Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 74–83 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 74–83

Маценко В.Г.

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ СКЕЛЛАМА ІЗ ЖОРСТКОЮ СТРАТЕГІЄЮ ЗБОРУ ВРОЖАЮ

Розглянуто дискретні моделі Скеллама із жорсткою інтенсивністю збору врожаю. Досліджено існування стаціонарних і періодичних розв'язків та їх стійкість. Наведено комп'ютерні розрахунки розв'язків дискретних рівнянь.

Ключові слова і фрази: модель Скеллама, модель збору врожаю, стійкість стаціонарних розв'язів.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *v.matsenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Значна кількість математичних моделей в екології формулюється у вигляді дискретних рівнянь [1, 2, 3, 4, 5]. Зокрема, вони виникають при описі динаміки чисельності біологічних популяцій, у яких послідовні покоління не перекриваються (хоча можуть і перекриватися) і ріст їх чисельності відбувається в дискретні моменти часу (народжуваність має дискретний характер). До таких популяцій можна віднести багато видів комах з однорічною генерацією. Їх дорослі особини живуть недовго й до появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

У простішому випадку дискретні моделі задаються рівнянням вигляду

$$N_{t+1} = F(N_t),\ t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

де $F(\cdot)$ – гладка функція дійсного аргументу, яка відображає простір R^+ в R^+, $R^+ = [0, \infty)$.

Задача полягає в знаходженні розв'язку N_1, N_2, ... при заданому $N_0 > 0$. В аналітичному вигляді, як правило, не вдається знайти розв'язки рівняння (1). Проте можна відшуковувати стаціонарні та періодичні розв'язки і досліджувати їх на стійкість.

Серед таких рівнянь в екології найвідоміші дискретна логістична модель, модель Рікера, модель Скеллама та її узагальнення.

УДК 519.87:574.3

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D20, 34K06, 34K20.

У дискретних моделях знання про характер процесів вимирання й народжування виражається в єдиному популяційному показнику – коефіцієнті природного відтворення (або коефіцієнті розмноження)

$$f_t = \frac{N_{t+1}}{N_t},$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t, при цьому $F(N_t) = f_t \cdot N_t$.

Коефіцієнт природного відтворення чисельно дорівнює середній кількості потомків, яка припадає на одну особину, що існувала в момент часу t.

Якщо припустити, що вплив саморегулюючих внутріпопуляційних механізмів із ростом чисельності N_t тільки посилюється, то коефіцієнт розмноження f_t вибирають у вигляді монотонних функцій. У дискретній логістичній моделі коефіцієнт розмноження являє собою спадну лінійну функцію, в моделі Рікера – монотонно спадну експоненту. Ці моделі володіють досить різноманітним набором динамічних режимів. Окрім режимів із монотонною стабілізацією чисельності популяції можуть виникати циклічні й хаотичні режими [1, 5].

Якщо коефіцієнт розмноження вибрати у вигляді монотонно спадної гіперболічної функції, то одержуємо модель Скеллама. Модель Скеллама була запропонована в 1951 р. в праці [2] і відтоді широко використовується для опису динаміки чисельності популяцій із дискретною народжуваністю [3, 4].

Оскільки людина в своїй діяльності використовує різні природні ресурси, важливо, щоб експлуатація популяцій не призводила до їх знищення, а відбувалося відновлення природного ресурсу.

При жорсткій стратегії збору врожаю за одиницю часу відбирається постійна кількість особин або біомаси. Тоді рівняння, які описують динаміку популяцій з такою стратегією відбору, мають вигляд

$$N_{t+1} = F(N_t) - c(\alpha), \tag{2}$$

де $c(\alpha)$ – інтенсивність відбору, а параметр α характеризує цю інтенсивність.

Задача моделювання полягає в тому, щоб установити таку швидкість збору врожаю, яка буде підтримувати популяцію в стані приросту.

У [5] розглянута стратегія збору постійного врожаю для дискретної логістичної моделі та моделі Рікера. У цій праці вивчаються моделі збору врожаю в популяціях, динаміка чисельності яких описується рівняннями Скеллама. На початку наведемо необхідний аналіз моделі Скеллама та її узагальнень.

1 Аналітичний аналіз моделей Скеллама

Модель Скеллама має вигляд [2]

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t},\ a, b > 0,\ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Параметр a тут відіграє роль найбільшого значення коефіцієнта розмноження, а коефіцієнт b описує вплив саморегулюючих механізмів на популяційну динаміку.

Для рівняння (3) при $a < 1$ маємо лише тривіальний стаціонарний розв'язок $N_1^* = 0$, а при $a > 1$ з'являється ще й нетривіальний додатний розв'язок $N_2^* = (a-1)/b$.

За лінеаризацією в околі N^* встановлюємо умови стійкості. Для цього знайдемо мультиплікатор нерухомої точки динамічної системи з дискретним часом $\lambda = \left.\dfrac{dF}{dN}\right|_{N^*}$. Якщо $|\lambda| < 1$, то N^* – стійкий (асимптотично), якщо $|\lambda| > 1$, то – нестійкий.

Маємо
$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = a, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = \frac{1}{a}.$$
Тому при $a < 1$, $N_1^* = 0$ стійкий і популяція асимптотично вироджується, а при $a > 1$ нульовий розв'язок стає нестійким, проте стає стійким ненульовий розв'язок N_2^* і чисельність популяції прямує до деякого додатного значення (рис. 1).

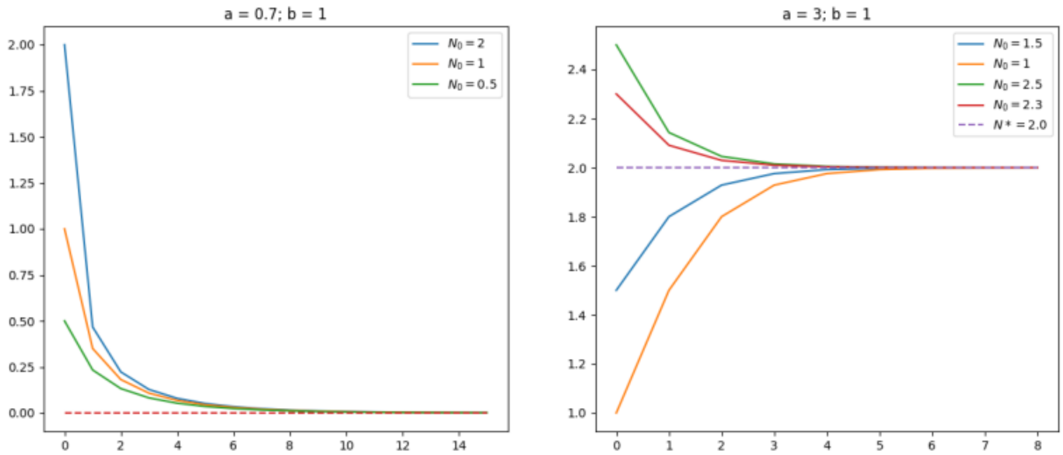

Рис. 1. Графіки розв'язків рівняння (3)

Періодичних розв'язків з періодом $T = 2$ не існує, оскільки з умови $N_{t+2} = N_t$ знаходимо $N_t = \dfrac{a-1}{b}$, що співпадає зі стаціонарним значенням N_2^*. А, отже, за теоремою Шарковського [6] не існує періодичних розв'язків і інших періодів.

Розглянемо ще деякі узагальнення моделі Скеллама. Модифікація моделі Скеллама, що враховує ефект Оллі [1], має вигляд
$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b^2 + N_t^2}, \ a, b > 0, \ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$
Тут коефіцієнт розмноження $N_t/(b^2 + N_t^2)$ є немонотонною функцією. Немонотонні залежності зустрічаються в популяціях з яскраво вираженою груповою поведінкою і взаємодопомогою, наприклад, у колоніях птахів і тварин, у яких існують групові форми захисту від нападу хижаків та сумісне народжування потомства. Тут при деяких значеннях N_t коефіцієнт розмноження зростає, а далі при зростанні N_t через нестачу ресурсів цей коефіцієнт спадає. Такий тип залежностей називається кривими Оллі.

Стаціонарні стани рівняння (4) знаходимо зі співвідношення $N = aN^2/(b^2 + N^2)$. Звідки одержуємо $N_1^* = 0$, $N_2^* = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $N_3^* = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Ненульові додатні точки спокою існують за умови $a > 2b$.

Якщо $a < 2b$, то маємо лише тривіальний стаціонарний стан $N_1^* = 0$. Мультиплікатор тривіальної точки $|\lambda| < 1$, тому нульовий розв'язок стійкий (рис. 2). Для нерухомої точки N_2^* маємо

$$0 < \lambda = \frac{2ab^2N_2^*}{(b^2+N_2^*)^2} = \frac{4b^2}{a\left(a+\sqrt{a^2-4b^2}\right)} < \frac{4b^2}{a^2} = \left(\frac{2b}{a}\right)^2 < 1,$$

що означає стійкість рівноваги N_2^* (рис. 2).

Для рівноваги N_3^* $\lambda > 1$, тобто наявна нестійкість розв'язку N_3^* (рис. 2).

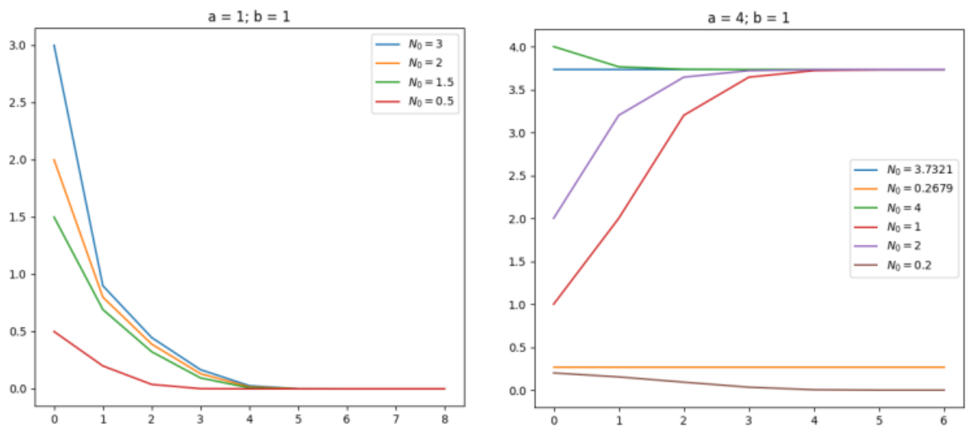

Рис. 2. Графіки розв'язків рівняння (4)

Наявність періодичних розв'язків у рівнянні (4) з періодом $T = 2$ (умова $N_{t+2} = N_t$) зводиться до аналізу існування додатних коренів рівняння

$$(a^2+b^2)N^2 + ab^2N + b^4 = 0,$$

яке не має дійсних коренів, оскільки дискримінант $D = -3b^4a^2 - 4b^2 < 0$.

Отже, рівняння (4) не має періодичних розв'язків із періодом $T = 2$, а отже, і періодичних розв'язків будь-якого іншого періоду.

Розглянемо ще один варіант узагальнення моделі Скеллама у вигляді

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1+bN_t^2}, \quad a, b > 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Ця модель володіє стаціонарним станом $N_1^* = 0$, а при $a > 1$ з'являється ще ненульовий розв'язок $N_2^* = \sqrt{\dfrac{a-1}{b}}$.

Нульовий розв'язок стійкий при $a < 1$, а при $a > 1$ стійким стає розв'язок N_2^*, тоді як N_1^* перестає бути стійким (рис. 3).

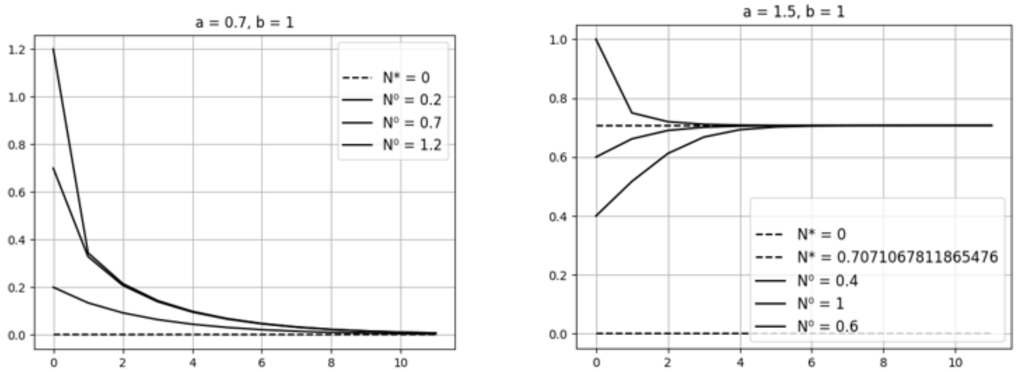

Рис. 3. Графіки розв'язків рівняння (5)

Рівняння (5) теж не має періодичних розв'язків, оскільки з умови $N_{t+2} = N_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ для знаходження значень, що складають періодичні розв'язки, одержуємо рівняння

$$b^2N^2 + a + 1 = 0,$$

яке не має дійсних коренів.

Розглянемо моделі збору врожаю з жорсткою стратегією в популяціях, динаміка чисельності яких описується рівняннями Скеллама.

2 Аналіз моделей Скеллама зі збором урожаю

Модель (3) зі збором урожаю з постійною інтенсивністю c має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t} - c,\ a, b, c > 0,\ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Звідси знаходимо стаціонарні розв'язки

$$N^*_{1,2} = \frac{-(1 - a + cb) \pm \sqrt{(1 - a + cb)^2 - 4bc}}{2b}.$$

Додатні стаціонарні стани $N^*_{1,2}$ існують при умові $a > 1 + cb + 2\sqrt{bc}$.

Стійкість $N^*_{1,2}$ перевіряється з умови

$$\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*} = \frac{a}{(1 + bN^*)^2} < 1.$$

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,5$ маємо

$$N^*_1 = 2,2808, \quad N^*_2 = 0,2192, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*_1} = 0,34997 < 1, \quad \left.\frac{dF}{dN}\right|_{N^*_2} = 2,69098 > 1,$$

тобто N^*_1 – стійкий, а N^*_2 – нестійкий.

Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (6) наведений на рис. 4. Як видно з графіків, при зборі урожаю з'являється критичне значення чисельності, перейшовши яке популяція приречена на вимирання. При збільшенні квот збору урожаю ($c = 1,2$) популяція буде знищена за скінченний час.

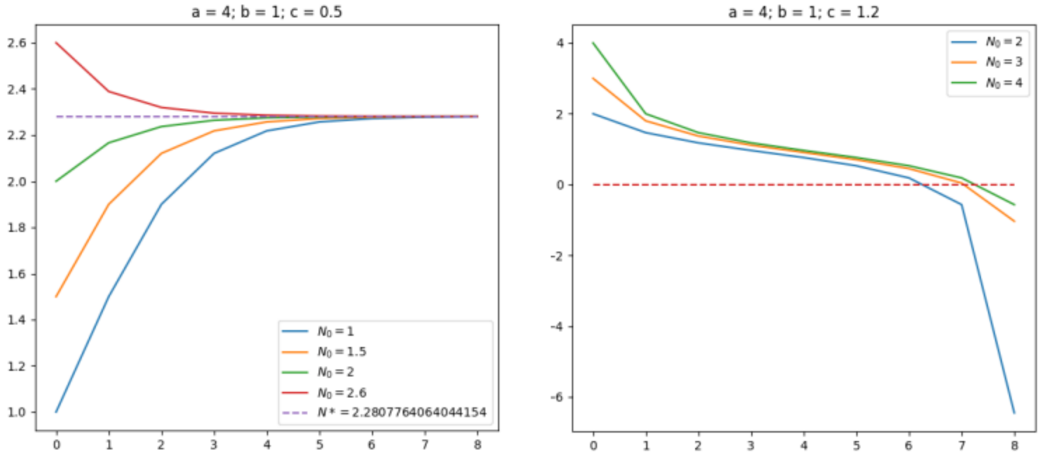

Рис. 4. Поведінка розв'язків моделі Скеллама (6) зі збором урожаю

У випадку збору урожаю в рамках моделі (4) маємо

$$N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{b^2 + N_t^2} - c, \ \ a, b, c > 0, \ \ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Для знаходження стаціонарних станів одержуємо рівняння

$$g(N) \equiv N^3 + (c - a)N^2 + b^2 N + cb^2 = 0, \tag{8}$$

корені якого знаходимо числовими методами. Умову стійкості теж перевіряємо через обчислення мультиплікатора в стаціонарних станах.

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ знаходимо $N_1^* = 2,7254$, $N_2^* = 0,8288$. У цьому випадку мультиплікатори $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_1^*} = 0,307 < 1$, $\left.\frac{dF}{dN}\right|_{N_2^*} = 2.33 > 1$, що означає стійкість N_1^* і нестійкість N_2^*.

Проведемо ще аналітичне дослідження розв'язків рівняння (8).

Рівняння (8) має хоча б один від'ємний корінь, оскільки $g(-\infty) = -\infty$, $g(0) = cb^2 > 0$. При $a < c$ додатних коренів не існує, бо всі доданки лівої частини рівняння (8) додатні. Додатні корені можуть існувати лише при $c < a$ $(c - a < 0)$. Тоді, згідно з теоремою Декарта, кількість додатних коренів многочлена дорівнює кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів, або на парну кількість менша. Оскільки многочлен $g(N)$ при $c < a$ має дві знакозміни в послідовності коефіцієнтів, то існує або два додатних корені або додатних коренів немає. Іноді всі корені будуть від'ємні (або від'ємні їх дійсні частини).

Корені будуть від'ємні, якщо виконані умови критерію Гауса–Гурвіца.

Оскільки головні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} c - a & 1 & 0 \\ cb^2 & b^2 N & c - a \\ 0 & 0 & cb^2 \end{pmatrix}$$

не є додатніми, то рівняння (8) не може мати усі від'ємні корені.

Залишається ще лише виписати умови, щоб три корені рівняння (8) були дійсними. Це можна зробити, використовуючи формули Кардано–Тарталя.

Рівняння (8) шляхом заміни $N = y - \dfrac{c-a}{3}$ зводимо до канонічного рівняння виду $y^3 + py + q = 0$, де

$$p = \frac{3b^2 - (c-a)^2}{3}, \quad q = \frac{2(c-a)^3 - 9(c-a)b^2 + 27cb^2}{27}.$$

Вираз $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^2$ є дискримінантом кубічного рівняння. Якщо $\Delta < 0$, то кубічне рівняння має три дійсних корені.

Зокрема, при $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ дискримінант $\Delta = -0,4418 < 0$, що означає існування трьох дійсних коренів і, враховуючи вищесказане, одержуємо існування двох дійсних додатних коренів рівняння (8).

У результаті комп'ютерних експериментів одержали графіки розв'язків рівняння (7) при різних значеннях параметра c (рис. 5).

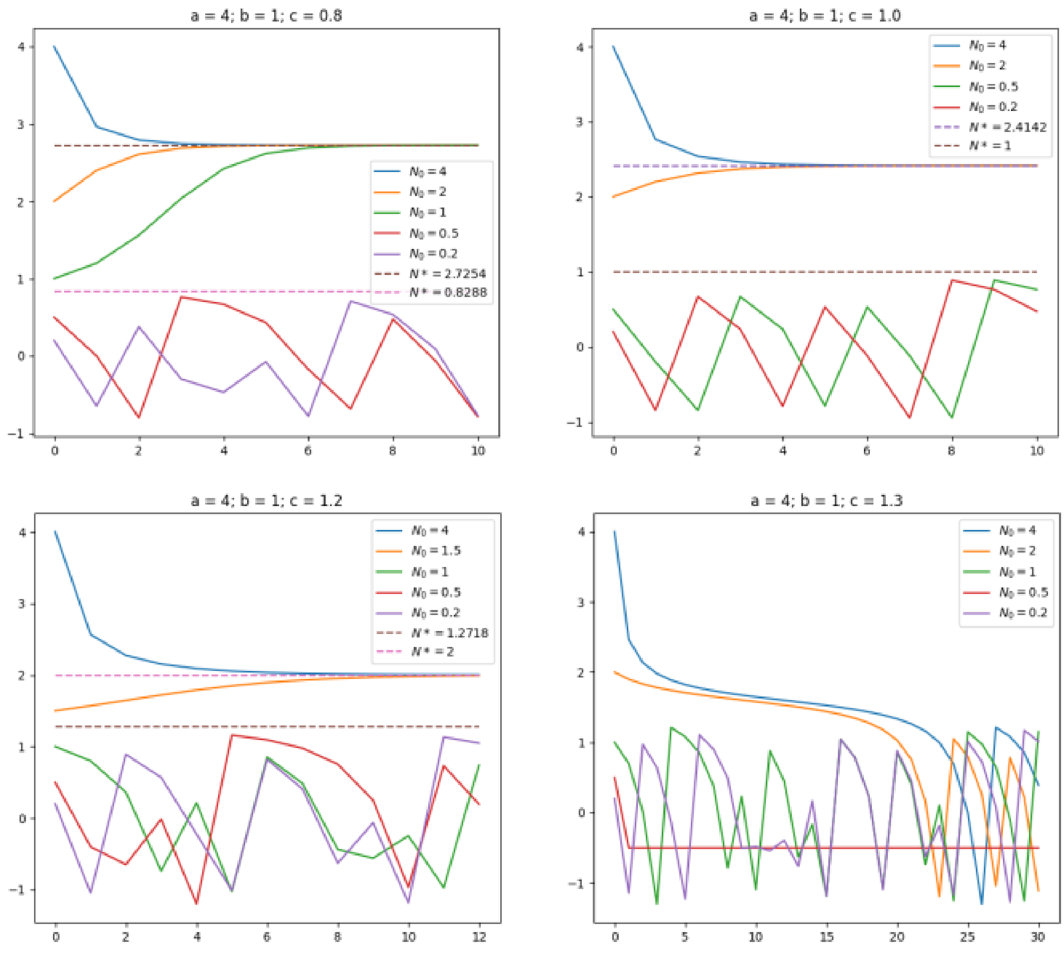

Рис. 5. Поведінка розв'язків рівняння (7) при різних квотах збору врожаю

Розглянемо ще варіант збору врожаю для моделі (5).

Маємо

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t^2} - c, \;\; a, b, c > 0, \;\; t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Стаціонарні стани (9) знаходимо з рівняння

$$bN^3 + bcN^2 + (1-a)N + c = 0, \tag{10}$$

яке при $a < 1$ має тільки від'ємні корені. Додатні корені рівняння (10) при $a = 4$, $b = 1$ різних c знаходилися числовим методом.

Одержані результати оформлені у вигляді нижченаведеної таблиці.

c	N_1^*	N_2^*	$\frac{dF}{dN}\Big\vert_{N_1^*}$	$\frac{dF}{dN}\Big\vert_{N_2^*}$
0,1	0,0334	1,665	3,9867	0,4982
0,5	0,1734	1,3943	3,6563	0,4356
0,8	0,2995	1,1744	3,0665	0,2679
1	0,4142	1,0	2,4143	0

Як бачимо, в цьому випадку N_1^* нестійкий, тобто існує нижня межа чисельності, перейшовши яку знищуємо популяцію. Комп'ютерний аналіз розв'язків рівняння (9) наведений на рис. 6.

Періодичних розв'язків з періодом два, а отже, і будь-яких інших періодичних розв'язків для моделей зі збором урожаю, як і для моделей без збору врожаю, не існує.

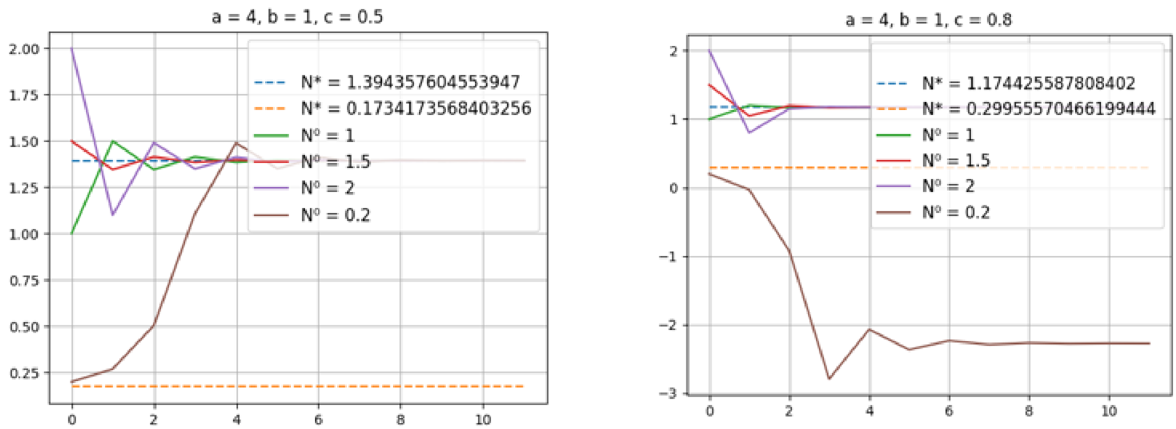

Рис. 6. Графіки розв'язків рівняння (9) при різних значеннях c

Отже, з усіх моделей Скеллама зі збором урожаю можна зробити висновок, що при експлуатації популяцій надзвичайно важливий екологічно обгрунтований підхід до раціонального використання природного ресурсу. Якщо внаслідок деяких причин розмір популяції впаде нижче критичного рівня, то надалі популяція буде повністю знищена, тобто збільшення квоти збору врожаю призводить до повного винищення популяції. Щоб уникнути цієї катастрофи на практиці, потрібно знати допустимі значення для квот збору врожаю і враховувати об'єм максимально гарантованого врожаю.

Список літератури

[1] Маценко В. Г. Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т імені Юрія Федьковича, 2019. 376.

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[3] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecolody. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[4] Eskola HTM, Geritr SAH. *On the mechanistic derivation of various discrete-time population models.* Bulletin of Math. Biology. 2007. **69**. 329-346.

[5] Маценко В.Г. *Моделювання процесів збору врожаю для популяцій із неперекривними поколіннями.* Буковинський матем. журнал. 2022. **10**(2). 165-175.

[6] Шарковський А.Н. *Сосуществованиє циклов непрерывного преобразования прямой в себя.* Украинский матем. журнал. 1964. **XVI**(1). 61-71.

Список літератури

[1] Matsenko V. G. Mathematical modeling of ecological processes : study guide. Chernivtsi : Yury Fedkovich Chernivtsi National University, 2019. 376 p. (in Ukrainian)

[2] Skellam J.G. *Random dispersial in theoretical populations.* Biometrica, 1951. **38**. 196-218.

[3] Suba J., Kawata Y., Linden A. *Properties and interpretation of the Skellam model. A discrete-time contest competition population model.* Population Ecolody. Online Version, 2023. https://doi.org/10.1002/1438-390x.12169.

[4] Eskola HTM, Geritr SAH. *On the mechanistic derivation of various discrete-time population models.* Bulletin of Math. Biology. 2007. **69**. 329-346.

[5] Matsenko V.G. *Modeling harvesting processes for populations with non-overlapping generations.* Bukovinian Math. Journal. **10**(2). 2022. 165–175. (in Ukrainian)

[6] Sharkovskii A. N. *Coexistence of cycles of continuous transformation straight into itself.* Ukrainian Mathematical Journal, 1964. **XVI**(1). P. 61-71. (in Russian)

Надійшло 01.05.2024

Matsenko V.G. *Analysis of Skellam models with a rigid harvesting strategy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 74–83.

Difference equations are used in order to model the dynamics of populations with non-overlapping generations, since the growth of such populations occurs only at discrete points in time.

In the simplest case such equations have form $N_{t+1} = F(N_t)$, where $N_t > 0$ is the population size at a moment of time t, and F is a smooth function.

Among such equations the discrete Skellam model are most often used in practice.

In the given paper the Skellam model of the form $N_{t+1} = aN_t/(1+bN_t)$, $N_{t+1} = aN_t^2/(b^2 + N_t^2)$, $N_{t+1} = aN_t/(1 + bN_t^2)$ is considered, where the parameters $a, b > 0$ with taking an effect of harvesting.

Positive equilibrium points and conditions for their stability for these equations were found.

It is shown in analytical form that these equations do not have periodic solutions with period $T = 2$, which means, according by the Sharkovskii theorem, periodic solutions of any periods.

In the model with harvesting, only regimes with monotonic stabilization of the population size are observed.

Therefore, in all models of Skellam with harvesting, the existence of a critical conception is show, beyond which the population will be completely destroyed. For practice it is important to know the permissible limits of harvesting intensity, which are found in this paper.