Працьовитий М.В., Василенко Н.М., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М.

ДВОСИМВОЛЬНІ СИСТЕМИ КОДУВАННЯ ЧИСЕЛ І ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Робота присвячена дискретним розподілам випадкових величин, визначених різними двосимвольними системами кодування дійсних чисел (з нульовою та ненульовою надлишковістю, з однією та двома основами, зокрема різнознаковими), вивченню структурних, тополого-метричних та структурно-фрактальних властивостей їх точкових спектрів. Доведено загальний критерій дискретності розподілу випадкової величини з незалежними цифрами у двосимвольному зображенні (аналог теореми П.Леві для суми випадкового ряду з дискретно розподіленими доданками) і описано властивості його спектра. Також у роботі вивчаються дискретні розподіли значень функцій канторівського типу від випадкового неперервно розподіленого аргумента.

Ключові слова і фрази: двосимвольна система кодування (зображення) чисел, Q_2-зображення, G_2-зображення, ланцюгове A_2-зображення, нега-двійкове зображення, хвостова множина, дискретний розподіл, точковий спектр розподілу, множина канторівського типу.

Institution of mathematics of NAS Ukraine,
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats4444@gmail.com, vasylenkonm@gmail.com, goncharenko.ya.v@gmail.com, i.m.lysenko@npu.edu.ua*

Вступ

Дана робота присвячена ймовірнісним мірам і розподілам випадкових величин з носіями, які є зліченними і всюди щільними множинами у просторі послідовностей елементів двосимвольного алфавіту, на проміжку числової прямої або на лінійній фрактальній множині канторівського типу.

Нагадаємо, що ймовірнісна міра μ, визначена на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$ називається неперервною, якщо ймовірність кожної одноточкової множини рівна нулю. Якщо існує скінченна або зліченна множина $D \in \mathfrak{F}$ така, що $\mu(D) = 1$, то міра називається чисто дискретною (або атомарною). Якщо ж міра має атоми, тобто одноточкові множини з додатною ймовірністю, але ймовірність кожної зліченної множини менша 1, то вона називається сумішшю дискретної та неперервної мір.

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* 60Exx.

Розподіл випадкової величини ξ, зосереджений на скінченній або зліченній множині D, тобто $P\{\xi \in D\} = 1$, називається чисто дискретним (атомарним). Для довільної випадкової величини ξ з функцією розподілу F_ξ має місце розклад

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \tag{1}$$

де $\alpha_i \geq 0$, $i \in \{1,2,3\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Рівність (1) називають *лебегівською структурою розподілу випадкової величини* ξ. Якщо один з коефіцієнтів $\alpha_i = 1$, то розподіл випадкової величини ξ називають чистим (дискретним, якщо $\alpha_1 = 1$, абсолютно неперервним, якщо $\alpha_2 = 1$, і сингулярним, якщо $\alpha_3 = 1$). В решті випадків розподіл ξ називають сумішшю розподілів чистих лебегівських типів.

Зазначимо, що теорія дискретних розподілів є добре розвинутою, серед яких теорема П. Леві [4] про дискретність розподілу суми ряду з незалежних дискретно розподілених випадкових величин, теорема Джессена Вінтнера [2] про лебегівську чистоту розподілу суми ряду з незалежних дискретно розподілених випадкових величин, який з ймовірністю 1 збігається, але дискретні розподіли, точкові спектри яких є всюди щільними на проміжку, вивчені мало. В університетських курсах вони відсутні взагалі або фігурують в якості єдиного прикладу (розподілу на множині раціональних чисел). До загальних фактів теорії дискретних розподілів ймовірностей слід віднести теорему про поведінку модуля характеристичної функції на нескінченності [3]. Варто зазначити, що ніша природньої появи дискретних розподілів є немалою. Дана робота має за мету частково компенсувати вказаний пробіл.

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт (набір цифр) двійкової системи кодування (зображення) чисел, $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць).

У просторі L легко ввести групову операцію, перетворивши його у комутативну групу, нескладно визначити у ньому структуру двовимірного лінійного простору, його метризувати та топологізувати [10]. Зрозуміло, здійснити це можна різними способами.

Двосимвольним кодуванням (зображенням) дійсних чисел множини E засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення g простору L у множину E, тобто відображення, при якому кожен елемент множини E є образом принаймні одного елемента множини L. Якщо $L \ni (\alpha_n) \xrightarrow{g} x \in E$, то кажуть, що послідовність (α_n) є g-кодом або g-зображенням числа x і записують $x = \Delta^g_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$. При цьому α_n називається n-ою цифрою даного зображення.

Кажуть, що зображення має нульову надлишковість, якщо кожне з чисел множини E має не більше двох зображень, а тих чисел, що мають єдине зображення переважна більшість. Прикладом такого є класичне двійкове зображення чисел відрізка $[0; 1]$:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_n}{2^n} + ... \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},$$

а також його узагальнення – Q_2-зображення [13, 14]:

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}.$$

де $0 < q_0$ – параметр, менший 1, $q_1 \equiv 1-q_0$. Для цього зображення виконується рівність: $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}$. Круглі дужки символізують період. Як бачимо, існують числа, що мають два зображення. Таких чисел зліченна множина і називаються вони Q_2-бінарними. Практично всі двосимвольні системи кодування чисел певного проміжка з нульовою надлишковістю мають такий недолік. Якщо $q_0 = 0,5$, то Q_2-зображення є класичним двійковим.

Простим прикладом зображення чисел з ненульовою надлишковістю є наступне. Нехай $0,5 < a$ – параметр, менший 1. Зображення числа, встановлюється розкладом

$$[0; \frac{a}{1-a}] \ni x = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_k a^k + \ldots \equiv \Delta^a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

Зрозуміло, що при $a = 0,5$ таке зображення є класичним двійковим.

Нехай g_0 і $g_1 \equiv g_0 - 1$ — дві різнознакові основи. Зображення числа $x \in [0; g_0]$, встановлене розкладом числа x в ряд (взагалі кажучи, лакунарний знакопочережний):

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

називається G_2-*зображенням* [6]. Воно має нульову надлишковість, просту метричну теорію і неперервний оператор лівосторонього зсуву цифр, що є нетиповим для інших зображень [15]. При $g_0 = 0,5$ це зображення набуває спрощенного вигляду:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{\sigma_k} \frac{\alpha_k}{2^k} \equiv \Delta^{G_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1},$$

і називається G_2^*-зображенням [11].

Якщо $A_2 = \{e_0; e_1\}$, $0 < e_0 < e_1$, то зображення числа $x \in [d_0; d_1]$:

$$d_i = \frac{\sqrt{e_0 e_1 (e_0 e_1 + 4)} - e_0 e_1}{2 e_{1-i}},$$

встановлене рівністю $x = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots + 1/a_n + \ldots \equiv \Delta^{A_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $a_n = e_{\alpha_n}$, називається нескінченним ланцюговим A_2-зображенням (далі A_2-зображенням). Воно має нульову надлишковість за умови $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$ і ненульову при $e_0 e_1 < \frac{1}{2}$. Геометрія A_2-зображення несамоподібна, метричні відношення, породженні нею, складні [1, 8].

Простим і топологічно еквівалентним A_2-зображенню є нега-двійкове зображення, яке означується через наступний розклад числа в ряд [10]:

$$[0; 1] \ni x = \frac{2}{3} - \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2k-1}}{2^{2k-1}} - \frac{\alpha_{2k}}{2^{2k}} + \ldots\right) \equiv \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Циліндром рангу m з основою $c_1 \ldots c_m$ у просторі L називається множина

$$\Delta_{c_1\ldots c_m} = \{\overline{\alpha} : \ \overline{\alpha} = (\alpha_n) \in L : \ \alpha_i = c_i, i = \overline{1, m}\}.$$

Безпосередньо з означення циліндра отримуємо:

1) $\Delta_{c_1\ldots c_m} = \Delta_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta_{c_1\ldots c_m 1}$; $L = \bigcup\limits_{c_1 \in A} \ldots \bigcup\limits_{c_m \in A} \Delta_{c_1\ldots c_m}$;

2) $\Delta_{c_1 c \ldots c_m} = \Delta_{a_1\ldots a_m} \Leftrightarrow c_i = a_i, i = \overline{1,m}$;

3) $\Delta_{a_1\ldots a_m\ldots a_k} \cap \Delta_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\ c_i \neq a_i, \\ \Delta_{a_1\ldots a_k}, & \text{якщо } c_i = a_i, i = \overline{1,m}; \end{cases}$

4) оскільки для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_m} = \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots} - \text{ точка простору } L,$$

то на точку простору L можна дивитись як на циліндр нескінченного рангу.

Множина $E \subset L$ називається *всюди щільною у просторі* L, якщо кожен циліндр довільного рангу містить принаймні одну точку множини E.

Кажуть, що послідовності (a_n) і (b_n) простору L *мають однаковий хвіст*, якщо існують m і k такі, що $a_m + j = b_k + j$ для будь-якого $j \in N$.

Бінарне відношення мати однаковий хвіст є відношенням еквівалентності і розбиває простір L на класи еквівалентності, кожен з яких називається *хвостовою множиною.* Легко довести, що кожна хвостова множина є зліченною, а множина всіх хвостових множин – континуальна. Кожна хвостова множина є всюди щільною у просторі L. Існує проблема нетривіальних метризацій хвостових множин.

Оператори лівосторонього і правосторонього зсувів, означені рівностями:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \delta_0(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \delta_1(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

є відображеннями, які зберігають хвости послідовностей простору L. Вони не є бієкціями.

За допомогою вказаних операторів шляхом склеювання можна конструювати перетворення простору L, тобто бієктивне відображення простору L на себе, оскільки рівняння $\delta_i(\overline{\alpha}) = \omega(\overline{\alpha})$ у простору L має два розв'язки $\Delta_{(0i)}$, $\Delta_{(1i)}$.

1 Дискретні ймовірнісні міри у просторі L

Нехай U — σ-алгебра, яка містить клас всіх циліндрів.

1. Випадок метричної незалежності. Нехай $||p_{in}||$ — нескінченна дворядкова стохастична матриця ($i \in A$: $p_{in} \geq 0$, $p_{0n} + p_{1n} = 1\ \forall n \in N$). Ймовірнісну міру μ на вимірному просторі (L, U) означимо, задавши її значення на циліндрах:

$$\mu(\Delta_{c_1\ldots c_m}) = \prod_{n=1}^{m} p_{c_n n}, \quad \mu(\Delta_{c_1\ldots c_n\ldots}) = \prod_{n=1}^{\infty} p_{c_n n}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Міра μ є або чисто дискретною, або чисто неперервною, причому дискретною лише тоді, коли*

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0.$$

У випадку дискретності точковим спектром (множиною атомів) міри μ *є хвостова множина, представником якої є точка* $\overline{c} = \Delta_{c_1 \dots c_n \dots}$, *де* $p_{c_n n} = \max\{p_{0k}, p_{1k}\}$, *або її підмножина.*

Доведення. Враховуючи означення ймовірнісної міри μ рівністю (2), бачимо, що при $M = 0$ для будь-якого $\overline{\alpha} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}$ маємо $\mu(\{\overline{\alpha}\}) = \mu(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}) = 0$, тобто міра є неперервною.

Нехай $M > 0$, $X_{\overline{c}}$ — хвостова множина, якій належить точка $\overline{c}$. Можливі випадки: 1) матриця $||p_{in}||$ нулів не містить; 2) серед елементів матриці є нулі.

Нехай $\overline{\alpha} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ – довільна точка з множини $X_{\overline{c}}$ і при цьому k і m – найменші з чисел такі, що $\alpha_{m+j} = c_{k+j}$ $\forall k \in N$. Тоді у першому випадку маємо

$$\mu(\{\overline{\alpha}\}) = \prod_{i=1}^{\infty} p_{\alpha_i i} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} p_{\alpha_i i}}{\prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}} \prod_{i=1}^{\infty} p_{c_i i} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} p_{\alpha_i i}}{\prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}} M > 0,$$

отже, $\overline{\alpha}$ є атомом міри μ.

У другому випадку висновок залишиться правильним, якщо $p_{\alpha_i i} \neq 0$, $i = \overline{1, k}$. І матимемо $\mu(\{\overline{\alpha}\}) = 0$ у протилежному випадку.

Оскільки $M > 0$, то $\prod\limits_{i=k+1}^{\infty} p_{c_i i} \to 1$ $(k \to \infty)$. Нехай

$$D_{m,k} \equiv \{(\alpha_n) : \alpha_{m+j} = c_{k+j} \ \forall j \in N\}.$$

Тоді

$$\mu(D_{m,k}) = (\prod_{i=k+1}^{\infty} p_{c_i i})(\sum_{\alpha_1 \in A} \dots \sum_{\alpha_m \in A} \prod_{i=1}^{m} p_{\alpha_i i}) = \prod_{i=k+1}^{\infty} p_{c_i i} \to 1 (k \to \infty).$$

Оскільки $X_{x_0} = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{k \to \infty} D_{m,k}$, то $\mu(X_{x_0}) = 1$, тобто зліченна множина X_{x_0} є носієм міри μ. Отже, міра μ чисто дискретна. Теорема доведена. □

Зауваження 1. *Точка* x_0, *що фігурує у формулюванні теореми, взагалі казучи, може бути не одна. Це трапляється тоді, коли існують* $p_{0k} = 0,5$. *Тому кількість таких точок є степенем з основою 2. Але їх кількість завжди скінченна, оскільки необхідною умовою збіжності нескінченного добутку є прямування до 1 його* n*-го члена за умови, коли* $n \to \infty$.

2. Випадок марковської залежності. Нехай (p_0, p_1) — стохастичний вектор з додатними координатами, $||p_{ij}|| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ — стохастична матриця перехідних ймовірностей ($p_{ij} \geq 0$, $p_{i0} + p_{i1} = 1$, $i = 0, 1$). Означимо ймовірнісну міру ν у вимірному просторі (L, U), задавши її значення на циліндрах рівностями:

$$\nu(\Delta_{c_1 \dots c_m}) = p_{c_1} \prod_{i=1}^{m} p_{c_i c_{i+1}}, \quad \nu(\Delta_{c_1 \dots c_m \dots}) = p_{c_1} \prod_{i=1}^{\infty} p_{c_i c_{i+1}}.$$

Лема 1. *Якщо матриця перехідних ймовірностей містить два нулі, то ν є дискретною мірою з двома атомами.*

Доведення. Справді, точковий спектр D_ν міри μ є двоелементною множиною, оскільки

$$D_\nu = \begin{cases} \{\Delta_{0(1)}, \Delta_{(1)}\}, & \text{якщо } p_{00} = 0 = p_{10}, \\ \{\Delta_{1(0)}, \Delta_{(0)}\}, & \text{якщо } p_{01} = 0 = p_{11}, \\ \{\Delta_{(0)}, \Delta_{(1)}\}, & \text{якщо } p_{01} = 0 = p_{10}, \\ \{\Delta_{1(0)}, \Delta_{0(1)}\}, & \text{якщо } p_{00} = 0 = p_{11}. \end{cases} \qquad \square$$

Теорема 2. *Міра ν є або чисто неперервною, або чисто дискретною. Якщо матриця перехідних ймовірностей не містить нулів, то міра ν є неперервною, а у випадку, коли містить один нуль, є дискретною лише тоді, коли $p_{1-i,i} = 0$ для деякого i. У випадку дискретності міри її точковим спектром є зліченна множина $D_\nu = \{\Delta_{(1-i)}, \Delta_{i\ldots i(1-i)}\}$. Якщо $p_{ii} = 0$, то $D_\nu = \varnothing$, а неперервним спектром міри є об'єднання зліченної кількості циліндрів виду $\Delta_{[1-i]\ldots[1-i]i}$ та Δ_i.*

Доведення. Якщо матриця перехідних ймовірностей не містить нулів, то всі її елементи відокремлені від 1, а отже, міра одноточкової множини очевидно рівна 0, тобто ν є неперервною. Розглянемо випадок, коли один елемент матриці рівний нулю.

1. У випадку, коли $p_{[1-i]i} = 0$ маємо

$$\nu(\Delta_{(1-i)}) = p_{1-i} > 0, \;\; \nu(\Delta_{\underbrace{i\ldots i}_{k-1}(1-i)}) = p_i p_{ii}^{k-1} p_{i[1-i]} > 0,$$

тобто вказані точки є атомами міри ν. Сума мас цих атомів дорівнює

$$p_{1-i} + \sum_{k=1}^{\infty} p_i p_{ii}^{k-1} p_{i[1-i]} = p_{1-i} + p_i p_{i[1-i]} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{k-1} = p_{1-i} + p_i p_{i[1-i]} \frac{1}{1-p_{ii}} = 1,$$

оскільки $p_{ii} < 1$. Отже, міра ν в цьому випадку чисто дискретна.

2. Нехай $p_{ii} = 0$ і $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільна точка простору L. Якщо серед цифр послідовності (α_n) зустрічається пара (ii), то очевидно, що $\nu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 0$. За умови, коли $\overline{\alpha_k\alpha_{k+1}} \neq \overline{ii}$ для будь-якого $k \in N$, у послідовності (α_n) нескінченна кількість разів зустрічається принаймні одна з пар $(1-i, i)$ та $(1-i, 1-i)$. Тоді $\nu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 0$, оскільки $0 < p_{[1-i]i} < 1$ і $0 < p_{[1-i][1-i]} < 1$, а отже, нескінченний добуток розбігається до нуля за рахунок порушення необхідної умови збіжності. Таким чином, міра ν у цьому випадку є неперервною і її носієм є множина всіх послідовностей, серед елементів яких немає двох послідовних цифр рівних парі (i, i).

Як бачимо, у всіх можливих випадках міра ν є або дискретною, або неперервною і в жодному не є сумішшю.

У випадку неперервності

$$\nu(\Delta_i) = p_i > 0, \;\; \nu(\Delta_{[1-i]\ldots[1-i]i}) = p_{1-i} p_{[1-i][1-i]}^{k-1} p_{[1-i]i} > 0.$$

Отже, носієм міри ν є множина

$$D[L, \overline{ii}] = \{\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ де } \alpha_k\alpha_{k+1} \neq \overline{ii}\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta_{\underbrace{[1-i]\ldots[1-i]}_{k} i}.$$

Теорему доведено. $\square$

2 Випадкові величини з незалежними цифрами g-зображення

Розглядається довільне двосимвольне g-зображення $\Delta^g_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ чисел деякої континуальної множини D. Нехай (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно ($p_{ik} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} = 1$). Розглядається випадкова величина $\xi = \Delta^g_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$. Корекність означення випадкової величини для систем кодування чисел з нульовою надлишковістю очевидна; для систем з ненульовою надлишковістю це легко обгрунтувати. Для систем з нульовою надлишковістю можна довести, що ξ має розподіл чистого лебегівського типу (дискретний, абсолютно неперервний або сингулярно неперервний). Це твердження є аналогом теореми Джессена-Вінтнера [2]. Для всіх вище згаданих систем це зроблено у роботах [5, 12, 14]. Зараз ми розглядаємо загальний випадок, який включає системи з ненульовою надлишковістю.

Теорема 3. *Випадкова величина ξ має або чисто дискретний (атомарний), або чисто неперервний розподіл, причому дискретний тоді і тільки тоді, коли*

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \tag{3}$$

Точковий спектр $D_\xi = \{x : \ P\{\xi = x\} > 0\}$ розподілу ξ є хвостовою множиною, представником якої є число $x_0 = \Delta^g_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, де $p_{c_k k} = \max\{p_{0k}, p_{1k}\}$, або її підмножиною.

Доведення. Нехай виконується умова $M > 0$. Доведемо дискретність розподілу ξ.

Оскільки $P\{\xi = x_0\} \geq M > 0$, то x_0 – атом розподілу. Зауважимо при цьому, що x_0 може мати не одне g-зображення, саме тому знак $\geq$. Розглянемо $x = \Delta^g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, g-код якого належить хвостовій множині з представником (c_n) і при цьому $\alpha_{m+j} = c_{k+j}$ для всіх $j \in N$. Тоді

$$P\{\xi = x\} \geq \prod_{i=1}^{\infty} p_{\alpha_i i} = \frac{p_{\alpha_1 1} \cdots p_{\alpha_m m}}{p_{c_1 1} \cdots p_{c_k k}} M \geq 0.$$

Зрозуміло, що коли існує $p_{\alpha_i i} = 0$, то виконується остання рівність. Цього не може трапитись, коли у матриці $||p_{in}||$ немає нулів. Разом з цим зробити висновок $P\{\xi = x\} = 0$, коли $p_{\alpha_i i} = 0$, не можна, оскільки x може мати не одне g-зображення. Якщо x не має зображення, g-код якого належить хвостовій множині g-коду числа x_0, то у будь-якого зображення $x = \Delta^g_{a_1\ldots a_n\ldots}$ існує нескінченна множина $p_{a_{n_k} n_k} = \min\{p_{0n_k}, p_{1n_k}\}$. А тому $P\{\xi = x\} = 0$. Отже, x не є атомом.

Залишилось показати, що сума мас усіх атомів дорівнює 1. Справді,

$$P\{\xi \in D_\xi\} = \lim_{k\to\infty} \Big(\prod_{i=k+1}^{\infty} p_{c_i i}\Big)\Big(\sum_{\alpha_1 \in A} \ldots \sum_{\alpha_m \in A} \prod_{i=1}^{m} p_{\alpha_i i}\Big) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=k+1}^{\infty} p_{c_i i} = 1.$$

У випадку $M = 0$ для будь-якого g-зображення $\Delta^g_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ маємо

$$P\{\xi = \Delta^g_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}\} = \prod_{i=1}^{\infty} p_{\alpha_i i} \leq M = 0.$$

Якщо система має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох зображень, маємо $P\{\xi = x\} = 0$. Тому розподіл ξ є неперервним. □

Наслідок 1. *Точковий спектр D_ξ випадкової величини ξ є щільним у множині D, якщо матриця $||p_{ik}||$ не має нулів, а в загальному випадку є щільною у множині*

$$D_0 = \{x \in D : x = \Delta^g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, p_{\alpha_n n} \neq 0\}.$$

Зауваження 2. *Аналогічне твердження залишається правильним для систем кодування чисел, потужність алфавіту яких більша 2.*

Теорема 4. *Якщо цифри (ζ_n) розподілу випадкової величини $\zeta = \Delta^g_{\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n \ldots}$ утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ і матрицею перехідних ймовірностей $||p_{ij}|| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$, а g-зображення має нульову надлишковість, то розподіл ζ буде дискретним лише тоді, коли у матриці $||p_{ij}||$ два елементи нульові або один нульовий і при цьому $p_{i[1-i]} = 0$.*

Доведення. Враховуючи, що зображення має нульову надлишковість і для g-бінарних точок ймовірність лише для одного зображення може бути відмінною від нуля, спираючись на міркування, наведені при доведенні леми 1 і теореми 2, робимо висновок, про справедливість даного твердження. □

Зауваження 3. *Зазначимо, що коли матриця перехідних ймовірностей міститиме один нуль на головній діагоналі (нехай $p_{ii} = 0$), то розподіл буде неперервним і зосередженим на структурно фрактальній множині*

$$D_\zeta = \{\Delta^g_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \overline{\alpha_k \alpha_{k+1}} \neq \overline{ii} \ \ k \in N\},$$

яка має наступну структуру автомодельності:

$$\delta_{1-i}(D_\zeta) = D_\zeta \cap \Delta^g_{[1-i]}, \quad \delta_i(\delta_{[1-i]}(D_\zeta)) = D_\zeta \cap \Delta^g_{i[1-i]}.$$

Зауважимо, що такі множини виникають у якості часових шкал у теорії диференціальних рівнянь [9].

3 Дискретні розподіли значень функцій

Теорема 5. *Якщо $f(x)$ — сингулярна функція канторівського типу (монотонна, немонотонна, ніде немонотонна за виключенням проміжків сталості, обмеженої або необмеженої варіації), визначена на відрізку $[0; 1]$, а X– рівномірно розподілена випадкова величина на цьому відрізку $[0; 1]$, то випадкова величина $Y = f(X)$ має чисто дискретний розподіл.*

Доведення. Оскільки функція $f(x)$, будучи функцією канторівського типу, є неперервною і має сумарну довжину інтервалів сталості рівну 1. Якщо $(a; b)$ — інтервал сталості, суміжний з множиною несталості, і $y_0 = f(x_0)$, де $x_0 \in (a; b)$, то y_0 є атомом розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, маса якого більша або рівна $b - a$ (для монотонних функцій f вона рівна, а для немонотонних, взагалі кажучи, може бути більшою). Разом з цим сума мас всіх атомів дорівнює сумі довжин інтервалів сталості, тобто 1. Отже, розподіл випадкової величини Y чисто дискретний. $\square$

Наслідок 2. *Якщо F — функція розподілу канторівського типу випадкової величини $\xi = \Delta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, а X має неперервний розподіл, то $Y = F_\xi(X)$ має нетривіальну дискретну складову розподілу, тобто є або дискретною, або нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів.*

Зауваження 4. *Різні класи сингулярних функцій, що задовольняють умови теореми 5, можна знайти у роботах [7, 15].*

Зауваження 5. *Теорема 5 дає алгоритм отримання великого класу чисто дискретних розподілів випадкових величин, точкові спектри яких щільні у відрізку.*

Список літератури

[1] *Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V.* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[2] *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and Rieman Zeta function// Trans Amer. Math Soc.- 1935. – 38, N.1 —P.48-88.

[3] *Lukacs E.* Characteristic functuins, 2nd edition. Charles Griffin & Company, 1970.

[4] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes// Studia math. — 1931. - 3. – P.119-155.

[5] *Prats'ovytyi M.V., Kyurchev D.V.* Singularity of the distribution of a random variable represented by an A_2-continued fraction with independent elements // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010, 81, pp. 159–175.

[6] *Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers// Algebra and Discrete Mathematics. Vol. 29(2020). № 1.— P.99-108.

[7] *Pratsiovytyi M., Lysenko I., Voitovska O.* Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument // Random Operators and Stochastic Equations. —- 2018. – Vol. 26, no.4. – P.193–200

[8] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* Continuous distributions whose functions preserve tails of A-continued fraction representation of numbers// Random Operators and Stochastic Equations. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.

[9] *Stanzhytskyi O.M.* Investigation of invariant sets of Ito stochastic systems with the use of Lyapunov functions// Ukrainian Mathematical Journal, 2001, 53 (11), Pages: 1882 – 1894.

[10] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.

[11] *Працьовитий М.В., Дрозденко В.О., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Інверсор цифр двоосновного G-зображення дійсних чисел і його структурна фрактальність// Буковинський матем. Журнал, 2022, Т.10, № 1, С. 100–109.

[12] *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Ймовірнісна теорія G_2-зображення// Збірник праць Інституту математики НАН України.— 2019. — Т.6, № 3. – С.115-129.

[13] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням дійсних чисел// Теорія ймовірностей та математична статистика. Вип. 2(99). 2018. С.187-202.

[14] *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С.92–102.

[15] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

Список літератури

[1] *Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V.* A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7

[2] *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and Rieman Zeta function// Trans Amer. Math Soc.- 1935. – 38, N.1 —P.48-88.

[3] *Lukacs E.* Characteristic functuins, 2nd edition. Charles Griffin & Company, 1970.

[4] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes// Studia math. — 1931. - 3. – P.119-155.

[5] *Prats'ovytyi M.V., Kyurchev D.V.* Singularity of the distribution of a random variable represented by an A_2-continued fraction with independent elements // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010, 81, pp. 159–175.

[6] *Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers// Algebra and Discrete Mathematics. Vol. 29(2020). № 1.— P.99-108.

[7] *Pratsiovytyi M., Lysenko I., Voitovska O.* Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument // Random Operators and Stochastic Equations. —- 2018. – Vol. 26, no.4. – P.193–200

[8] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* Continuous distributions whose functions preserve tails of A-continued fraction representation of numbers// Random Operators and Stochastic Equations. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.

[9] *Stanzhytskyi O.M.* Investigation of invariant sets of Ito stochastic systems with the use of Lyapunov functions// Ukrainian Mathematical Journal, 2001, 53 (11), Pages: 1882 – 1894.

[10] *Pratsiovytyi M.V.* Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316p. (in Ukrainian)

[11] *Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Inversor of digits of two-base G–representation of real numbers and its structural fractality// Bukovinian Math. Journal, 10, 1 (2022), P. 100–109. (inUkrainian)

[12] *Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Metric and probabilistic theory G_2-image of numbers// Proceedings of the Institute of Mathematics of the NationalAcademy of Sciences of Ukraine.— 2019. — Vol.6, № 3. – P.115-129. (in Ukrainian)

[13] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* Properties and value distributions of fractal functions associated with the Q_2-image of real numbers// Probability theory and mathematical statistics. Issue 2(99). 2018. P.187-202. (in Ukrainian)

[14] *Pratsiovytyi M.V.* Random values with independent Q_2 symbols // Asymptotic methods in the study of stochastic models. — Kyiv: Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1987. — P.92–102. (in Russian)

[15] *Pratsiovytyi M.V.* Fractal approach in the study of singular distributions. — Kyiv: M.P. DragomanovaNPU, 1998. — 296 p. (in Ukrainian)

Надійшло 25.12.2023

Pratsiovytyi M.V., Vasylenko N.M., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M. *Two-symbol system of encoding of numbers and discrete distributions of random variables*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 225–235.

We consider discrete distributions of random variables, defined by various two-symbol systems of encoding of real numbers (with zero and non-zero redundancy, with one and two bases, in particular with different sings), and study structural, topological, metric, and structurally fractal properties their point spectra. The general criterion for random variable with independent digits of two-symbol representation to have discrete distribution (analog of the P. L' evi theorem for sum of random series with discretely distributed terms) is proved and properties of its spectrum are described. In the paper we study discrete distributions of values of functions of the Cantor type of a random continuously distributed argument.