Пасічник Г. С.

РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

Основним об'єктом дослідження є інтегральні рівняння другого роду, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова. Рівняння може містити також виродження на початковій гіперплощині. Коефіцієнти цього рівняння є обмеженими в групі старших і зростаючими функціями в групі молодших членів. Розглянені класи ядер інтегральних рівнянь дозволяють в оцінці резольвенти зберегти функцію, яка присутня в оцінках ядер визначає ріст коефіцієнтів параболічного рівняння.

Ключові слова і фрази: інтегральне рівняння другого роду, резольвента, вироджене рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
e-mail: *pasichnyk.gs@gmail.com*

Вступ

Важливим поняттям для параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші, детальна інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть крайових задач. Фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно з методом Леві шукається у вигляді суми фундаментального розв'язку задачі Коші для деякого рівняння та об'ємного потенціалу, породженого добутком цього фундаментального розв'язку та невідомої функції φ. При цьому невідома функція φ є резольвентою інтегрального рівняння другого роду.

У [1, 2, 3] навелено класи ядер, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для загальних параболічних за І.Г. Петровським і за С.Д. Ейдельманом рівнянь з обмеженими та зростаючими в групі молодших членів при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами. В [3] також наводяться леми про резольвенту інтегрального рівняння, які використовувались в [3, 4, 5] для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з обмеженими і незалежними від змінних виродження коефіцієнтами.

У цій статті наводиться клас ядер, які виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які можуть зростати при $|x| \to \infty$.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 45B05, 35A08.

1 Постановка задачі

Нехай $\Pi_{[t_0,T]} := [t_0,T]\times\mathbb{R}^n$, $t_0\in[0,T]$, $T>0$ і $P^{\delta_1}_{[t_0,T]} := \{(t,x;\tau,\xi)\in(\Pi_{[t_0,T]}\times\Pi_{[t_0,T]})|\, t-\tau>\delta_1\}$, $\delta_1>0$. Розглядаються інтегральні рівняння вигляду

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{1}$$

і для неперервної на $[0,T]$ функції $\alpha>0$

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{2}$$

ядрами яких є неперервна функція K. Відомо, що при відповідних умовах на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (1) та (2) для довільної допустимої функції f і він визначається відповідно формулою

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}R(t,x;\theta,y)\,f(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{3}$$

та

$$u(t,x)=f(t,x)+\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}R(t,x;\theta,y)\,f(\theta,y)\,dy,\quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{4}$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,x;\tau,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}, \tag{5}$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\geq 2$ відповідно

$$K_m(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}, \tag{6}$$

та

$$K_m(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}, \tag{7}$$

При дослідження виродженого рівняння Колмогорова з коефіцієнтами, які зростають при $|x|\to\infty$ залежно від росту деякої зростаючої функції виникає питання збереження в оцінках ядер K_m цієї функції.

Для нище визначених класів ядер ряд (5) збігається абсолютно і рівномірно в $P^{\delta_1}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta_1\in(0,T-t_0)$. Тому існує резольвента (5) рівняння (1) або (2) і розв'язок відповідного рівняння визначається відповідно формулою (3) або (4) відповідно.

2 Основний результат

Нехай n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2$; $M := n_1/2 + 3n_2/2$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Будемо використовувати позначення: $x_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1'' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + tx_1'$.

Використовуватимемо оцінні функції

$$E_c(t, x, \xi) = E_c^1(t, x_1 - \xi_1)\, E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2) = \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t) - \xi_1|^2}{t} + \frac{|X_2(t) - \xi_2|^2}{t^3}\Big)\Big\},$$
$$t > 0,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Зазначимо, що функцій E_c володіють такими властивостями [3]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t, x, \xi) d\xi = C, \tag{8}$$

$$\forall\, \delta \in (0, 1)\ \ \exists\, C_\delta\ \ \forall\, \{t, \theta, \tau\} \subset \mathbb{R},\ t_0 \le \tau < \theta < t \le T,\ \ \forall\, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi)\Big((t - \theta)(\theta - \tau)\Big)^{-M} dy \le C_\delta (t - \tau)^{-M} E_{c(1-\delta)/4}(t - \tau, x, \xi). \tag{9}$$

Відомі [3] результати про ряд (5), коли, наприклад,

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \le C_1 (t - \tau)^{-M-1+\chi} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0, T]}, \tag{10}$$

де $\chi \in (0; 1)$. Такі ядра виникають при побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з обмеженими і зростаючими гладкими коефіцієнтами.

Нехай неперервна функція $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x_1) \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$;

2) $\exists\, C > 0\ \forall\, \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ |x_1 - y_1| \le 1 :\ D(x_1) \le CD(y_1)$.

Теорема 1. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \le C_1 (t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0, T]}, \tag{11}$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t, x; \tau, \xi)| \le C(t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp\{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} E_{2c}(t - \tau, x, \xi) +$$
$$+ C(D(\xi_1))^{-l} E_c^1(t - \tau, x_1 - \xi_1) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\hat{C}\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t - \tau)^{\lambda/2}\Big)^k \Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2} + 1)\Big)^{-1} E_{cq^k}(t - \tau, x, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0, T]}, \tag{12}$$

де C, $\hat{C}$ і c – еякі додатні сталі, $c < c_1$, Γ – гама-функція Ейлера, $q = 1/4$.

Доведення. Оцінимо ядра K_m, $m \geq 2$. Спробуємо зберегти в оцінках ядер K_m характеристику дисипації. Маємо

$$K_2(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy_1 +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy_1 \equiv L_1 + L_2, \quad (13)$$

де $Q(\xi_1,1) := \{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \Big| |\xi_1 - y_1| \leq 1\}$ Використавши оцінку (11), умову 2) на функцію D та нерівність (9), одержимо

$$|L_1| \leq C_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{\lambda/2-1} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)\times$$
$$\times \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{-M} dy\, \exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\} \leq C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\times$$
$$\times (t-\tau)^{-M+\lambda-1} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$t_0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

де $0 < c_2 < c_1$, $C_2(\delta) > 0$, δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$, $\mathcal{B}$ – бета-функція Ейлера. Для оцінювання L_2 скористаємося такою оцінкою:

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_{1l}(D(\xi_1))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi),$$
$$t_0 \leq \tau < \theta \leq T, \quad \xi \subset \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus Q(\xi_1,1), \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad (15)$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Якщо $\theta - \tau \geq 1$, то оцінка (15) випливає відразу з (11):

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_1 E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_1(D(\xi_1))^2\} \leq$$
$$\leq C_l E_{c_1}(\theta-\tau,y,\xi)(D(\xi_1))^{-l}.$$

У випадку, коли $\theta - \tau < 1$, за допомогою оцінки (11) і того, що $|y_1 - \xi_1| > 1$, маємо

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)| \leq C_l(D(\xi))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi)\Big((\theta-\tau)^{-M-1+(\lambda-l)/2}\exp\{-c_1\delta(\theta-\tau)^{-1}\}\Big) \leq$$
$$\leq C_l(D(\xi))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}(\theta-\tau,y,\xi).$$

З оцінок (11) і (15), рівності (8) та нерівності

$$E_c(t-\theta,x,y)\,E_c(\theta-\tau,y,\xi) \leq E_{c/4}(t-\tau,x,\xi), \quad \tau < \theta < t, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

одержимо

$$|L_2| \leq C_1 C_{1l}(D(\xi_1))^{-l} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi) \int\limits_{\tau}^{t} (t-\theta)^{\lambda/2-1} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\theta)^{-M}\times$$
$$\times E_{c_1\delta}(t-\theta,x,y)dy \leq C_{2l}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{\lambda/2} E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi),$$
$$t_0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

З (13) та оцінок (14) і (17) випливає оцінка

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \leq \Big(C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+\lambda}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+$$

$$+C_{2l}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(t-\tau)^{\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)E_{c_1(1-\delta)/4}(t-\tau,x,\xi),\ t_0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \quad (18)$$

Оцінимо K_3. За допомогою формули (6) запишемо

$$K_3(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_\tau^t d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K_2(\theta,y;\tau,\xi)dy_1+$$

$$+\int\limits_\tau^t d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1)} K(t,x;\theta,y)K_2(\theta,y;\tau,\xi)dy_1. \quad (19)$$

Для одержання оцінки першого доданка K_3 оцінимо окремо за допомогою оцінок (11), (18) та нерівностей (8), (9) і (16) інтеграли

$$\int\limits_\tau^t d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{Q(\xi_1,1)} (t-\theta)^{-M-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda}E_{c_1}(t-\theta,x,y)\times$$

$$\times E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2-c_2(\theta-\tau)(D(\xi_1))^2\}dy_1 \leq$$

$$\leq C(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}, \quad (20)$$

і

$$\int\limits_\tau^t d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} dy_2 \int\limits_{Q(\xi_1,1)} (t-\theta)^{-M-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{\lambda/2}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)dy_1 \leq$$

$$\leq C\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}+1)(t-\tau)^{\lambda}E_{c_1(1-\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi), \quad (21)$$

$$t_0\leq\tau<t\leq T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Так само, як була одержана оцінка (15), маємо

$$C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(\theta-\tau)^{-M-1+\lambda}E_{c_1(1-\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)\exp\{-c_2(\theta-\tau)(D(\xi_1))^2\} \leq$$

$$\leq C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(D(\xi))^{-l}(\theta-\tau)^{\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi),$$

$$t_0\leq\tau<\theta\leq T, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad y_1\in\mathbb{R}^{n_1}\setminus Q(\xi_1,1), \quad y_2\in\mathbb{R}^{n_2}. \quad (22)$$

Тоді з (19), використовуючи оцінки (11), (18), (20)–(22), одержуємо

$$|K_3(t,x;\tau,\xi)| \leq C_3(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}E_{c_1(1-2\delta)/4}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+C_1C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{\lambda}\times$$

$$\times E_{c_1(1-\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi)+C_1C_{2l}(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})(D(\xi_1))^{-l}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\theta)^{-1+\lambda/2}(\theta-\tau)^{\lambda/2}d\theta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q(\xi_1,1)}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{c(1-2\delta)/4}(\theta-\tau,y,\xi)(t-\theta)^{-M}\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy\le$$

$$\le\Big(C_3(\delta)(t-\tau)^{-M-1+3\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+C_{3l}(\delta)(t-\tau)^{\lambda}(D(\xi_1))^{-l}\Big)\times$$

$$\times\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{2\lambda}{2})E_{c_1(1-2\delta)/4^2}(t-\tau,x,\xi),\quad t_0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Тут було використано властивість

$$\mathcal{B}\Big(\frac{\lambda}{2},\frac{k\lambda}{2}+1\Big)\le\mathcal{B}\Big(\frac{\lambda}{2},\frac{(k+1)\lambda}{2}\Big)=\mathcal{B}\Big(\frac{(k+1)\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\Big),\ \ k\ge 0.$$

Методом математичної індукції доводиться оцінка

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)|\le C_{ml}(\delta)\prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2})E_{c_1(1-(m-1)\delta)/4^{m-1}}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\Big((t-\tau)^{-M-1+m\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+(t-\tau)^{(m-1)\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big),$$

$$t_0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad m\ge 2. \tag{23}$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $M+1+(l-m_0\lambda)/2\le 0$. Тоді з (23) матимемо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)|\le C_{m_0l}(\delta)(D(\xi_1))^{-l}E_{c_1(1-(m_0-1)\delta)/4^{m_0-1}}(t-\tau,x,\xi).$$

Візьмемо $\delta_0\in(0,1/2)$ і покладемо $\delta\equiv\delta_0/(m_0-1)$, $2c\equiv c_1(1-\delta_0)/4^{m_0-1}$, $C_*\equiv C_{m_0l}(\delta)$. Тоді одержимо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)|\le C_*(D(\xi_1))^{-l}E_{2c}(t-\tau,x,\xi),\quad t_0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{24}$$

Щоб оцінити ядра K_m з $m>m_0$, спочатку за допомогою (11), (24) та нерівностей [3]

$$E_{2c}(t-\tau,x,\xi)\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\,E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{25}$$

$$E_c^1(t-\theta,x_1-y_1)E_c^1(\theta-\tau,y_1-\xi_1)\le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \tag{26}$$

$$E_c(t-\theta,x,y)E_{c/4^{j-1}}(\theta-\tau,y,\xi)\le E_{c/4^j}(t-\tau,x,\xi),\ \ j\ge 1, \tag{27}$$

маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)|\le C_1C_*(D(\xi))^{-l}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\theta)^{-1+\lambda/2}d\theta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t-\theta,x,y)E_{2c}(\theta-\tau,y,\xi)(t-\theta)^{-M}\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy\le$$

$$\le C_1C_*L\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},1)(D(\xi_1))^{-l}E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)(t-\tau)^{\lambda/2}E_{c/4}(t-\tau,x,\xi),$$

$$t_0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{28}$$

де
$$L := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-(c_1-2c)(|\eta_1|^2)+|\eta_2|^2)\}.$$
Далі, нехай для деякого $k>1$ виконується оцінка
$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \le (C_1L)^k C_* \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{k\lambda/2}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi), \quad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{29}$$
Тоді з (11), (29) і (25)–(27) одержуємо
$$|K_{m_0+k+1}(t,x;\tau,\xi)| \le C_1(C_1L)^k C_* \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}\times$$
$$\times \int\limits_{\tau}^{t}(t-\theta)^{\lambda(2-1}(\theta-\tau)^{k\lambda/2}d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\theta)^{-M}E_{c_1-2c}(t-\theta,x,y)\times$$
$$\times\Big(E_c^1(t-\theta,x_1-y_1)\,E_c(t-\theta,x,y)\Big)E_c^1(\theta-\tau,y_1-\xi_1)E_{c/4^k}(\theta-\tau,y,\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c_1(t-\theta)(D(y_1))^2\}dy \le$$
$$\le (C_1L)^{k+1}C_* \prod_{j=0}^{k} \mathcal{B}(\frac{\lambda}{2},\frac{j\lambda}{2}+1)(D(\xi_1))^{-l}(t-\tau)^{(k+1)\lambda/2}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^{(k+1)}}(t-\tau,x,\xi), \qquad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$
Отже, оцінка (29) справджується для довільного $k\ge 1$ і, скориставшись формулою зв'язку бета-функції з гама-функцією, одержимо
$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \le C_*\Big(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}(D(\xi_1))^{-l}\times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi), \qquad t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (5) мажорується збіжним рядом
$$\hat{C}_0\Big(\sum_{m=1}^{m_0}(t-\tau)^{-M-1+m\lambda/2}\exp\{-c_2(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}+$$
$$+\sum_{m=2}^{m_0}(t-\tau)^{(m-1)\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)E_{2c}(t-\tau,x,\xi)+\hat{C}_0E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\Big(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2})(t-\tau)^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}(D(\xi_1))^{-l}E_{c/4^k}(t-\tau,x,\xi),$$
$$t_0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

Отже, ряд (5) при t, τ, x, ξ, таких, що $0<\delta_1\le t-\tau\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, де δ_1 – довільна досить мала додатна стала, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми правильна оцінка (12).

□

Розглянемо випадок трьох груп просторових змінних. Нехай $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ $n := n_1+n_2+n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, ..., x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, ..., x_{2n_2})$; $M := n_1/2 + 3n_2/2 + 5n_3/2$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) = x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2x_1'$. Виклристовуватимемо оцінні функції

$$\bar{E}_c(t,x,\xi) = E_c^1(t, x_1 - \xi_1)\, E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2) E_c^3(t, X_3(t) - \xi_3) =$$
$$= \exp\Big\{-c\Big(\frac{|X_1(t)-\xi_1|^2}{t} + \frac{|X_2(t)-\xi_2|^2}{t^3} + \frac{|X_3(t)-\xi_3|^2}{t^5}\Big)\Big\}, \quad t > 0, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1(t-\tau))^{-M-1+\lambda/2} \bar{E}_{c_1}(t-\tau,x,\xi) \exp\{-c_1(t-\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ *та функцією* D, *яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка* (12), *в якій* E_c *замінена на* $\bar{E}_c$, *а* $q = 1/8$.

Доведення. Використовуються інтеграли

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \bar{E}_c(t,x,\xi) d\xi = C,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{E}_c(t-\theta,x,y) \bar{E}_c(\theta-\tau,y,\xi) \Big((t-\theta)(\theta-\tau)\Big)^{-M} dy \leq C_\delta (t-\tau)^{-M} \bar{E}_{c(1-\delta)/8}(t-\tau,x,\xi).$$

а замість (16) –

$$\bar{E}_c(t-\theta,x,y)\, \bar{E}_c(\theta-\tau,y,\xi) \leq \bar{E}_{c/8}(t-\tau,x,\xi), \quad \tau < \theta < t, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n,$$

□

Нехай α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна,

$$A(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad B(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta, \quad E_{c,d}(t,\tau;x,\xi) := \exp\{aA(t,\tau)\} \bar{E}_c(B(t,\tau),x,\xi),$$

Теорема 3. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2} E_{c_1,d}(B(t,\tau),x,\xi) \exp\{-c_1B(t,\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\Big(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}\exp\{-c(t-\tau)(D(\xi_1))^2\}E_{2c,d}(B(t,\tau),x,\xi)+$$
$$+C(D(\xi_1))^{-l}E_c^1(B(t,\tau),x_1-\xi_1)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\hat{C}\Gamma(\frac{\lambda}{2})(B(t,\tau))^{\lambda/2}\Big)^k\Big(\Gamma(\frac{k\lambda}{2}+1)\Big)^{-1}E_{c/8^k,d}(B(t,\tau),x,\xi)\Big),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

де C, $\hat{C}$ і $c <_1$ – еякі додатні сталі.

Розглянемо функцію

$$F_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{-c\Big(\frac{|x_1-\xi_1|^2}{4t}+\frac{3|x_2+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2}{t^3}+$$
$$+\frac{180|x_3+2^{-1}t(x_2'+\xi_2')+(12)^{-1}t^2(x_1'-\xi_1')-\xi_3|^2}{t^5}\Big)\Big\},\quad t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Функція $F_c(t-\tau,x,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є з точністю до сталого множника фундаментальним розв'язком для модельного рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами. Аналогічно функція

$$F_{c,d}((t,\tau,x,\xi) = F_c(B(t,\tau),x,\xi)\exp\{aA(t,\tau)\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

є з точністю до сталого множника фундаментальним розв'язком модельного рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами та виродженням на початковій гіперплощині.

Теорема 4. *Якщо ядро неперервне і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}F_{c_1,d}((t,\tau,x,\xi)\exp\{-c_1B(t,\tau)(D(\xi_1))^2\},$$
$$(t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\lambda \in (0,1)$ та функцією D, яка задовольняє умови 1) і 2), то існує резольвента, яка є неперервною функцією і для неї справджується оцінка

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C\Big((B(t,\tau))^{-M-1+\lambda/2}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi_1))^2\}+(B(t,\tau))^{\lambda/2}(D(\xi_1))^{-l}\Big)\times$$
$$\times F_{c,d}(t,\tau,x,\xi),\quad (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}.$$

Доведення. Використовуються інтеграли

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_c(B(t,\theta),x,y)F_c(B(\theta,\tau),y,\xi)\Big(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\Big)^{-M}dy =$$

$$= C(B(t-\tau))^{-M}F_c(B(t,\tau),x,\xi),$$

$$\int_{\tau}^{t}(B(t,\theta))^{-1+a}(B(\theta,\tau))^{-1+b}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta = \mathcal{B}(a,b)(B(t,\tau))^{a+b-1},\ \ a>0,\ \ b>0,$$

та властивості F_c як фундаментального розв'язку модельного рівняння. □

3 Висновки

Наводені класи ядер інтегральних рівнянь дозволяють в оцінці резольвенти зберегти зростаючу функцію D. Це важливо при реалізації методу Леві побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для вироджених рінянь Колмогорова з гельдеровими коефіцієнтами, незалежних від змінних виродження, і зростаючими, не швидше функції D. При цьому рівняння може містити ще виродження на початковій гіперплощині $t = 0$.

Список літератури

[1] Eidelman S. D. Parabolic systems. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[2] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *On fundamental matrix of solutions of Cauchy problem for dissipative $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with the degeneration on the initial hyperplane.* Dop. NAN Ukr. 1999. (6), 18–22. (in Ukrainian)

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**).

[4] Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. *The classical fundamental solution of a degenerate Kolmogorov's equation with coefficients indepedent on variables of degeneration.* Bukovinian. Mat. J. 2014. **2** (2–3), 94–106.(in Ukrainian)

[5] Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I. *Fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane.* Visnyk of the Lviv university. Ser. mechan. and math. 2019. **88**, 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127. (in Ukrainian)

Надійшло 01.09.2024

Pasichnyk H. S. *Solutions of some integral equations of the second kind*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 84–93.

The article examines the solutions of some integral equations of the second kind. Such equations arise when using Levi's method to construct a fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate equation of the Kolmogorov type. The equation may also contain a degeneracy on the initial hyperplane. The coefficients of this equation are bounded in the group of principal terms and ones are increasing functions in the group of lowest terms. The considered classes of kernels of integral equations make it possible to preserve the function that determines the growth of the coefficients of the parabolic equation when evaluating the resolvent. In the evalutions of the kernels of integral equations, there are evaluation functions that arise when constructing the corresponding fundamental solution, and fundamental solution of the Cauchy problem of the model equation with constant coefficients.