It was proved in [9] that the

existence of separately continuous functions with given one-point set of points of discontinuity of G_δ type is closely related to the properties of P-filter, and the answer to this question is independent of ZFC. It was proved in the [10] that the existence of a strongly separately continuous function $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{R}$ on the product of arbitrary completely regular spaces X_k with an one-point set $\{(x_1, ..., x_n)\}$ of points of discontinuity where x_k is non-isolated G_δ-point in X_k, is equivalent to NCPF (Near Coherence of P-filters). Strongly separately continuous function of n variables is a function that for any fixed one variable is continuous with respect to other variables. It is clear that for the function of two variables strong separate continuity is equivalent to the separate continuity. In general each strongly separately continuous functions is separately continuous. But the existence of strongly separately continuous function is stronger than the existence of separately continuous function. In this paper we consider question what is necessity and sufficiency for existence a separately continuous function on the product of arbitrary completely regular spaces X_k with an one-point set $\{(x_1, ..., x_n)\}$ of points of discontinuity where x_k is non-isolated G_δ-point in X_k. First we prove that for We prove that the existence of such function is equivalent to the fact that for any n P-filters there exist two that are near coherent.