Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 107–119 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 107–119

Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів у випадку інтегральних крайових умов.

Запропоновано як традиційну схему методу з визначальним рівнянням, так і модифіковану схему без визначального рівняння.

Отримано умови існування розв'язку розглядуваної крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

Ключові слова і фрази: чисельно-аналітичний метод, система диференціальних рівнянь, перетворений аргумент, крайова задача, інтегральні крайові умови.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *m.filipchuk@chnu.edu.ua, o.filipchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Одним із доволі ефективних та універсальних методів дослідження різноманітних крайових задач для систем диференціальних рівнянь є чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1, 2, 3]. Поширення цього методу на нові класи крайових задач, зокрема, для рівнянь з відхиленим аргументом, залишається актуальною задачею [4].

Суть чисельно-аналітичного методу в його класичному варіанті полягає у побудові спеціальним чином послідовності функцій $x_m(t, x_0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, де x_0 – невідомий параметр, кожна з яких задовольнятиме розглядувані крайові умови. При певних умовах доводиться рівномірна збіжність цієї послідовності до граничної функції $x^*(t, x_0)$, яка, природно, задовольнятиме крайові умови, а також «збурену» вихідну систему. Тоді, вибираючи параметр x_0 нулем «збурення», тобто розв'язком так званого визначального рівняння, отримуємо точний розв'язок $x^*(t, x_0)$ вихідної крайової задачі.

Пізніше у праці [5] вперше було продемонстровано можливість реалізації таких модифікацій чисельно-аналітичного методу, де взагалі не виникатиме визначальне рівняння. Було показано, як будувати послідовність функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, яка

УДК 517.929.7
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34K10.

задовольнятиме крайові умови і рівномірно збігатиметься до єдиного розв'язку $x^*(t)$ розглядуваної крайової задачі.

У даній праці за допомогою стандартної та модифікованої схем чисельно-аналітичного методу досліджуватимемо питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \tag{1}$$

$$\int_0^T x(t)dt = d, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $T = const > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \to [0, T]$ $(i = \overline{1, k})$ – довільні неперервні відображення, d – сталий n-вимірний вектор. Зауважимо, що часткові випадки $k = 0$ (відсутність перетворених аргументів в системі) та $k = 1$ (наявність лише одного перетвореного аргументу в системі) раніше були вивчені в працях [6] і [7, 8] відповідно. Випадок лінійних двоточкових крайових умов для системи (1) розглядався в [9, 10].

Функцію $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ вважатимемо визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1},$$

де D – замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$, і задовольняючою умову Ліпшіца по $x, y_1, \dots, y_k$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M, \tag{3}$$

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y_1}}, \dots, \overline{\overline{y_k}})| \leq K \left(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_i} - \overline{\overline{y_i}}| \right). \tag{4}$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

1 Класична схема чисельно-аналітичного методу

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, які містяться в області D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta = \frac{7}{6}TM + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right|.$$

Нехай

$$D_\beta \neq \varnothing \tag{5}$$

і найбільше власне значення матриці $Q = \dfrac{7(k+1)}{6}TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1. \tag{6}$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t,x_0)=x_0,\quad x_m(t,x_0)=x_0+\int\limits_0^t\left[g_{m-1}(z,x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_{m-1}(s,x_0)ds\right]dz+$$

$$+\frac{2t}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g_{m-1}(z,x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_{m-1}(s,x_0)ds\right]dzdt\right)-x_0\right],\ m=1,2,\ldots,\qquad(7)$$

де

$$g_{m-1}(t,x_0)\equiv f(t,x_{m-1}(t,x_0),x_{m-1}(\lambda_1(t),x_0),\ldots,x_{m-1}(\lambda_k(t),x_0)),$$

а параметр $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільних x_0 всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (7).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (3)-(6). Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (7) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,x_0)$, яка задовольняє крайові умови (2) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dz+$$

$$+\frac{2t}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dzdt\right)-x_0\right],\qquad(8)$$

де

$$g(t)\equiv f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t))),$$

який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0)=x_0$. Крім цього, $x^*(t,x_0)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t)))+\Delta(x_0),\qquad\int\limits_0^T x(t)dt=d,\qquad(9)$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int\limits_0^T\int\limits_0^t\left[g(z)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dzdt\right)-x_0\right]-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds.$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ при всіх $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ і $m=1,2,\ldots$ вірна оцінка

$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\le W_m(x_0),\quad W_m(x_0)\equiv Q^m(E-Q)^{-1}\beta.\qquad(10)$$

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (7) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при $x_0 \in D_\beta$ всі функції $x_m(t, x_0)$ містяться в області D. На підставі (7) із врахуванням (3) та леми 2.1[2] знаходимо:

$$|x_1(t,x_0) - x_0| \le 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)M + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| + \frac{2}{T}M\int\limits_0^T 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)dt \le$$

$$\le \frac{T}{2}M + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| + \frac{2}{T}M\cdot\frac{1}{3}T^2 = \frac{7}{6}TM + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right| = \beta. \tag{11}$$

Тому $x_1(t, x_0) \in D$, як тільки $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ t \in [0, T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t, x_0)$ вигляду (7) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t, x_0) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$, на підставі (7) із врахуванням (4) отримуємо:

$$r_{m+1}(t,x_0) \le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \omega_m(s,x_0)ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \omega_m(s,x_0)ds\right] +$$

$$+\frac{2}{T}K\int\limits_0^T\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \omega_m(s,x_0)ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \omega_m(s,x_0)ds\right]dt, \tag{12}$$

де

$$\omega_m(s,x_0) = r_m(s,x_0) + \sum_{i=1}^{k} r_m(\lambda_i(s),x_0).$$

Згідно з (11), $r_1(t, x_0) = |x_1(t, x_0) - x_0| \le \beta$, тому із (12) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t,x_0) \le (k+1)K\beta\cdot 2t\left(1-\frac{t}{T}\right) + \frac{2}{T}(k+1)K\beta\int\limits_0^T 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)dt \le$$

$$\le (k+1)K\beta\frac{T}{2} + \frac{2}{T}(k+1)K\beta\cdot\frac{1}{3}T^2 = \frac{7}{6}(k+1)TK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$

$$r_{m+1}(t,x_0) \le Q^m\beta,\ m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \ge 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \le \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,x_0) \le \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \tag{13}$$

Умова (6) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (E-Q)^{-1}. \tag{14}$$

Тоді із (13) та (14) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t,x_0)$ вигляду (7) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0)=x^*(t,x_0). \tag{15}$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t,x_0)$ задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t,x_0)$ також їх задовольняє. При $j\to\infty$ із (13), враховуючи (15) та (14), для всіх $m=1,2,\ldots,\ (t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ отримуємо оцінку (10). Крім цього, переходячи із врахуванням (15) у (7) до границі при $m\to\infty$, бачимо, що функція $x^*(t,x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (8), який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0)=x_0$. Отже, гранична функція $x^*(t,x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (9). Теорему доведено. □

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну техніку обгрунтування чисельно-аналітичного методу [2, 3], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t,x_0)$ послідовності (7) була розв'язком крайової задачі (1), (2), дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t))),\quad x(0)=x_0,$$

був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (2), *необхідно і досить, щоб x_0 було розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(x_0)=0, \tag{16}$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d-\int_0^T\int_0^t\left[g^*(z,x_0)-\frac{1}{T}\int_0^T g^*(s,x_0)ds\right]dzdt\right)-x_0\right]-$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T g^*(s,x_0)ds, \tag{17}$$

$$g^*(t,x_0)\equiv f(t,x^*(t,x_0),x^*(\lambda_1(t),x_0),\ldots,x^*(\lambda_k(t),x_0)).$$

При цьому $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ і для всіх $m=1,2,\ldots,\ t\in[0,T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ крайової задачі (1), (2) *від її наближеного розв'язку $x_m(t,x_0)$ вигляду* (7) *вірна оцінка* (10).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (2):

а) при $x_0\in D_\beta$ згідно з (7) будуємо послідовність функцій $x_m(t,x_0)$, залежну від x_0 як від параметра;

б) знаходимо граничну функцію $x^*(t,x_0)$ цієї послідовності;

в) складаємо визначальну функцію $\Delta(x_0)$ вигляду (17) і яким-небудь чисельним методом знаходимо розв'язок $x_0 = x_0^*$ визначального рівняння (16);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))),\ x(0) = x_0^*$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t, x_0^*)$ послідовності $x_m(t, x_0^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (2), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(x_0^*)$, можна взяти функцію $x_m(t, x_0^*)$ вигляду (7).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, x_0)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування, важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (2) не за граничною функцією $x^*(t, x_0)$, а за її m-тим наближенням $x_m(t, x_0)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D_1 \subset D_\beta$, в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0, \tag{18}$$

де

$$\Delta_m(x_0) = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{T}\left(d - \int\limits_0^T \int\limits_0^t \left[g_m(z, x_0) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g_m(s, x_0)ds\right]dzdt\right) - x_0\right] - \\ - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g_m(s, x_0)ds, \tag{19}$$

$$g_m(t, x_0) \equiv f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda_1(t), x_0), \ldots, x_m(\lambda_k(t), x_0)),$$

має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $x_0 = x_{0m}$ ненульового індексу;

2) на межі S_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > \frac{5}{3}(k+1)KW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t)$, початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \tag{20}$$

якого визначається таким x_0^*, яке належить області D_1.

Оцінку близькості граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ для точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ щодо відхилення граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ послідовностей $x_m(t, x_0')$ і $x_m(t, x_0'')$ вигляду (7) відповідно вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leq 3(E - Q)^{-1}\,|x_0' - x_0''|.$$

Неперервну залежність визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (17) від x_0 дає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція $\Delta(x_0)$ вигляду* (17) *визначена, неперервна в області D_β і для всіх $x_0', x_0'' \in D_\beta$ задовольняє оцінку*

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leq \left[\frac{2}{T}E + 5(k+1)K(E-Q)^{-1}\right]|x_0' - x_0''|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область $D_2 \subset D_\beta$ містила точку x_0^*, яка визначає при $t = 0$ початкове значення (20) розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\overline{x}_0 \in D_2$ виконувалась нерівність*

$$|\Delta_m(\overline{x}_0)| \leq \sup_{x_0 \in D_2}\left[\frac{2}{T}E + 5(k+1)K(E-Q)^{-1}\right]|x_0 - \overline{x}_0| + \frac{5}{3}(k+1)KW_m(\overline{x}_0).$$

Оцінку відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (18), від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для відхилення наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння* (18), *від точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$ крайової задачі* (1), (2) *вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0^*) - x_m(t, x_{0m})| \leq 3(E-Q)^{-1}|x_0^* - x_{0m}| + W_m(x_{0m}).$$

Аналогічно [2, 3], при деяких додаткових умовах гладкості правої частини системи (1) можна показати, що $|x_0^* - x_{0m}| \to 0$ при $m \to \infty$ та довести рівномірну збіжність наближеного розв'язку $x_m(t, x_{0m})$ до точного $x^*(t) = x^*(t, x_0^*)$.

2 Модифікована схема чисельно-аналітичного методу

Наведемо тепер для крайової задачі (1), (2) модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де не виникатиме визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови:*

1) вектор $w_0 = \dfrac{1}{T}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = \dfrac{3}{2}TM$-околом;

2) найбільше власне значення матриці $Q = \dfrac{3(k+1)}{2}TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1.$$

Тоді крайова задача (1), (2) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0, \quad x_m(t) = w_0 + \int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(s)))dsdt, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \le Q^m(E - Q)^{-1}\beta \tag{22}$$

для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$.

Доведення. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (21) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що всі функції $x_m(t)$ містяться в області D. На підставі (21), враховуючи (3), маємо:

$$|x_1(t) - w_0| \le Mt + \frac{1}{T}M\int\limits_0^T\int\limits_0^t dsdt \le MT + \frac{1}{T}M\frac{T^2}{2} = \frac{3}{2}TM = \beta. \tag{23}$$

Тому, з врахуванням умови 1), $x_1(t) \in D$. Індукцією нескладно показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$ функції $x_m(t)$ вигляду (21) не виходять за межі області D.

Покладаючи $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t) - x_m(t)|$, на підставі (21) із врахуванням (4) маємо:

$$r_{m+1}(t) \le K\int\limits_0^t \omega_m(s)ds + \frac{1}{T}K\int\limits_0^T\int\limits_0^t \omega_m(s)dsdt. \tag{24}$$

де $\omega_m(s) = r_m(s) + \sum\limits_{i=1}^k r_m(\lambda_i(s))$.

Згідно з (23),

$$r_1(t) = |x_1(t) - w_0| \le \beta,$$

тому з (24) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t) \le K(k+1)\beta t + \frac{1}{T}K(k+1)\beta\int\limits_0^T\int\limits_0^t dsdt \le$$

$$\le (k+1)TK\beta + (k+1)\frac{1}{T}K\beta\frac{T^2}{2} = \frac{3(k+1)}{2}TK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $t \in [0, T]$

$$r_{m+1}(t) \le Q^m\beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t) - x_m(t)| \leq \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t) \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \qquad (25)$$

Умова 2) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E-Q)^{-1}. \qquad (26)$$

Тоді з (25) та (26) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t)$ вигляду (21) рівномірно збігається при $m \to \infty$ для всіх $t \in [0,T]$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x^*(t). \qquad (27)$$

Оскільки, в чому нескладно переконатися безпосередньою перевіркою, всі послідовні наближення $x_m(t)$ задовольняють крайові умови (2), то і гранична функція $x^*(t)$ також їх задовольняє.

При $j \to \infty$ із (25), враховуючи (26) та (27), для всіх $m = 1,2,\ldots$ і $t \in [0,T]$ отримуємо оцінку (22).

Крім цього, переходячи з врахуванням (27) у (21) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = w_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t f(s, x(s), x(\lambda_1(s)), \ldots, x(\lambda_k(s)))dsdt.$$

Отже, гранична функція $x^*(t)$ справді є розв'язком крайової задачі (1), (2). Доведемо тепер єдиність цього розв'язку.

Нехай $y(t)$ – довільний розв'язок крайової задачі (1), (2). Тоді, як нескладно перевірити, він є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = w_0 + \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t f(s, y(s), y(\lambda_1(s)), \ldots, y(\lambda_k(s)))dsdt.$$

Аналогічно, як і вище, нескладно встановити, що для всіх $t \in [0,T]$

$$|y(t) - x_0(t)| = |y(t) - w_0| \leq \frac{3}{2}TM = \beta,$$

$$|y(t) - x_1(t)| \le \frac{3(k+1)}{2} TK\beta = Q\beta,$$

і, за індукцією,

$$|y(t) - x_m(t)| \le Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Таким чином, $x_m(t) \to y(t)$ при $m \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$. З єдиності границі послідовності випливає, що $y(t) = x^*(t)$ для всіх $t \in [0, T]$. Єдиність розв'язку $x^*(t)$ доведено. Теорему доведено. □

Зауваження. *Усі результати, наведені в секціях 1 та 2, при $k = 1$ повторюють результати з [7, 8], а при $k = 0$ – аналогічні результатам із [6].*

Приклади

Проілюструємо використання розроблених схем чисельно-аналітичного методу на конкретних прикладах. Для простоти та компактності обмежимося розглядом модифікованої схеми в скалярному випадку.

Приклад 1. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}x(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}x(\frac{t}{3}) + 6, \qquad \int\limits_0^{\frac{1}{3}} x(t)dt = \frac{1}{3},$$

де $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $D = [-6, 9]$.

В цьому випадку

$$k = 2,\ T = \frac{1}{3},\ d = \frac{1}{3},\ M = 14,\ K = \frac{1}{2},\ w_0 = 1,\ \beta = 7,\ Q = \frac{3}{4},$$

а тому виконуються всі умови теореми 8.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (21), мають вигляд:

$$x_0(t) = 1,$$

$$x_1(t) = \frac{11}{2}\,t + \frac{1}{12} = 5.5\,t + 0.08(3),$$

$$x_2(t) = \frac{143}{24}\,t + \frac{1}{144} = 5.958(3)\,t + 0.0069(4),$$

$$x_3(t) = \frac{1727}{288}\,t + \frac{1}{1728} = 5.99652(7)\,t + 0.000578(703),$$

$$x_4(t) = \frac{20735}{3456}\,t + \frac{1}{20736} = 5.9997106(481)\,t + 0.00004822(530864197),$$

$$x_5(t) = \frac{248831}{41472}\,t + \frac{1}{248832} = 5.999975887(345679012)\,t +$$

$$+0.0000040187(757201646090534979423868312),$$

$$\dots$$

$$x_m(t) = \frac{12^m - 1}{2 \cdot 12^{m-1}}\, t + \frac{1}{12^m} = \frac{6(12^m - 1)}{12^m}\, t + \frac{1}{12^m} = 6\, t \left(1 - \frac{1}{12^m}\right) + \frac{1}{12^m},$$

$$\dots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 6\,t$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Приклад 2. *Розглянемо крайову задачу*

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{5}x(t) - \frac{1}{5}x(t^2) + \frac{1}{5}x(t^3) - 1, \qquad \int_0^1 x(t)dt = 5,$$

де $t \in [0, 1]$, $D = [0, 10]$.

В цьому випадку

$$k = 2,\ T = 1,\ d = 5,\ M = 3,\ K = \frac{1}{5},\ w_0 = 5,\ \beta = \frac{9}{2},\ Q = \frac{9}{10},$$

а тому виконуються всі умови теореми 8.

Послідовні наближення, знайдені згідно з (21), мають вигляд:

$$x_0(t) = 5, \qquad x_m(t) = 5,\ m = 1, 2, \dots.$$

Дана послідовність рівномірно збігається в області D до граничної функції $x^*(t) = 5$, яка і є точним розв'язком розглядуваної крайової задачі.

Список літератури

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Наукова думка, Киев, 1985.

[2] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Наукова думка, Киев, 1992.

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: https://doi.org/10.1142/3962

[4] Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И. *Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III.* Укр. мат. журн. 1998, **50** (7), 960–979. https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876

[5] Трофимчук Е.П., Коваленко А.В. *Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения.* Укр. мат. журн. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396

[6] Самойленко А.М., Мартынюк С.В. *Обоснование численно-аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями.* Укр. мат. журн. 1991, **43** (9), 1231–1239. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153085

[7] Філіпчук М.П. Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Чернівці, 1999.

[8] Філіпчук М.П. *Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь. 2001, **7**, 243–250.

[9] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243

[10] Філіпчук М.П. *Про одну двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами.* Буковин. мат. журн. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24

Список літератури

[1] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods for the Investigation of Solutions of Boundary-Value Problems. Naukova Dumka, Kiev, 1985. (in Russian)

[2] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1992. (in Russian)

[3] Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific, River Edge, NJ, 2000. DOI: https://doi.org/10.1142/3962

[4] Ronto M.I., Samoilenko A.M., Trofimchuk S.I. *The theory of the numerical-analytic method: Achievements and new trends of development. III.* Ukr. Math. J. 1998, **50** (7), 960–979. https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/4876 (in Russian)

[5] Trofimchuk E.P., Kovalenko A.V. *A.M. Samoilenko's numerical-analytic method without determining equation.* Ukr. Math. J. 1995, **47** (1), 138–140. http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/5396 (in Russian)

[6] Samoilenko A.M., Martynyuk S.V. *Justification of a numerical-analytic method of successive approximations for problems with integral boundary conditions.* Ukr. Math. J. 1991, **43** (9), 1231–1239. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/153085 (in Russian)

[7] Filipchuk M.P. Averaging Method in Boundary-Value Problems for Differential Equations with Deviated Argument. Candidate-Degree Thesis. Chernivtsi, 1999. (in Ukrainian)

[8] Filipchuk M.P. *A problem with integral boundary conditions for a system of differential equations with a transformed argument.* Boundary value problems for differential equations. 2001, **7**, 243–250. (in Ukrainian)

[9] Filipchuk M.P. *Two-point boundary value problem for a system with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2017, **5** (1-2), 139–143. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/243 (in Ukrainian)

[10] Filipchuk M.P. *On a two-point boundary value problem for a system of differential equations with many transformed arguments.* Bukovinian Math. J. 2021, **9** (1), 284–290. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.24 (in Ukrainian)

Надійшло 19.01.2024

Filipchuk M.P., Filipchuk O.I. *On a boundary value problem with integral conditions for a system of differential equations with many transformed arguments*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 107–119.

A.M. Samoilenko's numerical-analytic method is well-known and effective research method of solvability and approximate construction of the solutions of various boundary value problems for systems of differential equations. The investigation of boundary value problems for new classes of systems of functional-differential equations by this method is still an actual problem.

A boundary value problem for a system of differential equations with finite quantity of transformed arguments in the case of integral boundary conditions is considered at this paper.

To investigate the existence and approximate construction of the solution of such boundary value problem it is proposed a traditional scheme of the numerical-analytic method with a determining equation, as well as a modified scheme without a determining equation.

In the case of a traditional scheme it is constructed a recurrent sequence of functions that depend on parameter, each of which satisfies given boundary conditions. It is shown that under typical for numerical-analytic method assumptions, this sequence uniformly convergences to the limit function. It is established the value of the parameter at which the limit function will be an exact solution of the original boundary value problem. Approximate determining function and approximate determining equation put into consideration, and on the basis of them sufficient conditions for the solvability of this boundary value problem are obtained. The necessary conditions for the solvability of the considered boundary value problem and an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution were also obtained.

In the case of the modified scheme it is constructed a recurrent sequence of functions, each of which satisfies the specified boundary conditions. Under the typical for the numerical-analytic method assumptions, the uniform convergence of this sequence to the limit function, which is the exact solution of the considered boundary value problem, is proved. It is established the uniqueness of this solution and it is obtained an estimation of the deviation of the approximate solution from the exact solution.

The proposed modified scheme of the numerical-analytic method is illustrated by concrete examples.