Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 2, 246–253 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №2, 246–253

Скакун. Д.Ю., Кривошия Р.В.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА ЗСУВУ ЦИФР Q_S^*-ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ І СТВОРЕНИХ НИМ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Робота присвячена дослідженню властивостей оператору зсуву Q_s^*-представлення дійсних чисел та вивченню типу розподілу послідовностей продукованих останнім. Q_s^*-представлення є природним узагальненням класичного s-кового і топологічно подібне до нього. В даній роботі представлені узагальнення критеріїв нормальності чисел, що відносились як до класичного s-кового представлення так і для Q_s-представлення.

Ключові слова і фрази: рівномірно розподілена, послідовність, оператор зсуву, цифри, Q_s^*-представлення, функція розподілу.

Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
Kropyvnytskyi Construction Vocational College, Kropyvnytskyi, Ukraine
e-mail: *skakund2020@gmail.com, mostik19@gmail.com*

Вступ

Нехай $A_n = \{0; 1; \ldots; n-1\}$ для $n \in N$, $\overline{q_s} = (q_0; q_1; ...; q_{s-1})$, $\overline{p_s} = (p_0; p_1; ...; p_{s-1})$ — стохастичні вектори з строго додатними координатами. Для натурального $s > 2$ розглянемо стохастичні матриці $P_s = \|p_{kj}\|$, $W_s = \|q_{kj}\|$ $(k \in A_s, j \in N)$ такі, що:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{q_{0n}; q_{1n} \ldots; q_{(s-1)n}\} = \prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{0n}; p_{1n} \ldots; p_{(s-1)n}\} = 0.$$

Відомо [6], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність «цифр» (α_n) $(\alpha_n \in A_s$ для кожного $n \in N)$, яка задовольняє умову:

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} q_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_3 3} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} + \ldots + \beta_{\alpha_{n+1}(n+1)} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} \ldots q_{\alpha_n n} + \ldots, \quad (1)$$

де $\beta_{0n} = 0, \beta_{1n} = q_{0n}, \ldots, \beta_{(s-1)n} = q_{0n} + ... + q_{(s-2)n}$.

Рівність (1) називається Q_s^*-представленням числа x і має наступне зображення:

$$x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

УДК 517.946
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35A01, 35A02.

Якщо всі стовпці матриці W_s рівні вектору $\overline{q_s}$, то відповідне Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням.

Для Q_s^*-зображення існує зчисленна множина чисел (Q_s^*-бінарних), які мають два зображення — одне з періодом (0), а інше з періодом $(s-1)$. В подальшому домовимось використовувати перше.

Розглянемо оператор T^* в просторі Q_s^*-зображень дійсних чисел наступним чином:

$$Q^*(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s^{**}}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

де Q_s^{**}-зображення породжене послідовністю стохастичних векторів $(q_{0n}; q_{1n}; ...; q_{(s-1)n})$ для натуральних $n \geq 2$. Позначимо

$$Q_n^*(x) = \underbrace{Q^*(Q^*(...Q^*(x))}_{n}.$$

Як відомо [4], послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою, якщо для кожного інтервалу $(a;b) \subset [0;1]$ виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n\big((a;b)\big)}{n} = b - a,$$

де $N_n((a;b))$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, які належать $(a;b)$.

Розглянемо множину $R(P_s; W_s)$ чисел

$$x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

які задовольняють умову: для кожного блоку цифр $B_l = (\beta_0; \beta_1; \ldots; \beta_{l-1})$ ($\beta_j \in A_s$ для кожного $j \in A_l$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n(x; B_l)}{n} = \eta(B_l),$$

де $\eta(B_l) = p_{\beta_0 1} \cdot p_{\beta_1 2} \cdot \ldots \cdot p_{\beta_{l-1} l}$ та $H_n(x; B_l)$ — кількість номерів $j \in \{0; 1; ...; n-l\}$ таких, що $(\alpha_{j+1}; \alpha_{j+2}; \ldots; \alpha_{j+l}) = B_l$.

Нехай $p_{jn} = q_{jn} = \frac{1}{s}$ для кожного $n \in N$ та $j \in A_s$. Відомо [1], що множина $R(P_s; W_s)$ має повну міру Лебега; також відомо [4], що число $x \in R(P_s; W_s)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(Q_n^*(x))$ є рівномірно розподіленою. Для відповідного випадку деякі аналоги закону повторного логарифму та конструктивні аспекти побудови чисел множини $R(P_s; W_s)$ були розглянуті в роботах [2] та [8] відповідно.

В роботі [3] розглядався випадок, коли всі стовпці матриць P_s та W_s рівні вектору $\overline{p_s}$. Для останнього випадку в [5] було показано, що $x \in R(P_s; W_s)$ тоді і тільки тоді, коли існує стала $C > 0$ така, що для довільного блоку цифр B_l виконується умова:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{H_n(x; B_l)}{n} < C\eta(B_l).$$

В даній роботі узагальнюються результати робіт [3] та [5] по відношенню до Q_s^*-зображення при певних асимптотичних обмеженнях накладених на матрицю W_s.

1 Про міру Лебега множини $R(P_s;W_s)$.

Теорема 1. *Нехай всі стовпці матриці P_s співпадають з стохастичним вектором $\overline{q_s}$. Якщо для матриці W_s виконується умова:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{s-1}(q_{kn}-q_k)^2<+\infty, \tag{2}$$

то $\lambda(R(P_s;W_s))=1$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Оскільки

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)(0)},$$

то легко бачити, що функція $f(x)$ задана коректно.

Нехай

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}<\Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

тоді існує натуральне число r таке, що $\alpha_j=\beta_j$ для кожного $j\in A_{r+1}$ і $\alpha_{r+1}<\beta_{r+1}$. Оскільки

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}<\Delta^{Q_s^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

то отримуємо, що функція $f(x)$ зростаюча.

Оскільки

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right)-f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}-\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}=$$

$$=q_{\alpha_1 1}q_{\alpha_2 2}\ldots q_{\alpha_n n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

то легко бачити, що $f(x)$ неперервна.

Нехай (τ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0,1,\ldots,s-1$ з ймовірностями $q_{0n},q_{1n},\ldots,q_{(s-1)n}$ відповідно.

Розглянемо випадкову величину з незалежними Q_s^*-символами [6]:

$$\tau=\Delta^{Q_s}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}.$$

Маємо:

$$P\left(\tau\in\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right)=P(\tau_1=\alpha_1)\cdot P(\tau_2=\alpha_2)\cdot\ldots\cdot P(\tau_n=\alpha_n)=$$

$$=q_{\alpha_1 1}q_{\alpha_2 2}\ldots q_{\alpha_n n}.$$

З іншого боку

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right)-f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}-\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}=q_{\alpha_1 1}q_{\alpha_2 2}\ldots q_{\alpha_n n}.$$

Отже,

$$f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right)-f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)=F_\tau\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right)-F_\tau\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right),$$

звідки випливає, що

$$F_\tau\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right)=f\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right).$$

Нехай $L=\min(q_0;q_1;\ldots;q_{s-1})$. Зрозуміло, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{q_{j_n}}{q_j}-1\right)^2\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(q_{j_n}-q_j)^2}{q_j^2}\right)<\frac{1}{L^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{s-1}(q_{j_n}-q_j)^2\right)<+\infty.$$

Як відомо [7], остання умова свідчить про те, що $F_\tau(x)$ абсолютно неперервна. Множина Q_s^*-бінарних чисел є всюду щільною на відрізку $[0;1]$, тому $F_\tau(x)=f(x)$ для кожного дійсного x.

Нехай $P_s^*=\|p_{kj}^*\|$, $W_s^*=\|q_{kj}^*\|$ $(k\in A_s, j\in N)$ — дві стохастичні матриці всі стовпці яких співпадають з стохастичним вектором $\overline{q_s}$. Як відомо [3], $\lambda(R(P_s^*;W_s^*))=1$. Нехай $B=[0;1]\setminus R(P_s^*;W_s^*)$, $A_1=f(R(P_s^*;W_s^*))$, $B_1=f(B)$, тоді $R(P_s^*;W_s^*)\cup B=[0;1]=A_1\cup B_1$. Припустимо, що $\lambda(A_1)<1$, тоді $\lambda(B_1)>0$, однак $\lambda(B)=0$. Маємо суперечність з тим, що функція $f(x)$ абсолютно неперервна. □

2 Асимптотичний розподіл цифр чисел множини $R(P_s;W_s)$.

Лема 1. *Нехай для матриці P_s існує стохастичний вектор $\overline{q_s}$ такий, що*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{s-1}|p_{jn}-q_j|<+\infty, \tag{3}$$

тоді для довільного набору B_l виконується умова:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|p_{\beta_0 n}p_{\beta_1 n}\cdot\ldots\cdot p_{\beta_{l-1}n}-q_{\beta_0}q_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_{\beta_{l-1}}\right|<+\infty.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon_{jn}=p_{\beta_j n}-q_{\beta_j}$, де $j\in A_l$, Для кожного $n\in N$ та $j\in A_l$ позначимо $x_{jn}=\frac{\varepsilon_{jn}}{q_{\beta_j}}$. Маємо:

$$\left|p_{\beta_0 n}\cdot\ldots\cdot p_{\beta_{l-1}n}-q_{\beta_0}\cdot\ldots\cdot q_{\beta_{l-1}}\right|=q_{\beta_0}\ldots q_{\beta_{l-1}}\left|(1+x_{0n})\cdot\ldots\cdot(1+x_{(l-1)n})-1\right|\le$$

$$\le\left|(1+x_{0n})(1+x_{1n})\ldots(1+x_{(l-1)n})-1\right|\le\sum_{0\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le l-1}|x_{i_1 n}|\cdot|x_{i_2 n}|\cdot\ldots\cdot|x_{i_k n}|,$$

звідки випливає потрібне, оскільки для кожного $j\in A_s$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{jn}|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|p_{\beta_j n}-q_{\beta_j}\right|}{q_{\beta_j}}<+\infty.$$

□

Лема 2. *Нехай для матриці P_s існує стохастичний вектор $\overline{q_s}$ такий, що виконується умова (3). Позначимо як $D(1;l)$ сукупність всіх наборів цифр B_l таких, що*

$$\left|\frac{k(1)}{l} - q_1\right| \geq \frac{1}{r},$$

де $k(1)$ — кількість одиниць серед елементів набору B_l. Нехай r — задане натуральне число, тоді існує натуральне L таке, що для кожного $l > L$ виконується нерівність:

$$A_l \leq \frac{2r^4}{l^2},$$

де A_l — сума мір $\eta(\cdot)$ по всім наборам з сукупності $D(1;l)$.

Доведення. Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних дискретних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Зрозуміло, що

$$A_l = P\left(|\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l - lq_1| \geq \frac{l}{r}\right).$$

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^k p_{1j}}{k} = q_1,$$

то існує $L \in N$ таке, що

$$\left|\frac{\sum_{j=1}^k p_{1j}}{k} - q_1\right| < \frac{0,1}{r}$$

для кожного натурального $k > L$. Зрозуміло, що

$$|\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l - lq_1| \geq \frac{l}{r} \Rightarrow \left|\xi_1 + \ldots + \xi_l - \sum_{j=1}^{l} p_{1j}\right| + \left|\sum_{j=1}^{l} p_{1j} - lq_1\right| \geq \frac{l}{r}.$$

Позначимо $\tau_k = \xi_k - M(\xi_k)$, тоді

$$M(\tau_k) = 0;$$

$$M(\tau_k^2) = p_{0k}p_{1k} \leq 0,25;$$

$$M(\tau_k^4) = p_{0k}p_{1k}(p_{0k}^3 + p_{1k}^3) \leq p_{0k}p_{1k}(p_{0k} + p_{1k}) \leq 0,25.$$

Для кожного натурального l маємо:

$$M(\tau_1 + ...\tau_l)^4 = \sum_{k=1}^{l} M(\tau_k^4) + \sum_{i<j} M(\tau_i^2)M(\tau_j^2) \leq 0,25l + 0,25 \cdot 6 \cdot C_l^2 < l^2.$$

Позначимо

$$\varepsilon_l = \frac{l}{r} - \left|\sum_{j=1}^{l} p_{1j} - lq_1\right|.$$

Оскільки $\varepsilon_l > \frac{0,9l}{r}$ при $l > L$, то враховуючи нерівність Маркова маємо:

$$P(\left(|\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l - lq_1| \geq \frac{l}{r}\right) \leq P(|\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_l| \geq \varepsilon_l) =$$

$$= P((\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_l)^4 \geq \varepsilon_l^4) \leq \frac{M(\tau_1 + \ldots\tau_l)^4}{\varepsilon_l^4} < \frac{l^2}{\frac{0{,}9^4 l^4}{r^4}} < \frac{2r^4}{l^2}.$$

□

Зрозуміло, що твердження останньої леми залишається правильним для довільної цифри $j \in A_s$.

Теорема 2. *Нехай для матриці P_s існує стохастичний вектор $\overline{q_s}$ такий, що виконується умова (3). Якщо існує стала $C > 0$ така, що для довільного блоку цифр B_l виконується умова:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{H_n(x; B_l)}{n} < C\eta(B_l),$$

то для довільного блоку цифр B_l:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n(x; B_l)}{n} = \eta(B_l).$$

Доведення. Нехай Δ — деякий набір цифр, (α_n) — деяка послідовність цифр. Для $k \in N$ позначимо

$$b_k = (\alpha_{1+s(k-1)}; \alpha_{2+s(k-1)}; \ldots; \alpha_{s+s(k-1)}).$$

Зрозуміло, що послідовність цифр (α_n) можливо представити у вигляді послідовності блоків $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$. Нехай p — достатньо велике число, набір цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ містить $[\frac{p}{s}]$ блоків виду $b_1, b_2, \ldots, b_{[\frac{p}{s}]}$. Нехай r — достатньо велике натуральне число. Візьмемо достатньо велике l і представимо послідовність «цифр»

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

у вигляді об'єднання «блоків цифр» $c_1, c_2, \ldots, c_k$, де

$$c_k = (b_{1+l(k-1)}; b_{2+l(k-1)}; \ldots; b_{l+l(k-1)}), \quad k \in N.$$

Блок c_j будемо називати хорошим, якщо для кількості $r(c_j; \Delta; l)$ «цифр» Δ серед $c_1, c_2, \ldots, c_l$ виконується умова:

$$\left|\frac{r(c_j; \Delta; l)}{l} - \eta(\Delta)\right| \leq \frac{1}{r},$$

в протилежному випадку блок будемо називати поганим. Нехай $M(p; s; l)$ — кількість поганих блоків серед перших $l\left[\frac{[\frac{p}{s}]}{l}\right]$ членів послідовності (c_n). Кількість хороших блоків дорівнює

$$T(p; s; l) = \frac{p}{sl} - M(p; s; l) + \varepsilon(p; s; l),$$

де $|\varepsilon(p; s; l)| \leq 2$. Всі хороші блоки містять разом цифру Δ в кількості:

$$T(p; s; l) \cdot l\left(\eta(\Delta) + \frac{\Theta_1}{r}\right),$$

де $|\Theta_1| \leq 1$. Всі погані блоки містять разом цифру Δ в кількості не більшу за $M(p; s; l) \cdot l$. Нехай $A(s; (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p))$ — загальна кількість «цифр» Δ серед блоків $c_1, c_2, \ldots, c_{\left[\frac{[\frac{p}{s}]}{l}\right]}$.

Маємо:

$$A(s;(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)) = T(s;p;l)\cdot l\left(\eta(\Delta)+\frac{\Theta_1}{r}\right) + M(s;p;l)\cdot l\Theta_1.$$

Позначимо як T множину всіх поганих блоків серед $b_1, b_2, \dots, b_{[\frac{p}{s}]}$ (мається на увазі перебір по блокам $(b_1;...;b_l),(b_2;...;b_{l+1})...$).

Враховуючи лему 2 та умову теореми, маємо:

$$M(p;s;l) \le card(T) < C\eta(T)\cdot[\frac{p}{s}] < C[\frac{p}{s}]\cdot\frac{2r^4}{l^2}.$$

Нехай $l\to\infty$ (тоді $p\to\infty$), маємо :

$$\frac{M(p;s;l)\cdot l}{\frac{p}{s}} < C\frac{2r^4}{l}\to 0,$$

$$\frac{T(p;s;l)\cdot l}{\frac{p}{s}} = 1 - \frac{M(p;s;l)\cdot l}{\frac{p}{s}} + \frac{\varepsilon(p;s;l)}{\frac{p}{s}} \to 1.$$

Отже:

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\left|\frac{A(s;(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p))}{\frac{p}{s}} - \eta(\Delta)\right| \le \frac{1}{r}.$$

Нехай $r\to\infty$, тоді маємо:

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{A(s;(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p))}{\frac{p}{s}} - \eta(\Delta)\right| = 0.$$

Зрозуміло, що відповідні міркування можливо використати для послідовностей (α_{n+j}), де $j\in A_{s-1}$, $n\in N$. Для кожного $j\in A_s$ маємо:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{A(s;(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_p))}{\frac{p-j}{s}} = \lim_{p\to\infty}\frac{A(s;(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_p))}{\frac{p}{s}} = \eta(\Delta).$$

З іншого боку зрозуміло, що

$$N_p(x;\Delta) = \sum_{j=1}^{s} A(s;(\alpha_j,\alpha_2,\dots,\alpha_p).$$

Маємо:

$$\frac{1}{p}N_p(x;\Delta)\to\frac{s\eta(\Delta)}{s} = \eta(\Delta)\ \ (p\to\infty).$$

□

Враховуючи теорему 1 та роботу [3] можливо зробити висновок.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови* (2) *та* (3), *то міра Лебега множини* $R(P_s;W_s)$ *рівна* 1, *причому* $x\in R(P_s;W_s)$ *тоді і тільки тоді, коли послідовність* $(Q_n^*(x))$ *рівномірно розподілена.*

Список літератури

[1] Borel E. *Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques.* Rend. Circ. Mat. Palermo.& App. 1909, 247–271. doi:10.1007/BF03019651

[2] Fukuyama K.The law of the iterated logarithm for discrepancies of θnx. *Acta Mathematica Hungarica.* & App. 2008 (118), **1**, 155–170. doi:10.1007/s10474-007-6201-8

[3] Kryvoshyia R.V.*On a generalization of the concept of normal numbers.* Bulletin of Taras Shevchenko National University. & App. 2021 (2), 58–62.(in Ukrainian) doi: 10.17721/1812-5409.2021/2

[4] Niven I., Zuckerman H.S. *On the definition of normal numbers.* Pacific J. Math, & App. 1951, **1**, 103–109.

[5] Postnikov A.G. *Arithmetic modeling of random processes.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. & App. 1960 (57), 3–84.

[6] Pratsiovytyi N.V.*Fractal approach in the study of singular distributions.* Publishing House of Mykhailo Dragomanov State University of Ukraine, Kyiv, 1998. (in Ukrainian)

[7] Torbin G.M., Pratsiovytyi N.V. *Random variables with independent Q*-symbols.* Institute for Mathematics of NASU: Random evolutions. & App. 1992, 95–104. (in Ukrainian)

[8] Veronica B.,Carton O., Ariel P. *Finite-state independence.* Theory Comput.Syst. & App. 2018 (62), **7**, 1555–1572. doi: 10.1007/s00224-017-9821-6.

Надійшло 25.11.2023

Skakun D.Y., Kryvoshiya R.V. *On some properties of the digit shift operator Q_s^*-representation of real numbers and uniformly distributed sequences produced by it*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 246–253.

The work is devoted to the study of the properties of the left-shift operator Q_s^*-representation of real numbers and the study of the type of distribution of the sequences produced by the corresponding operator. The Q_s^*-representation of real numbers is a natural generalization of the classical s-representation and is topologically similar to the latter. E. Borel's classic result that almost all numbers are s-normal was over time translated into the terms of uniformly distributed sequences produced by the left-shift operator of the digits of the corresponding representation. It was proved that a number is s-normal only when the corresponding sequence generated by this number in the sense of the left shift operator is uniformly distributed. Despite the topological similarity between the Q_s^*-representation of real numbers and the classical s-representation, proving similar results for the former requires fundamentally new approaches that include the use of the apparatus of ergodic theory. The absence of the effect of metric transitivity of the appearance of digits, which is characteristic of the classical s-representation, does not allow the use of appropriate approaches to the Q_s^*-representation. The construction of normal numbers in various representation systems is a separate non-trivial problem and is the subject of many studies. In many cases, criteria for the normality of numbers, which can have a continuous structure (similar to the classical criteria of uniform distribution of the sequence) or a discrete structure, are useful for constructing the corresponding numbers. This paper presents generalizations of discrete criteria for the normality of numbers, which applied both to the classical s-representation and to the Q_s-representation of real numbers (the latter is a partial case of the Q_s^*-representation).